数理解析研究所講究録
第 1558 巻 2007 年 142-157

変分問題における弱収束とその周辺

中島 徹

「変分の直接法について非専門家[1] を対象に講演してください。」という中村誠氏の依頼に従って、以下では入門的な話題のみを扱う。

1 Introduction

以下 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は有界領域で, $\partial\Omega$ は滑らかであるとする。また $1 < p < +\infty$ として $p' = p/(p-1)$ とする。まず強収束、弱収束について復習する。

Definition 1.1 $\{g_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^p(\Omega), g \in L^p(\Omega)$ とする。

(i) $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ が g に強収束するとは

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega |g_j(x) - g(x)|^p \, dx = 0$$

が成立することとする。

(ii) $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ が g に弱収束するとは

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega g_j(x)h(x), dx = \int_\Omega g(x)h(x) \, dx$$

が、任意の $h \in L^{p'}(\Omega)$ について成立することとする。

強収束列は常に弱収束列であるが、この逆は成立しない。成立しない理由としては concentration や oscillation があげられる。例を用いてそれを解説する。

[1] 筆者も非専門家である。

Example 1.1 $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$ として $g_j : \Omega \to \mathbb{R}$ を

$$g_j(x) = \begin{cases} j & |x| < j^{-2} \\ 0 & |x| \geq j^{-2} \end{cases}$$

で定める。このとき任意の $h \in C_0(\Omega)$ に対して

$$\left|\int_{-1}^{1} g_j(x)h(x)\,dx\right| \leq \sup_{x\in\Omega}|h(x)| \cdot \int_{j^{-2}}^{j^2} j\,dx = 2j^{-1}\sup_{x\in\Omega}|h(x)| \to 0$$

となる。よって density により任意の $h \in L^2(\Omega)$ に対して

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega g_j(x)h(x)\,dx = 0$$

となる。つまり $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ は 0 に弱収束する。しかし

$$\int_{-1}^{1}|g_j(x)|^2\,dx = \int_{-j^{-2}}^{j^2} j^2\,dx = 2$$

であるから $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ は 0 に強収束しない。

上の例では直感的には $\{|g_j|^2\}_{j=1}^\infty$ の重さが原点に集中するため、極限をうまく関数であらわすことができないというこうご起こっている。これを数学的に表現するには Ω 上の Radon 測度全体の空間 $\mathcal{M}(\Omega)$ をつかって次のようにいえばよい。

$$|g_j|^2\,dx \rightharpoonup 2\delta \quad \text{in } \mathcal{M}(\Omega)$$

ここで δ は原点に台をもつ Dirac 測度である。このように強収束がこわれる現象は、scalar 曲率の方程式、調和写像、極小曲面など、非線型偏微分方程式ではよく見られるもので偏微分方程式の専門家には concentlation compactness としてしられ、幾何学者には bubbling と呼ばれている。

Example 1.2 $\Omega = (-\pi,\pi)$ として

$$g_j(x) = \sin(jx)$$

とする。このとき Riemann-Lebesgue の定理を思いだすと，任意の $h \in L^1(\Omega)$ について次が成立する。

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_j(x)h(x)\,dx = \lim_{j\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin(jx)\,dx = 0$$

よって $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ であるから $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ は 0 に弱収束する。一方

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g_j(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(jx)|^2\,dx = \pi$$

であるから $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ は 0 に強収束しない。

以下での目的はこの例のような強収束の壊れ方が、ある種の変分問題においてあらわれることを見ることである。

2 変分問題

$$f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times R^{mn} \to \mathbb{R}$$

を滑らかな関数として

$$I : W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$$

を

$$I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\,dx$$

で定める。また $v \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ について

$$X(v) = \{u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) |\ u - v \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)\}$$

とする。考える問題は次である。

Problem

$$I(u_{\min}) = \inf_{u\in X(v)} I(v)$$

を満たす $u_{\min} \in X(v)$ は存在するか？(存在するとき $u_{\min}$ を minimizer と呼ぶ。)

このような問題を扱う際有効な方法が変分の直接法と呼ばれるものである。手順は次の通りである。

Step 1 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X(v)$ で

$$I(u_j) \to \inf_{u \in X(v)} I(u)$$

となるものをとる。(このような列を minimizing sequence と呼ぶ。)

Step 2 必要ならば部分列をとり、$\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ が何らかの位相で、ある $u_\infty \in X(v)$ に収束することをいう。

Step 3 u_∞ が minimizer であることをいう。

いつもこの方法でうまくいくわけではないが、f がいくつかの条件を満たせば、直接法で minimizer の存在を示すことができる。鍵となるのは次の二つの条件である。

- I の coercivity
- I の 弱点列下半連続性

まず I の coercivity についてであるが次を仮定する。

Assumption

ある $a, b, c > 0$ が存在して

$$a|A|^p - b \leq f(x, s, \xi) \leq C(1 + |s|^p + |A|^p) \tag{2.1}$$

が任意の $(x, s, A) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn}$ について成立する。

この仮定の下では $u \in X(v)$ について次が成立する。[2]

$$a \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\, dx - b|\Omega| \leq I(u) \leq c|\Omega| + \int_\Omega \{|u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p\}\, dx \tag{2.2}$$

(2.2) よりまず以下のことがわかる。

[2] 正確には左側の不等式を corcivity と呼ぶ。

(i) 任意の $v \in X(u)$ について

$$I(u) < +\infty$$

(ii)

$$-\infty < \inf_{u \in X(v)} I(u)$$

$\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X(v)$ を minimizing sequence とすると(2.2) より

$$\int_{\Omega} \{|u_j(x)|^2 + |\nabla u_j(x)|^p\}\, dx$$

は有界列となる。よって必要ならば部分列をとることにより、$\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ はある $u_\infty \in X(v)$ に $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ で弱収束する。

ここで **もし** I が弱点列下半連続であれば、つまり

$$I(u_\infty) \leq \liminf_{j \to \infty} I(u_j)$$

が成立すれば、

$$I(u_\infty) \leq \liminf_{j \to \infty} I(u_j) = \inf_{u \in X(v)} I(u)$$

より u_∞ は I の minimizer となる。

よって問題は f にどのような条件があれば I が弱点列下半連続になるか？ということである。これについは次がしられている。

Theorem 2.1 (Acerbi-Fusco)

I が弱点列下半連続であることと次は同値。

任意の $x_0 \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{mn}$, $u \in C_0^\infty(\Omega)$ について

$$f(x_0, s_0, \xi) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x_0, s_0, A + Du(x))\, dx \tag{2.3}$$

が成立する。(この条件を f の quasi-convexity と呼ぶ。)

この Theorem の証明は行わないが、(2.3) という条件がどこからでてくるかということを簡単な場合にみてみる。次のような特殊な場合を考える。

$$\Omega = Q = [0,1] \times \cdots \times [0,1] \qquad f : \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$$

$u \in C_0^\infty(Q, \mathbb{R}^{mn}$, $A \in \mathbb{R}^{mn}$ とする。そして I が弱点列下半連続あるとする。Q を 2^n 個に等分してできる cubes の族を $\{Q_l^{(1)}\}_{l=1}^{2^n}$ とする。各 $Q_l^{(1)}$ をさらに 2^n 個に等分したものをあわせた cubes の族を $\{Q^{(2)}\}_{l=1}^{2^{2n}}$ とする。同様にして帰納的に $\{Q_l^{(k)}\}_{l=1}^{2^{kn}}$ を得る。また $a_l^{(k)}$ を $Q_l^{(k)}$ の中心とする。ここで

$$u_k : Q \to \mathbb{R}^{mn}$$

を

$$u_k(x) = \frac{1}{2^{kn}} u(2^{kn}(x - a_l^{(k)})) \qquad (x \in Q_l^{(k)})$$

で定める。(u_k は u を各 cube 上にスケール変換したものである。) このとき次が成立。

$$\int_{Q_l^{(k)}} |\nabla u_k|^p\, dx = \int_{Q_l^{(k)}} |\nabla u(2^k(x - a_l^{(k)}))|^p\, dx = \frac{1}{2^{kn}} \int_Q |\nabla u(x) + A|^p\, dx$$

よって

$$\int_Q |\nabla u_k(x)|^p\, dx = \sum_{l=1}^{2^{kn}} \frac{1}{2^{kn}} \int_Q |\nabla u(x) + A|^p\, dx = \int_Q |\nabla u(x) + A|^p\, dx$$

よって必要ならば部分列をとることにより、ある $u_\infty \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^{mn})$ に対して

$$u_k \rightharpoonup u_\infty \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^{mn})$$

が成立する。一方 $u \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{mn})$ であるから明らかに

$$u_k \to Ax \quad \text{a.e. in } Q$$

となる。よって

$$u_k \rightharpoonup Ax \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^{mn})$$

となる。I が弱点列下半連続であるから

$$I(Ax) \le \liminf_{k\to\infty} I(u_k)$$

である。ここで

$$I(u_k) = \sum_{l=1}^{2^{kn}} \int_\Omega f(\nabla u(2^{kn}(x - a_l^{(k)})) + A)\, dx = \sum_{l=1}^{2^{kn}} \int_\Omega \frac{1}{2^{kn}} f(\nabla u(x) + A)\, dx$$
$$= \int_Q f(\nabla u(x) + A)\, dx$$

一方

$$I(Ax) = \int_Q f(A)\, dx = |\Omega| \cdot f(A)$$

よって

$$|\Omega| \cdot f(A) \le \int_\Omega f(A + \nabla u(x))\, dx$$

となる。

3 Example

前のセクションより f に (2.1) を仮定した場合、f が quasi-convex であれば、I の $X(v)$ での minimizer が存在することがわかった。では f が quasi-convex でないときはどうなるだろうか？ 一般に f が quasi-convex であるかどうかを調べるのは困難ではあるが、特殊な場合には次のようなことが知られている。

Theorem 3.1 $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対しては、f が (2.2) を満たすことと、任意の $(x_0, s_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$ に対して $f(x_0, s_0, \cdot)$ が convex であることは同値。

このことを認めて具体的な例を考える。$\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ として、

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

を

$$f(s, A) = s^2 + (A^2 - 1)^2$$

とする。この f に対応する汎関数 I を $X(0)=W_0^{1,4}(\Omega)$ で考える。

$$\frac{d^2}{dA^2}f(s_0,A)=12A^2-4$$

より $f(s_0,\cdot)$ は convex ではない。一方

$$f(s,A)=s^2+A^4-2A^2+1\le\frac{3}{2}(s^4+A^4+1)$$

及び

$$f(s,A)=s^2+A^4-2A^2+1\ge\frac{1}{2}A^4$$

であるから Asuumption は満たされている。ここで $u_1:\Omega\to\mathbb{R}$ を

$$u_1(x)=\begin{cases}x & 0<x\le 1/2\\ 1-x & 1/2<x<1\end{cases}$$

とする。（u_1 のグラフは 2 本の直線からなる。）次に $u_2:\Omega\to\mathbb{R}$ を

$$u_2(x)=\begin{cases}x & 0<x\le 1/4\\ 1/2-x & 1/2\le x<1/2\\ x-1/2 & 1/2<x\le 3/4\\ 1-x & 3/4<x<1\end{cases}$$

とする。（u_2 のグラフは 4 本の直線からなる。）同様にして各 $k\in\mathbb{N}$ に対して u_k を定義する。このとき

$$|u_k'(x)|=1 \qquad \text{a.e. in } (0,1)$$

となる。また

$$|u_k(x)|\le\frac{1}{2k}$$

である。よって

$$I(u_k)=\int_0^1|u_k(x)|^2\,dx\le\int_0^1\left(\frac{1}{2k}\right)^2dx=\frac{1}{4k^2}\to 0$$

これより特に

$$\inf_{u\in W_0^{1,4}(\Omega)} I(u)=0$$

であることがわかる。一方

$$\int_0^1 |u_k'(x)|^4\,dx=1$$

であるから必要ならば部分列をとって、ある $u_\infty \in W_0^{1,4}(\Omega)$ に対して

$$u_k \rightharpoonup u_\infty \quad \text{in } W_0^{1,4}(\Omega)$$

となる。一方明らかに

$$u_k \to 0 \quad \text{a.e. in } \Omega$$

であるから

$$u_k \rightharpoonup 0 \quad \text{in } W_0^{1,4}(\Omega)$$

である。ここで

$$I(0)=\int_0^1 1^2\,dx=1$$

よって

$$I(0)>\lim_{k\to\infty} I(u_k)$$

である。もし I が $W_0^{1,4}(\Omega)$ に minimizer $u_{\min}$ をもつとすると

$$I(u_{\min})=\int_0^1 \{u_{\min}(x)^2+(|u_{\min}'(x)|^2-1)^2\}\,dx=0$$

となり次が成立することとなる。

$$u_{\mathrm{mnin}}=0 \quad u_{\min}'=0 \quad \text{a.e. in } \Omega$$

ここで $u_{\mathrm{mnin}} \in W^{1,4}(\Omega)$ より $u_{\min}$ は絶対連続になるためこれは矛盾。よって I は $W_0^{1,4}(\Omega)$ において minimizer を持たない。

この例のように f に quasi-convexity がない場合は minimizer が存在しないということが起こりえる。このような問題に対して、弱い意味での minimizer を定義したい。方法としては次のようなものがある。

- f を素性の良いものに変えてしまう。
- I の定義域を拡張する。

前者の方法を次のセクションで述べ、後者の方法をその次のセクションで扱う。

4 Relaxation

ここでは f を quasi-convex なものに置き換えることをかんがえる。

Definition 4.1 (quasi-convexification)
$(x_0, s_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{mn}$ について

$$Qf(x_0, s_0, A) = \inf \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x_0, s_0, A + \nabla u(x))\, dx \middle| \, u \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

とする。Qf を f の quasi-covexification と呼ぶ。

quasi-convexification Qf について次が成立する。

Theorem 4.1 $(x_0, s_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$ に対して、

$$\begin{aligned} &Qf(x_0, s_0, A) \\ &= \sup\{g(A) \mid g : \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R} : \text{ quasi convex } g(A) \leq f(x_0, s_0, A)\} \end{aligned}$$

であり、$Qf(x_0, s_0, A)$ は A について quasi-convex である。

以下で行うことは汎関数 I を

$$\bar{I}(u) = \int_\Omega Qf(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

でおきなおすことである。

Example 4.1 Ω, f を Example 3.1 のものとする。このとき Qf は次で与えられる。

$$Qf(s,A) = \begin{cases} (A^2-1)^2 + s^2 & |A| > 1 \\ s^2 & |A| \le 1 \end{cases}$$

ここで

$$\bar{I}(u) = \int_0^1 f(s, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

とすると

$$I(0) = 0$$

であり、0 が $W_0^{1,4}(\Omega)$ の minimizer となる。ここで

$$\bar{I}(0) = 0 = \inf_{u \in W_0^{1,4}(\Omega)} I(u)$$

であることに注意する。このことは次の定理のように一般化される。

Theorem 4.2 f は **Asumption** を満たすとする。このとき任意の $v \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ について次が成立する。

$$\inf_{u \in X(v)} I(u) = \inf_{u \in X(v)} \bar{I}(u)$$

5 $W^{1,p}$ Young 測度

ここでは I の定義域を広げることを考える。まず Example 3.1 について考察する。

最小化列 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ について

$$u_j(x) \to 0 \qquad x \in (0,1)$$

であるが u_j' は j によって $+1$ であったり -1 であったりするので、概収束しない。このように強い振動をする列を確率論的にとらえようというのが、Young 測度である。この例の場合、$u_j'(x) = 1$ となる x と $u_j'(x) = -1$ とな

る x は半々で現れる。よって $x \in (0,1)$ について $u_j'(x)$ は確率 1/2 で $+1$ であり、確率 1/2 で -1 であると考えることが出来る。よって極限ではどの $x \in (0,1)$ に対しても確率 1/2 で $+1$, 確率 1/2 で -1 である状態になっていると思われる。しかしこれを関数を用いて表現することは出来ないので、値域となる $\mathbb{R}$ 上の確率測度

$$\frac{1}{2}\{\delta_{+1} + \delta_{-1}\}$$

が極限であると思いたい。これが Young 測度のおおまかなアイデアである。このことを数学的に述べると次のようになる。（少し弱い形で述べる。）

Theorem 5.1 ($W^{1,p}$ Young 測度)

$\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset W^{1,p}(\Omega.\mathbb{R}^m)$ を有界列とする。このとき（部分列をとることにより）ある $u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ 及び $\mathbb{R}^{mn}$ 上の確率測度の族 $\{\nu_x\}_{\text{a.e.x}\in\Omega}$ が存在して次を満たす。

(i) $u_j \rightharpoonup u \quad \text{in } W^{1,p}$

(ii) $u_j \to u \quad \text{in } L^p$

(iii) 滑らかな関数 $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn}$ に対して $\{f(x,u_j(x),\nabla u_j(x))\}_{j=1}^{\infty}$ が $L^1(\Omega)$ の弱収束列であるとき次が成立。

$$\psi(x,u_j(x),\nabla u_j(x)) \rightharpoonup \int_{\mathbb{R}^{mn}} \psi(x,u(x),A)\,d\nu_x(A) \qquad \text{in } L^1(\Omega)$$

この $\{\nu_x\}_{\text{a.e.}}x \in \Omega$ を $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ から生成される $W^{1,p}$ Young 測度と呼ぶ。

Remark 5.1 もし

$$u_j \to u \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$$

ならば $\nu_x = \delta_{\nabla u(x)}$ となる。

Example 5.1 Example 3.1 での列 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ から生成される $W^{1,4}$ Young 測度 $\{\nu_x\}_{\mathrm{a.e.x}\in\Omega}$ は

$$\nu_x = \frac{1}{2}\{\delta_{+1} + \delta_{-1}\} \tag{5.1}$$

であることを確かめてみる。

$$I_j(+) = \{x \in (0,1) |\ u_j'(x) = +1\}$$
$$I_j(-) = \{x \in (0,1) |\ u_j'(x) = -1\}$$

とおく。$\psi : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ に対して、$\{f(x, u_j(x), \nabla u_j(x))\}_{j=1}^{\infty}$ が $L^1(\Omega)$ の弱収束列であるとして、$h \in L^{\infty}(\Omega)$ とすると次が成立する。

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \psi(x, u_j(x), u_j'(x))h(x)\,dx \\
&= \int_{I_j(+)} \psi(x, u_j(x), +1)h(x)\,dx + \int_{I_j(-)} \psi(x, u_j(x), -1)h(x)\,dx \\
&\to \frac{1}{2}\int_0^1 \psi(x, u(x), +1)h(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi(x, u(x), -1)h(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\{\psi(x, u(x), +1) + \psi(x, u(x), -1)\}h(x)\,dx
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1}{2}\{\psi(x, u(x), +1) + \psi(x, u(x), -1)\} = \int_{\mathrm{R}} \psi(x, u(x), A)\,d\nu_x(A)$$

であるから (5.1) で与えられる確率測度の族が $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ から生成される $W^{1,4}$ Young 測度であることがわかる。

ここで一般論に話を戻して、$\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ について次が成立するとする。

(i) $u_j \rightharpoonup u \quad \text{in } W^{1,p}$

(ii) $u_j \to u \quad \text{in } L^p$

(iii) 滑らかな関数 $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn}$ に対して $\{f(x, u_j(x), \nabla u_j(x))\}_{j=1}^{\infty}$ が $L^1(\Omega)$ の弱収束列であるとき次が成立。

$$\psi(x, u_j(x), \nabla u_j(x)) \rightharpoonup \int_{\mathbb{R}^{mn}} \psi(x, u(x), A)\, d\nu_x(A) \qquad \text{in } L^1(\Omega)$$

このとき $\psi : \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ を

$$\psi(A) = A^i{}_\alpha$$

とおくと、任意の $h \in L^1(\Omega)$ に対して次を得る。

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial u_j^i}{\partial x^\alpha}(x) h(x)\, dx = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^{mn}} A^i{}_\alpha\, d\nu_x(A) h(x)\, dx$$

一方

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial u_j^i}{\partial x^\alpha}(x) h(x)\, dx = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}(x) h(x)\, dx$$

よって次を得る。

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbb{R}^{mn}} A\, d\nu_x(A)$$

そして形式的には次が成立する。

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f(x, u_j(x), \nabla u_j(x))\, dx = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^{mn}} f(x, u(x), A)\, d\nu_x(A) dx$$

これを考慮して、I の定義域を拡張する。まず $\tilde{X}(v)$ を $\mathbb{R}^{mn}$ 上の確率測度の族 $\nu = \{\nu_x\}_{\text{a.e.x}\in\Omega}$ で以下を満たすものの全体とする。

$\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ 及び $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ が存在して次をみたす。

(i) $u - v \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$

(ii) $\{\nabla u_j\}_{j=1}^{\infty}$ は ν を生成する。

(iii)

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbb{R}^{mn}} A\, d\nu_x(A)$$

そして汎関数 $\tilde{I}:\tilde{X}(v)\to\mathbb{R}$ を

$$\tilde{I}(\nu)=\int_{\Omega}\int_{\mathrm{R}^{mn}}f(x,u(x),A)\,d\nu_x(A)dx$$

で定める。

Remark 5.2 Example 3.1 の I について考える。(5.1) により定まる ν について（この場合 $u=0$ となる。）ν_x の台は $\{\pm 1\}$ にのしかないので次が成立する。

$$\tilde{I}(\nu)=\int_0^1\int_{\mathrm{R}}\{|u(x)|^2+(|A|^2-1)^2\}\,d\nu_x(A)dx=\int_0^1 0\,dx=0$$

明らかに $\tilde{I}(\nu)\geq 0$ であるから ν は $\tilde{I}$ の minimizer である。

一般には次が成立する。

Theorem 5.2 $f:\Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{mn}$ は滑らかで **Assumption** を満たすとする。このとき汎関数 $\tilde{I}$ は minimizer ν を持ち、さらに次が成立する。

$$\tilde{I}(\nu)=\inf_{u\in X(v)}I(u)$$

また $u\in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ を

$$\nabla u(x)=\int_{\mathrm{R}^{mn}}A\,d\nu_x(A)$$

なるものとすると、u は $\tilde{I}$ の minimizer である。

References

[1] E. Acerbi & N. Fusco, *Semicontinuity problems in the calculus of variations.* Arch. Ration. Math. **86**, (1984), 125–145

[2] B. Dacorogna, Direct metheods in the calculus of variations. Appl. Math. Sci. **78**, Springer Verlag, 1989

[3] L. C. Evans, Weak convergence methods in nonlinear partial differential equations. CBMS Reg. Conf. Ser. in Math. **74**, Amer. Math. Soc. Providence, 1991

[4] P. Pedregal, Parametrized maeasures and variationa principles. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **30**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997