数理解析研究所講究録
第1564巻 2007年 70-75



# 群環のHeller格子について

大阪市立大学理学部　河田成人 (Shigeto KAWATA)
Department of Mathematics, Osaka City University

$G$ を有限群とし，$p$ は素数で，$(K, \mathcal{O}, k)$ を $p$-モジュラー系とする．即ち，

- $K$ は離散乗法付値 $\varphi$ の与えられた完備離散付値体でその標数は 0 であるものとし，
- $\mathcal{O}$ は付値 $\varphi$ の付値環でその（唯一の）極大イデアルは $\pi$ で生成され $\pi\mathcal{O} = J(\mathcal{O})$,
- 剰余体 $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ の標数は $p$ とする．

$R$ で $\mathcal{O}$ または $k$ を表す．ここでは群環 $RG$ 上の格子と言えば

$R$ 上有限生成で自由な（右）$RG$-加群

を意味する．有限群の表現に関する用語や記号については，[NT] を参照してください．

**定義**　群多元環 $kG$ 上の加群 $M$ に対して，$M$ を整群環 $\mathcal{O}G$ 上の加群と見て射影被覆 $P_M$ を取ったとき，その核 $Z_M$ を $M$ の Heller 格子と呼ぶ：

$$0 \to Z_M \to P_M \to M \to 0 \text{ (完全)}.$$

ここで $P_M$ は $\mathcal{O}G$-格子なので，その $\mathcal{O}$-部分加群である $Z_M$ も $\mathcal{O}G$-格子である．

例として，自明な $kG$-加群 $k_G$ を考えよう．自明な $kG$-加群 $k_G$ とは，体 $k$ に群 $G$ を（右から）自明に作用させることで得られる（単純な）$kG$-加群のことである（$x \in k$, $g \in G$ に対し $xg = x$）．群 $G$ が $p$-群の場合には，環として $\mathcal{O}G$ は局所環であって，$\mathcal{O}G$ それ自身を右 $\mathcal{O}G$-加群と見たとき直既約であり，$\mathcal{O}G \to k_G \to 0$ が $k_G$ の（$\mathcal{O}G$ 上の加群と見たときの）射影被覆である．この射影被覆の核は $\mathcal{O}G$ の Jacobson 根基 $\mathrm{Rad}(\mathcal{O}G) = \pi\mathcal{O}G + \sum_{g\in G}\mathcal{O}(g-1)$ であるので，この $\mathrm{Rad}(\mathcal{O}G)$ が自明な加群 $k_G$ の Heller 格子である：

$$0 \to \mathrm{Rad}(\mathcal{O}G) \to \mathcal{O}G \to k_G \to 0.$$

有限 $p$-群 $G$ の $\mathcal{O}$ 上の整群環 $\mathcal{O}G$ の根基 $\mathrm{Rad}(\mathcal{O}G)$ については次の事実が知られている．

**事実**　群 $G$ が $p$-群の場合，

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{O}G) \text{ が直可約} \iff |G| = p \text{ 且つ } \varphi(p) = 1.$$

また $|G| = p$ 且つ $\varphi(p) = 1$ のとき，$\mathcal{O}G$-格子として $\mathrm{Rad}(\mathcal{O}G) \cong \mathcal{O}_G \oplus \sum_{g\in G}\mathcal{O}(g-1)$ が成り立つ．ここで $\mathcal{O}_G$ は自明な $\mathcal{O}G$-格子で $\sum_{g\in G}\mathcal{O}(g-1)$ は $\mathcal{O}G$ の添加イデアルである．

上の事実から，（単純な $kG$-加群の）Heller 格子は必ずしも直既約とは限らない．

一般の有限群 $G$ の $R$ 上の群環 $RG$ を両側イデアルとして

$$RG = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$$

と直既約分解したとき，各因子 $B_i$ を $RG$ のブロックと呼ぶ．直既約な $RG$ 上の加群 $M$ は，本質的には，ある（ただ一つの）ブロック $B_i$ 上の加群であり，このとき $M$ は $B$ に属するという．また，群環 $RG$ のブロック $B$ に無限個の互いに非同型な直既約加群が属するとき，$B$ は無限表現型であるという．非同型な直既約加群を有限個しか持たないブロックは有限表現型と呼ばれる．

さて，整群環 $\mathcal{O}G$ 上の直既約な射影的加群 $P$ をその根基 $\mathrm{Rad}(P)$ で割った $P/\mathrm{Rad}(P)$ は単純な $kG$-加群である：

$$0 \to \mathrm{Rad}(P) \to P \to P/\mathrm{Rad}(P) \to 0.$$

即ち，$\mathrm{Rad}(P)$ は単純な $kG$-加群の Heller 格子である．その直既約性について次が言える．

**事実** ([Wi2, Proposition 1], [K1, Proposition 3])　整群環 $\mathcal{O}G$ のブロック $B$ が無限表現型であるとする．このとき，$B$ に属する直既約な射影的 $\mathcal{O}G$-加群の根基は直既約である．

以降では，一般の Heller 格子の直既約性を考えるために，係数環に関して次の条件（#）を仮定する．

（#）$(K, \mathcal{O}, k) > (K', \mathcal{O}', k')$ は $p$-モジュラー系の拡大で
- ♦ $k' = k = \bar{k}$ は代数的閉体であり，
- ♦ $\pi' \in \pi^3\mathcal{O}$（即ち $\varphi$ の $\varphi'$ 上の分岐指数は 3 以上）とする．

この条件（#）は Heller 格子の直既約性を保証するための充分条件である．即ち

**定理 1** ([K3, Theorem 2.9])　$p$-モジュラー系 $(K, \mathcal{O}, k)$ が条件（#）をみたしているとする．このとき，直既約な $kG$-加群の Heller $\mathcal{O}G$-格子は直既約である．

また 2 つの Heller 格子について次が成り立つ．

**命題**　$M, N$ は直既約な $kG$-加群とし，$Z_M, Z_N$ はそれぞれ $M, N$ の Heller 格子とする．$p$-モジュラー系 $(K, \mathcal{O}, k)$ が条件（#）をみたすとき，$M \cong N \iff Z_M \cong Z_N$.

証明　$\Longrightarrow$: Schanuel の補題から．$\Longleftarrow$: $\mathcal{A}(Z_M)$, $\mathcal{A}(Z_M)$ をそれぞれ $Z_M$, $Z_N$ で終わる "almost split 列" とすると，これらを mod $(\pi)$ で簡約化して得られる $kG$-加群の短完全列はそれぞれ $M$, $N$ で終わる almost split 列に相当する [K3, Theorem 4.4] が，almost split 列の一意性から主張が従う．□

このように直既約 $kG$-加群に対して直既約 $\mathcal{O}G$-Heller 格子が対峙している．これから Heller 格子にまつわる Auslander-Reiten quiver について考察したい．

**定義**　群環 $RG$ のブロック $B$ の Auslander-Reiten quiver $\Gamma(B)$ とは，点として，直既約な $RG$-格子 $M$ の同型類 $[M]$ を考え，矢については，直既約な $RG$-格子 $M$ から $N$ に"既約写像"と呼ばれる準同型写像が存在するとき，$[M] \to [N]$ と矢印を引くことによって描かれる有向グラフのことである．

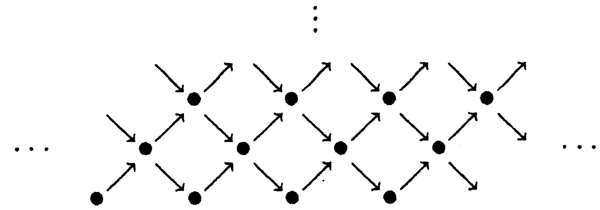
準同型 $f : M \to N$ が既約写像とは，$f = gh$ と合成写像と書けるのは $g$ が分裂全射か $h$ が分裂単射という自明なものしかないときを言う．Auslander-Reiten 理論に関して詳しいことは [ARS], [B] 等の本を参照してください．

有限群のモジュラー表現（$R = k$）の場合には，Auslander-Reiten quiver $\Gamma(B)$ の連結成分の形状について次の事実が K. Erdmann によって示された．

**定理** (Erdmann[E3])　$k$ が代数的閉体で群多元環 $kG$ のブロック $B$ が"wild 表現型"であれば，$B$ の Auslander-Reiten quiver $\Gamma(B)$ の連結成分の tree class は $A_\infty$ である．

ここでブロック $B$ が wild 表現型とは，大雑把に言えば，$B$ には無限個の直既約 $RG$-格子が属していて（即ち無限表現型）しかもそれらをうまくパラメタライズすることは不可能であるときを言う．

また，tree class が $A_\infty$ : •—•—•—···—•—······ であるということは，連結成分の形状が半平面状の $\mathbf{Z}A_\infty$（下の図）か又は半無限 tube 型の $\mathbf{Z}A_\infty/\langle\tau^m\rangle$ であることを意味する．



体 $k$ 上の群多元環 $kG$ のブロックは，その"不足群"が巡回群，2 面体群，準 2 面体群，4 元数形の 2 群のいずれでもなければ wild 表現型であることが知られている．(不足群とはブロックに付随して定められる $G$ の部分群であって，群の言葉でブロックを読み解こうとするときに中心的な役割を担う．詳細は [NT] を参照してください．) 不足群が巡回群のときは有限表現型であり，2 面体群か準 2 面体群かもしくは 4 元数形の 2 群のときは"tame 表現型"になっていて，このときのモジュラー表現は K. Erdmann の本 [E1] に詳しい．

一方，整群環 $\mathcal{O}G$ の表現型は E. Dieterich により分類が完了されており [D3]，特に，有限 $p$-群 $G$ の整群環 $\mathcal{O}G$ が有限表現型となるのは次のいずれかの場合のみである：

∘ $G = C_2$，∘ $G = C_3$ 且つ $\varphi(3) \leq 3$，∘ $G = C_p$ 且つ $\varphi(p) \leq 2$，∘ $G = C_{p^2}$ 且つ $\varphi(p) = 1$.

（ここに $C_n$ は位数 $n$ の巡回群）

また，整群環 $\mathcal{O}G$ が wild 表現型となるのは次の条件のいずれかが成り立つときである [D1]：

∘ $\varphi(p) \geq 1$ で $G$ は $C_p, C_{p^2}, C_2 \times C_2, C_8$ 以外の $p$-群，

∘ $\varphi(p) \geq 2$ で $G$ は $C_8, C_2 \times C_2, C_{p^2} (p \geq 3)$ のいずれかに同型，

∘ $\varphi(p) \geq 3$ で $G$ は $C_4, C_p (p \geq 5)$ のいずれかに同型，

∘ $\varphi(p) \geq 5$ で $G = C_3$.

ところで，整群環$\mathcal{O}G$ブロックが有限表現型の場合には，そのAuslander-Reiten quiverの連結成分の形状についてE. Dieterich[D2]やA. Wiedemann[Wi1, Wi3]らによって調べられている．

しかしwild表現型においては，そのAuslander-Reiten quiverの連結成分の形状については一般的なことはまだ分かっていない．ただ，$p$-群の場合に次のような結果がある．

**事実**　有限$p$-群$G$は巡回群ではないとする．さらに$p=2$で$G$がKleinの4群$C_2 \times C_2$のときは$\varphi(2) \geq 2$も仮定する．（このとき$\mathcal{O}G$はwild表現型である[D3].）

（1）([IK])　$\mathcal{O}G$のAuslander-Reiten quiverの連結成分で自明な$\mathcal{O}G$-格子$\mathcal{O}_G$を含むもののtree classは$A_\infty$である．

（2）([K2])　$\mathcal{O}G$のAuslander-Reiten quiverの連結成分で射影的な$\mathcal{O}G$-格子$\mathcal{O}G$を含むもののtree classは$A_\infty$である．

なお，$p=2$で$G$がKleinの4群のときに$\varphi(2)=1$であれば，整群環$\mathcal{O}G$はtame表現型であり，自明な$\mathcal{O}G$-格子$\mathcal{O}_G$と射影的な$\mathcal{O}G$-格子$\mathcal{O}G$は同じ連結成分に含まれて，そのtree classは$\tilde{D}_4$である[D2, Proposition 3.4].

さて，Heller $\mathcal{O}G$-格子を含む連結成分に関する次の定理がこの報告の主結果である．証明については[K4]を見てください．

**定理2**　$p$-モジュラー系$(K, \mathcal{O}, k)$は条件（#）をみたし，整群環$\mathcal{O}G$のブロック$B$は無限表現型であるとする．$Z_M$は直既約$kG$-加群$M$のHeller格子とし，$\Theta$は$B$のAuslander-Reiten quiverの連結成分で$Z_M$を含むものとする．このとき$\Theta$のtree classは$A_\infty$であり，$Z_M$は$\Theta$の端に位置する．

これからモジュラー表現のAuslander-Reiten quiverと比較しながら，整数表現のAuslander-Reiten quiverについて上の定理から導かれる系をいくつか述べたい．

$\mathbf{Z}A_\infty$型の連結成分の個数について，モジュラー表現の場合にK. Erdmannは次を示した．

**定理**(Erdmann[E2])　群多元環$kG$のブロック$B$がwild表現型ならば，$B$のAuslander-Reiten quiverには$\mathbf{Z}A_\infty$型の連結成分が無限個存在する．

整数表現の場合にも同様なことが言える．実際，もし整群環$\mathcal{O}G$のブロック$B$の不足群が巡回群でもKleinの4群でもなければ，群多元環$kG$のブロック$B/\pi B$には無限個の（互いに非同型な）直既約$kG$-加群が属し，且つそれらの$\Omega$-軌道も無限個存在する（ここで$\Omega$はHeller作用素）．従って先の命題から，$B$には互いに非同型で直既約なHeller $\mathcal{O}G$-格子が無限個存在し且つそれらの$\Omega$-軌道も無限個存在する．整群環のAuslander-Reiten translationが$\Omega$に一致することから次の事実が導かれる．

**系 1** ([K4, Corollary]) $p$-モジュラー系 $(K, \mathcal{O}, k)$ が条件（#）をみたし，整群環 $\mathcal{O}G$ のブロック $B$ の不足群が巡回群でも Klein の 4 群でもなければ，$B$ の Auslander-Reiten quiver には $\mathbf{Z}A_\infty$ 型の連結成分が無限個存在する．

実は，P.J. Webb の仕事により，群環の連結成分の tree class として現れる可能性のある図形は限定されていた．即ち，

**定理** (Webb[We]) 群環 $RG$ のブロック $B$ の不足群は巡回群でないとする．また $k$ は代数的閉体とする．このとき，$B$ の Auslander-Reiten quiver の連結成分の tree class は $A_\infty$，$D_\infty$，$A_\infty^\infty$ かまたは Euclidean 図形のいずれかである．

すでに前述した通り，K. Erdmann の定理からモジュラー表現の場合（$k$ は代数的閉体）は，群多元環 $kG$ の wild 表現型のブロックの Auslander-Reiten quiver の連結成分の tree class は $A_\infty$ のみである．整群環 $\mathcal{O}G$ の無限表現型のブロックについては，Euclidean 図形が排除できる．

**系 2** ([K4, Corollary 5.6]) $p$-モジュラー系 $(K, \mathcal{O}, k)$ が条件（#）をみたしているとき，整群環 $\mathcal{O}G$ の無限表現型のブロック $B$ の Auslander-Reiten quiver の連結成分 $\Theta$ の tree class は $A_\infty$，$D_\infty$，$A_\infty^\infty$ のどれかである．

証明 $\Theta$ が射影的な $\mathcal{O}G$-格子を含まないときは [We, Theorem A] から主張が言える．$\Theta$ が射影的な $\mathcal{O}G$-格子 $P$ を含めばその根基 $\mathrm{Rad}(P)$ も $\Theta$ に含まれ（埋込 $\mathrm{Rad}(P) \hookrightarrow P$ は既約写像なので），定理 2 から $\Theta$ の tree class は $A_\infty$ である． □

最後に，射影加群の根基の Auslander-Reiten quiver の中における位置に関する注意をしておきたい．モジュラー表現の場合には，群多元環 $kG$ の wild ブロックに属する射影的直既約 $kG$-加群の根基で，$\mathbf{Z}A_\infty$ 型の連結成分の端に位置しないようなものの例が存在する [KMU, Section 4].

しかし整数表現の場合には，$p$-モジュラー系 $(K, \mathcal{O}, k)$ が条件（#）をみたしていれば，整群環 $\mathcal{O}G$ の wild ブロックに属する射影的直既約 $\mathcal{O}G$-加群の根基は（Heller 格子なので定理 2 から）$\mathbf{Z}A_\infty$ 型か半無限 tube 型の連結成分の端に位置する．ただし，$p$-モジュラー系 $(K, \mathcal{O}, k)$ が条件（#）をみたしていないときには，$\mathbf{Z}A_\infty$ 型の連結成分の端に位置しないこともある．例えば $G = C_p \times C_p$（$p$ は奇数）で $\varphi(p) = 1$ のとき自明な格子 $\mathcal{O}_G$ と根基 $\mathrm{Rad}(\mathcal{O}G)$ は同じ連結成分（$\mathbf{Z}A_\infty$ 型）に属していて，$\mathcal{O}_G$ は連結成分の端に位置し，$\mathrm{Rad}(\mathcal{O}G)$ は端から 2 番目の行に位置している.（実はこのとき $\mathcal{O}_G$ で終わる almost split 列の中間項が $\mathrm{Rad}(\mathcal{O}G)$ である [K2, Proposition 3.6, Remark 2.4].）

## 参考文献


[ARS] Auslander, M., Reiten, I. and Smalø, S.: Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Studies in Advanced Math. 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[B] Benson, D. J.: Representations and cohomology I, Cambridge Studies in Advanced Math. 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[D1] Dieterich, E.: *Group rings of wild representation type*, Math. Ann. **266**(1983), 1–22.

[D2] Dieterich, E.: *Construction of Auslander-Reiten quivers for a class of group rings*, Math. Z. **184**(1983), 43–60.

[D3] Dieterich, E.: *Representation types of group rings over complete discrete valuation rings II*, In: Orders and their Applications (Oberwolfach, 1984), pp. 112–125, Lecture Notes in Math. 1142, Springer, Berlin, 1985.

[E1] Erdmann, K.: Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Note in Math. 1428, Springer, Berlin/New York, 1990.

[E2] Erdmann, K.: *On Auslander-Reiten components for wild blocks*, In: Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebras (Bielefeld 1991), pp. 371–387, Progress in Math. 95, Birkhäuser, Basel, 1991.

[E3] Erdmann, K.: *On Auslander-Reiten components for group algebras*, J. Pure Appl. Algebra **104**(1995), 149–160.

[IK] Inoue, T. and Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and trivial modules for integral group rings of p-groups*, J. Algebra **203**(1998), 374–384.

[K1] Kawata, S.: *On standard Auslander-Reiten sequences for finite groups*, Arch. Math. **75**(2000), 92–97.

[K2] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and projective lattices of p-groups*, Osaka J. Math. **38**(2001), 487–499.

[K3] Kawata, S.: *On Heller lattices over ramified extended orders*, J. Pure Appl. Algebra **202**(2005), 55–71.

[K4] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and Heller lattices for integral group rings*, Algebr. Represent. Theory **9**(2006), 513–524.

[KMU] Kawata, S., Michler, G.O. and Uno, K.: *On Auslander-Reiten components and simple modules for finite groups of Lie type*, Osaka J. Math. **38**(2001), 21–26.

[NT] 永尾汎, 津島行男: 有限群の表現, 裳華房, 1987.

[We] Webb, P.J.: *The Auslander-Reiten quiver of a finite group*, Math. Z. **179**(1982), 97–121.

[Wi1] Wiedemann, A.: *The Auslander-Reiten graph of integral blocks with cyclic defect two and their integral representations*, Math. Z. **179**(1982), 407–430.

[Wi2] Wiedemann, A.: *On the preprojectivity of the radical of local Gorenstein orders and algebras*, Comm. Algebra **12**(1984), 3053–3069.

[Wi3] Wiedemann, A.: *A remark on the structure of the Auslander-Reiten quiver of orders, blocks with cyclic defect two and the Dynkin diagram* $\mathbb{E}_6$, Arch. Math. **45**(1985), 211–218.