数理解析研究所講究録
第 1566 巻 2007 年 132-137

Navier-Stokes方程式のための時間刻み2次精度特性曲線有限要素スキーム -圧力項の離散化について-

九州大学・大学院数理学研究院
野津 裕史 (Hirofumi Notsu)* 田端 正久 (Masahisa Tabata)†
Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 はじめに

$\Omega \subset \mathbf{R}^d (d=2,3)$ を有界領域, $\Gamma \equiv \partial\Omega$ とし T を正定数とする. 非定常 Navier-Stokes 方程式で支配される未知関数 $(u,p):\Omega \times (0,T) \to \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ を求める問題;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \nabla(2\nu D(u)) + \nabla p = f & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u = g & \text{on } \Gamma \times (0,T), \\ u = u^0 & \text{in } \Omega, \text{ at } t=0 \end{cases} \tag{1}$$

を考える. ここに u は流速, p は圧力, f は外力, g は境界での流速, u^0 は初期流速, $\nu(>0)$ は粘性係数, $D(u)$ は変形速度テンソル

$$D_{ij}(u) \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

である. 記号 $_{,i}$ は偏微分 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ を表す.

我々は, すでに (1) のための時間刻み 2 次精度特性曲線有限要素スキームを開発した [1]. 本稿ではこのスキームに加えて, 圧力項の離散化方法を変化させた 2 つのスキームを与え, 計 3 つのスキームの数値的収束精度と安定性を考察する. これらは全て, 時間刻み 2 次精度, 対称行列である.

2 時間刻み 2 次精度特性曲線有限要素スキーム (3 種類)

時間刻み幅 Δt, $\Delta t'$ と関数 u, $v:\Omega \to \mathbf{R}^d$ に対して,

$$X_1(u,\Delta t)(x) \equiv x - u(x)\Delta t,$$

*E-mail: notsu@math.kyushu-u.ac.jp
†E-mail: tabata@math.kyushu-u.ac.jp

$$X_2(u,v,\Delta t',\Delta t)(x) \equiv x - \Big\{\big(1+\tfrac{\Delta t'}{2\Delta t}\big)u(x-u(x)\Delta t') - \tfrac{\Delta t'}{2\Delta t}v(x-u(x)(\Delta t'+\Delta t))\Big\}\Delta t'$$

とする．X_i は i 次近似上流点である．

$\mathcal{T}_h = \{K\}$ を Ω の三角形（四面体）分割とする．近似領域を

$$\Omega_h \equiv \mathrm{int} \bigcup \{K;\ K \in \mathcal{T}_h\}$$

とし $\Gamma_h \equiv \partial\Omega_h$ とする．Δt を時間刻み，$N_0 \in \mathbb{N}$，$N_T \equiv [T/\Delta t]$，$t^n \equiv n\Delta t$ とする．$\alpha \equiv 1/N_0$，$\Delta t_0 \equiv (1-\alpha)\Delta t$，$\Delta t_1 \equiv \alpha\Delta t$ とおく．これらは $\Delta t_0 + \Delta t_1 = \Delta t$ を満たす．一般に $\Omega \times (0,T)$ 上で定義された関数 ϕ に対して $\phi^n(\cdot) \equiv \phi(\cdot, t^n)$ とする．記号 $\circ$ は関数の合成

$$(\phi^n \circ X)(x) \equiv \phi^n(X(x))$$

を意味する．有限要素空間 $V_h(g)$，Q_h を

$$\begin{aligned} V_h(g) &\equiv \Big\{v_h \in C(\overline{\Omega}_h)^d;\ v_h|_K \in P_2(K)^d,\ {}^\forall K,\ v_h(P) = g(P)(\text{節点 } P \in \Gamma_h)\Big\},\\ Q_h &\equiv \Big\{q_h \in C(\overline{\Omega}_h);\ q_h|_K \in P_1(K),\ {}^\forall K,\ \textstyle\int_{\Omega_h} q_h\, dx = 0\Big\} \end{aligned}$$

で定義し $V_h \equiv V_h(0)$ とする．Π_h を補間作用素とし，$f_h \equiv \Pi_h f$ とする．同じ記号 $(\cdot,\cdot)$ で，スカラー値とベクトル値関数の $L^2(\Omega_h)$ 内積を表す．

(1) に対する時間刻み２次精度特性曲線有限要素スキーム;

<一般ステップ>

$$\left\{\begin{array}{ll} \left(\dfrac{u_h^{n-\alpha} - u_h^{n-1} \circ X_2(u_h^{n-1}, u_h^{n-2}, \Delta t_0, \Delta t)}{\Delta t_0}, v_h\right) & \\ +\nu\left(D(u_h^{n-\alpha}) + D(u_h^{n-1}) \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t_0), D(v_h)\right) + \nu\Delta t_0 \displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{d} \left(D_{ij}(u_h^{n-1}) u_{hk,j}^{n-1}, v_{hi,k}\right) & \\ -\dfrac{1}{2}\Big\{(\nabla\cdot v_h, p_h^{n-\alpha}) \underline{-(\nabla p_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t_0), v_h)}\Big\} & \\ = \dfrac{1}{2}\left(f_h^{n-\alpha} + f_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t_0), v_h\right) & {}^\forall v_h \in V_h, \\ (\nabla\cdot u_h^{n-\alpha}, q_h) = 0 & {}^\forall q_h \in Q_h, \end{array}\right. \tag{2a}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{u_h^n - u_h^{n-\alpha} \circ X_1(u_h^{n-\alpha}, \Delta t_1)}{\Delta t_1}, v_h\right) + 2\nu(D(u_h^n), D(v_h)) - (\nabla\cdot v_h, p_h^n) = (f_h^n, v_h) \\ \hfill {}^\forall v_h \in V_h, \\ (\nabla\cdot u_h^n, q_h) = 0 \hfill {}^\forall q_h \in Q_h, \end{array}\right. \tag{2b}$$

$(n = 2, \cdots, N_T)$,

< (u_h^1, p_h^1) を求めるステップ>

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{u_h^{m\alpha} - u_h^{(m-1)\alpha} \circ X_1(u_h^{(m-1)\alpha}, \Delta t_1)}{\Delta t_1}, v_h\right) + 2\nu(D(u_h^{m\alpha}), D(v_h)) & \\
\qquad\qquad - (\nabla \cdot v_h, p_h^{m\alpha}) = (f_h^{m\alpha}, v_h) & {}^\forall v_h \in V_h, \\
(\nabla \cdot u_h^{m\alpha}, q_h) = 0 & {}^\forall q_h \in Q_h, \\
u_h^0 = \Pi_h u^0, & \\
& (m = 1, \cdots, N_0)
\end{cases}
\tag{2c}
$$

で $(u_h^{n-\alpha}, p_h^{n-\alpha}) \in V_h(g^{n-\alpha}) \times Q_h$, $(u_h^n, p_h^n) \in V_h(g^n) \times Q_h$ $(n = 2, \cdots, N_T)$ および $(u_h^{m\alpha}, p_h^{m\alpha}) \in V_h(g^{m\alpha}) \times Q_h$ $(m = 1, \cdots, N_0)$ を求める. 一般ステップのアルゴリズムは, 2 次精度スキーム (2a) で $(u_h^{n-\alpha}, p_h^{n-\alpha}) \in V_h(g^{n-\alpha}) \times Q_h$ を求めたあと, 1 次精度特性曲線有限要素スキーム [2] である (2b) により $(u_h^n, p_h^n) \in V_h(g^n) \times Q_h$ を求める (図 1).

$$
\cdots \rightarrow \begin{pmatrix} u_h^{n-1} \\ p_h^{n-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\Delta t_0 = O(\Delta t)]{\text{2 次精度}} \begin{pmatrix} u_h^{n-\alpha} \\ p_h^{n-\alpha} \end{pmatrix} \xrightarrow[\Delta t_1 = O(\Delta t^2)]{\text{1 次精度}} \begin{pmatrix} u_h^{n} \\ p_h^{n} \end{pmatrix} \rightarrow \cdots
$$

図 1: スキームの時間発展

ただし, (u_h^1, p_h^1) は (2c) で求める. (2a) が Δt_0 について 2 次精度, (2b), (2c) が Δt_1 について 1 次精度のスキームである. $\Delta t_0 = O(\Delta t)$, $\Delta t_1 = O(\Delta t^2)$ と定めれば, スキーム (2) は全体として Δt について 2 次精度となる. このスキームをスキーム 1 とする. スキーム 2, 3 を, (2a) の下線部をそれぞれ

$$
+ \left(\nabla \cdot v_h, p_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t_0)\right) - \Delta t_0 \sum_{i,j=1}^{d} (p_{h,j}^{n-1} u_{hj,i}^{n-1}, v_{hi}),
$$

$$
+ \left(\nabla \cdot v_h, p_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t_0)\right) + \Delta t_0 \sum_{i,j=1}^{d} (p_h^{n-1} u_{hj,i}^{n-1}, v_{hi,j})
$$

と変更したスキームとする. スキーム 2, 3 はともにスキーム 1 と同じ精度である. 以下, スキーム 1, 2, 3 を S1, S2, S3 と表す.

3 数値計算結果

$N \in \mathbf{N}$ に対して, $\Delta t \equiv 1/N$, $N_0 \equiv N + 1$ とする. このとき

$$
\Delta t = \frac{1}{N}, \quad \Delta t_0 = \frac{1}{N+1}, \quad \Delta t_1 = \frac{1}{N(N+1)} \tag{3}
$$

であり, $N \to +\infty$ のとき $\Delta t_0 = O(\Delta t)$, $\Delta t_1 = O(\Delta t^2)$ となるため, S1, S2, S3 は Δt について 2 次精度である. X_1, X_2 を含む合成関数から必要とされる数値積分には注意を要することが知られている [3]. 我々は各三角形に 5 次の数値積分公式 [4] を用いた. 厳密解への収束精度および安定性を以下の問題で調べる.

問題 1. (1) において $\Omega = (-0.5, 0.5)^2$, $T = 1$ とし, ν は5つの値

$$\nu = 1,\ 10^{-1},\ 10^{-2},\ 10^{-3},\ 10^{-4}$$

を与え, 厳密解が

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, t) = & -4\sin^2(2\pi t)\cos^4(\pi x_1)\cos^3(\pi x_2)\sin(\pi x_2), \\ u_2(x_1, x_2, t) = & 4\sin^2(2\pi t)\cos^3(\pi x_1)\cos^4(\pi x_2)\sin(\pi x_1), \\ p(x_1, x_2, t) = & \sin(2\pi(t + x_1 + x_2)). \end{cases}$$

となるように f, g, u^0 を与えた.

関数列 $\{\phi^n\}_{n=1}^{N_T} \subset X(= H^1(\Omega)^2,\ L^2(\Omega))$ に対して, ノルム $\|\phi\|_{l^2(X)}$ を

$$\|\phi\|_{l^2(X)} \equiv \left\{ \Delta t \sum_{n=1}^{N_T} \|\phi^n\|_X^2 \right\}^{1/2}$$

で定義する. メッシュ生成には FreeFEM [5] を用い, ほぼ一様なメッシュを作成した. 図2はメッシュ例である.

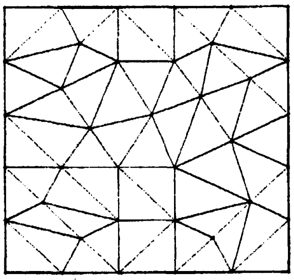

図 2: メッシュ例 ($N_\Omega = 5$)

ここに N_Ω は Ω の一辺の分割数である. 誤差として Err を

$$Err \equiv \frac{\|\Pi_h u - u_h\|_{l^2(H^1(\Omega)^2)} + \|\Pi_h p - p_h\|_{l^2(L^2(\Omega))}}{\|\Pi_h u\|_{l^2(H^1(\Omega)^2)} + \|\Pi_h p\|_{l^2(L^2(\Omega))}}$$

で定義する. $h \equiv 1/N_\Omega$ とする. 各メッシュに対して $N = N_\Omega$ とした. このとき, $\Delta t = h$ である. 図3は $N_\Omega = 32,\ 40,\ 48,\ 56$ のときの Δt と Err の両対数グラフである. 5つの折れ線は下から, $\nu = 1,\ 10^{-1},\ 10^{-2},\ 10^{-3},\ 10^{-4}$ の結果を表している. S3の $\nu = 10^{-3},\ 10^{-4}$ のときの折れ線がないのは, $t = T$ までに計算が破綻したためである. S3では $\nu = 10^{-3},\ 10^{-4}$ のときに発散したが, それ以外ではS1, S2, S3は概ね精度2が数値計算結果に現れている. 一番右の1次精度特性曲線有限要素スキームの結果と比較して精度がよいことがわかる.

問題 2 (合法キャビティ流れ). (1) において $\Omega = (0, 1)^2$, $T = 50$ とし, ν は3つの値,

$$\nu = 10^{-2},\ \ 10^{-3},\ \ 2 \times 10^{-4}$$

を与え,

$$g_1(x_1, x_2, t) = \begin{cases} 16x_1^2(1 - x_1)^2 & (x_2 = 1), \\ 0 & (x_2 \neq 1), \end{cases}$$

$g_2 = 0$, $f = 0$ とした. u^0 は各メッシュでの定常Stokes方程式の有限要素解とした.

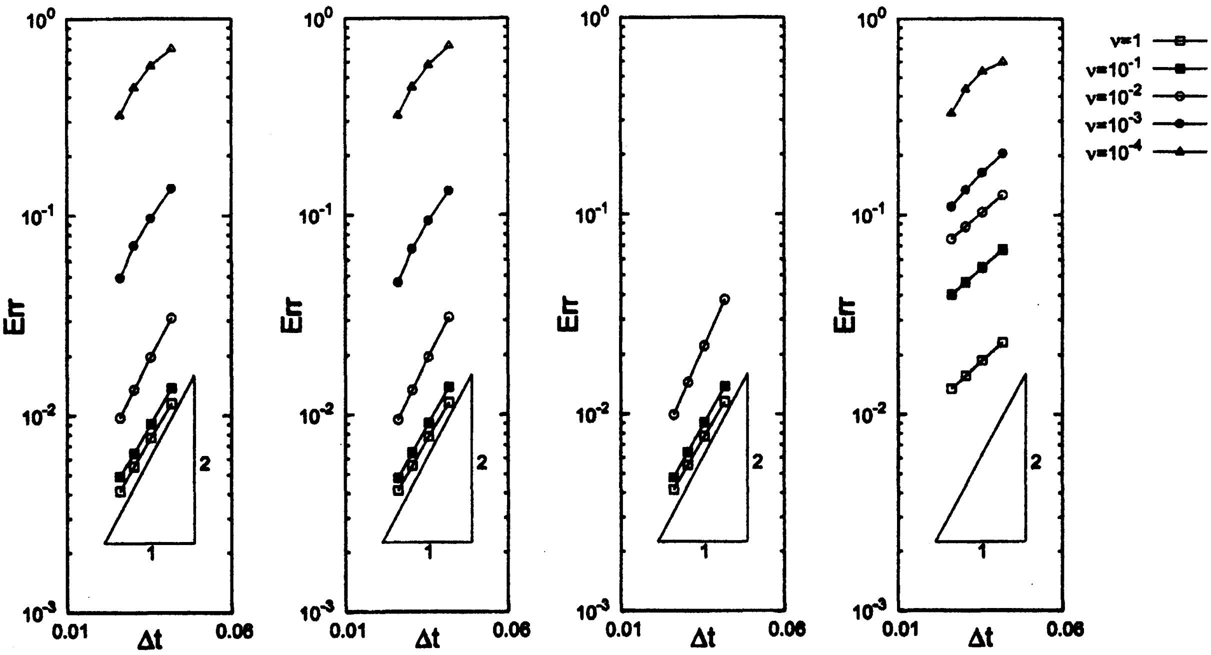

図 3: 問題 1 の Δt と Err の両対数グラフ (左から S1, S2, S3, 1 次精度スキーム)

レイノルズ数 Re $(\equiv \nu^{-1})$ はそれぞれ $Re = 100,\ 1{,}000,\ 5{,}000$ となる. 以下 ν の代わりに Re を用いる. 境界層を考慮して, 境界付近で細かく分割された非一様な 3 つのメッシュを用いた (図 4).

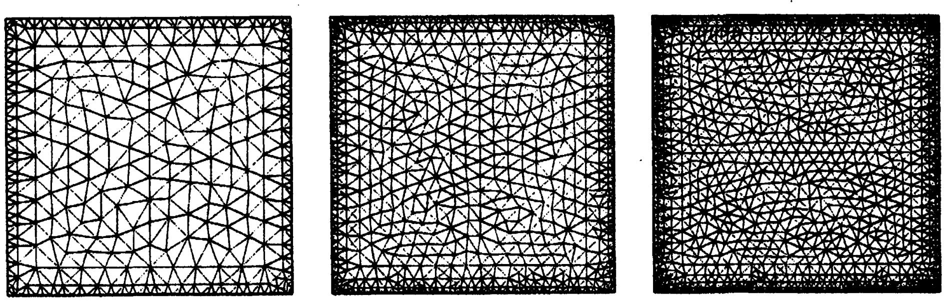

図 4: メッシュ (左から $N_\Omega = 40,\ 60,\ 80$)

各 Re に対して $N_\Omega = 40,\ 60,\ 80$, $N = 10,\ 20,\ 40$ の計 9 通りの計算を行い, 安定性を調べた. $Re = 100$ のとき S1, S2, S3 は 9 通りすべて安定に計算できたが, Re が高くなるにつれ発散する場合が現れ, S1, S2, S3 の順に安定性の高い結果となった. 図 5 は $N_\Omega = 80$, $\Delta t = 1/40$, 時刻 $t = T$ における流線図であり, 流れの特徴を捉えた解が得られている.

4 結び

[1] のスキーム (S1) に加えて, 圧力項の離散化を変化させた 2 つの Navier-Stokes 方程式のための時間刻み 2 次精度特性曲線有限要素スキーム (S2, S3) を与えた. その 3 種類のスキームを用いて数値計算を行った. テスト問題 (問題 1) において S1, S2, S3 ともに厳密解

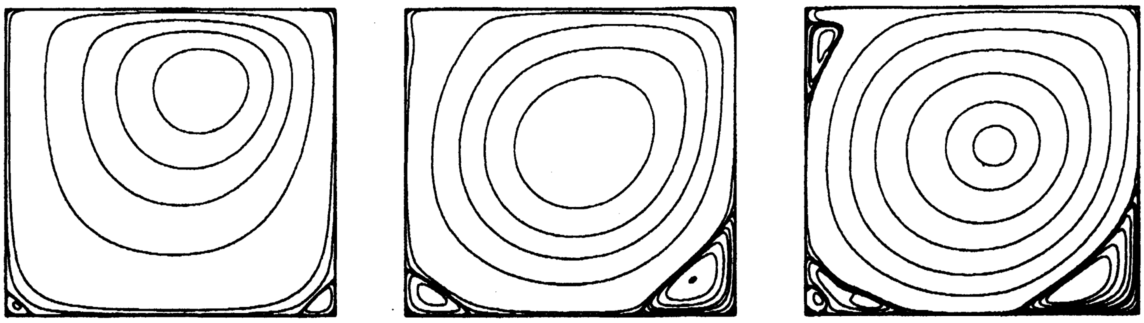

図 5: 時刻 $t = T$ での問題 2 の流線図 (左から $Re = 100,\ 1{,}000,\ 5{,}000$)

への収束精度が概ね $O(\Delta t^2)$ であった. 合法キャビティ流れ問題 (問題 2) の数値計算を行い, S1, S2, S3 の順に安定性の高い結果が得られた.

参考文献

[1] 野津裕史, 田端正久, Navier-Stokes 方程式のための 2 次精度特性曲線有限要素スキームとその数値計算, 第 20 回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (2006), E5-3.

[2] O. Pironneau, Finite Element Methods for Fluids. John Wiley & Sons, Chichester, 1989.

[3] M. Tabata and S. Fujima, Robustness of a characteristic finite element scheme of second order in time increment, In C. Groth and D. W. Zingg, editors, Computational Fluid Dynamics 2004, Springer, 177-182, 2006.

[4] A. H. Stroud, Approximate calculation of multiple integrals, Prentice-Hall, 1971.

[5] FreeFEM, http://www.freefem.org/.