数理解析研究所講究録
第 1581 巻 2008 年 109-120

The Chow ring of the moduli space Of bundlels on P2 with charge 1

琉球大学・理学部　神山靖彦(Yasuhiko Kamiyama)
手塚康誠(Michishige Tezuka)
Department of mathematical sciences
University of Ryukyu

§ 1

Kを標数2でない代数閉体とする。$OM(1,SO(n,K))$をCP²上構造群SO(n,K) の主バンドルで1次Pontryagin indexが1、$l_\infty \subset CP^2$ に制限したときに、自明なもののなすモジュライ空間とすると、[18]の行列表示を適用することで、

Proposition1.1

$$OM(1,SO(n,K)) \simeq \mathbf{A}^2 \times X_n.$$

$$X_n = SO(n,K)/(SO(n-4,K) \times SL(2,K)) \cdot P_u,$$

を得る。これから、Grothendiekの公式[3]を適用することで、Chow環に対しては、

$$CH^{\cdot}(OM(1,SO(n,K))) \simeq CH^{\cdot}(X_n).$$

また、射影多様体$Y_n = SO(n,K)/(SO(n-4,K) \times GL(2,K)) \cdot P_u$を考えると、主バンドル　$\mathbf{G}_m \to X_n \xrightarrow{\pi} Y_n.$　を得る。そこで同伴バンドルを考えて、Y_nをX_nの0－sectionと同一視することで、再び

$\tilde{X}_n = X_n \times_{\mathbf{G}_m} \mathbf{A}^1$ Grothendieckの公式[3], [10]を適用して、

Lemma 1.2

完全列

$$CH^{\cdot}(Y_n) \xrightarrow{c_1} CH^{\cdot}(Y_n) \xrightarrow{\pi^*} CH^{\cdot}(X_n) \to 0.$$

を得る。

Y_nに関しては、$CH^*(Y_n) \cong H^*(Y_n, Z)$となり、位相幾何の手法が使える。一般にGを代数群、Pを極大放物群としたときG/PのChow環はSchubert calculusとして研究されてきた[1]。又、位相的方法では、Borel、戸田、等により研究されてきた。中川氏の論説を参考。Y_nに対しては[15],[16]により研究されていて、Young図形を用いて、結果が述べられている。これから$CH^*(Y_n)$の結果を述べるが、Schubert calculusとどの様に対応しているかが次の問題であると思う。

§2

Y_nのChow環のアーベル群としての構造を述べ、合わせて§3の表を見るのに必要なことを書く。まずアーベル群としての構造は自由加群になっていることがShubertセルに分解できることから知られている。

Theorem 2.1

(1) *For* $n = 2m$,
$$CH^\cdot(Y_n) \otimes \mathbf{Z}/2 \simeq \mathbf{Z}/2[c_1, c_2]/(b_{m-1}, c_2 b_{m-2}) \otimes \Delta(v_{2m-4}, v_{2m-2}).$$
(2) *For* $n = 2m+1$,
$$CH^\cdot(Y_n) \otimes \mathbf{Z}/2 \simeq \mathbf{Z}/2[c_1, c_2]/(b_{m-1}, c_2 b_{m-2}) \otimes \Delta(v_{2m-2}, v_{2m}),$$

ここで、c_1、c_2、b_i、v_iの次数はそれぞれ、1、2、i、i/2である。これから、$CH(Y_n)$のring generatorは、c_1、c_2、b_i、v_iであることがわかる。

Lemma 2.2

$$CH^\cdot(Y_n) \otimes \mathbb{Z}/2 = \left(\bigoplus_{i=0}^{m-2} \mathbf{Z}[c_1]/(c_1^{m-1-i})\{c_2^i\}\right) \otimes B_n \otimes \mathbb{Z}/2,$$

$$B_n = \begin{cases} \Delta_{\mathbf{Z}}(v_{2m-4}, v_{2m-2}) & n = 2m \\ \Delta_{\mathbf{Z}}(v_{2m-2}, v_{2m}) & n = 2m+1. \end{cases}$$

このLemmaから、$CH^*(Y_n)_{(2)}$の加群としての構造がわかる。次に環構造は以下の方針で示していく。初めに

$CH^*(Y_n)$ のZ-自由加群としての基底を求める。それを使って$CH^*(Y_n)\otimes Z/2$の環構造から$CH^*(Y_n)$の環構造を求めていく。結果は$CH^*(Y_n)_{(2)}$として記述されているが最後に注意する(Remark 3.5)により$CH\ (Y_n)$に書き換えることができる。

§3 Tables of the ring structure of $CH^{\cdot}(Y_n)$

3 .1. Notations. (i) For $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, we define b_k and $d_k \in \mathbb{Z}[c_1, c_2]$ as follows:

$$b_k = (-1)^k \sum_{\mu=0}^{[\frac{k}{2}]} (-1)^{\mu} \binom{k-\mu}{\mu} c_1^{k-2\mu} c_2^{\mu}$$

and

$$d_k = (-1)^k \sum_{\mu=0}^{k} (-1)^{\mu} \binom{2k-\mu+1}{\mu} c_1^{2k-2\mu} c_2^{\mu}.$$

(ii) For $g \in \mathbb{N}$ and $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$, we define $a_{g,\mu} \in \mathbb{Z}$ by

$$a_{g,\mu} = \begin{cases} (-1)^{1+\mu} \frac{g}{\mu} \binom{g-1-\mu}{\mu-1} & \mu \geq 1 \\ -1 & \mu = 0 \\ 0 & \mu = -1. \end{cases}$$

Then the integers $a_{g,\mu}$ are characterized by

$$(1+x)^g = 1 + x^g + \sum_{\mu=1}^{[\frac{g}{2}]} a_{g,\mu} x^{\mu} (1+x)^{g-2\mu}.$$

3 .2. An integral basis of $CH^{\cdot}(Y_n)$. In the following (I) and (II), we give an integral basis of $CH^{\cdot}(Y_n)$. The notations are explained as follows: Let S_n be the set of the monomial basis of A_n in (2.2). Let T be a subset of S_n. Then for an element $\xi \in T$, $\langle \xi \rangle$ (resp. $\langle \xi \rangle'$) is defined to be the right-hand side of an equation (1)-(8) below. We consider a set

$$\left\{ \frac{\langle \xi \rangle}{l_\xi} : \xi \in T \right\} \cup \{ \eta : \eta \in S_n - T \},$$

where $l_\xi \in \mathbb{N}$. Following this procedure, we obtain an integral basis of $CH^{\cdot}(Y_n)$. We abbreviate this basis as $\left\{ \frac{\langle \xi \rangle}{l_\xi} : \xi \in T \right\}$.

(I) The case $n = 2m$.

(i) For even m,

$$\left\{ \frac{\langle c_1^{2i+1} c_2 v_{2m-4} v_{2m-2} \rangle}{2i+3}, \frac{\langle c_1^{m-2j-3} c_2^{2j+1} v_{2m-4} v_{2m-2} \rangle}{m-2j-1} : 0 \leq i \leq \frac{m}{2} - 2, 1 \leq j \leq \frac{m}{2} - 2 \right\}.$$

(ii) For odd m,

$$\left\{\frac{\langle c_1^{2i+1}c_2v_{2m-4}v_{2m-2}\rangle'}{2i+3}, \frac{\langle c_1^{m-2j-2}c_2^{2j}v_{2m-4}v_{2m-2}\rangle'}{m-2j} : 0 \le i \le \frac{m-5}{2}, 1 \le j \le \frac{m-3}{2}\right\}.$$

(II) The case $n = 2m+1$.

(iii) For even m,

$$\left\{\frac{\langle c_1^{2i+1}c_2v_{2m-2}v_{2m}\rangle}{2i+3}, \frac{\langle c_1^{m-2j-3}c_2^{2j+1}v_{2m-2}v_{2m}\rangle}{m-2j-1} : 0 \le i \le \frac{m}{2}-2, 1 \le j \le \frac{m}{2}-2\right\}.$$

(iv) For odd m,

$$\left\{\frac{\langle c_1^{2i+1}v_{2m-2}v_{2m}\rangle}{2i+3}, \frac{\langle c_1^{m-2j-2}c_2^{2j}v_{2m-2}v_{2m}\rangle}{m-2j} : 0 \le i \le \frac{m-3}{2}, 1 \le j \le \frac{m-3}{2}\right\}.$$

Here $\langle\quad\rangle$ and $\langle\quad\rangle'$ are defined as follows:

(1)

$$\langle c_1^{2i+1}c_2v_{2m-4}v_{2m-2}\rangle = c_1^{2i+1}c_2v_{2m-4}v_{2m-2} + (-1)^{\frac{m+2i+2}{2}}\frac{(-1)^i(2i+3)+1}{2}c_2^{2i+4}d_{\frac{m-2i-6}{2}}v_{2m-4}$$
$$-\sum_{\mu=1}^{i} a_{2i+3,\mu}c_1^{2i+1-2\mu}c_2^{1+\mu}v_{2m-4}v_{2m-2}.$$

(2)

$$\langle c_1^{m-2j-3}c_2^{2j+1}v_{2m-4}v_{2m-2}\rangle = c_1^{m-2j-3}c_2^{2j+1}v_{2m-4}v_{2m-2}$$
$$-\sum_{\mu=1}^{\frac{m-2j-4}{2}} a_{m-2j-1,\mu}c_1^{m-2j-3-2\mu}c_2^{2j+1+\mu}v_{2m-4}v_{2m-2}.$$

(3)

$$\langle c_1^{2i+1}c_2v_{2m-4}v_{2m-2}\rangle' = c_1^{2i+1}c_2v_{2m-4}v_{2m-2} + (-1)^{\frac{m+2i+1}{2}}\frac{(-1)^i(2i+3)+1}{2}c_2^{2i+3}d_{\frac{m-2i-5}{2}}v_{2m-2}$$
$$-\sum_{\mu=1}^{i} a_{2i+3,\mu}c_1^{2i+1-2\mu}c_2^{1+\mu}v_{2m-4}v_{2m-2}.$$

(4)

$$\langle c_1^{m-2j-2}c_2^{2j}v_{2m-4}v_{2m-2}\rangle' = c_1^{m-2j-2}c_2^{2j}v_{2m-4}v_{2m-2}$$
$$-\sum_{\mu=1}^{\frac{m-2j-3}{2}} a_{m-2j,\mu}c_1^{m-2j-2-2\mu}c_2^{2j+\mu}v_{2m-4}v_{2m-2}.$$

(5)

$$\langle c_1^{2i+1} c_2 v_{2m-2} v_{2m} \rangle = c_1^{2i+1} c_2 v_{2m-2} v_{2m} + (-1)^{\frac{m+2i+2}{2}} \frac{(-1)^i(2i+3)+1}{2} c_2^{2i+4} d_{\frac{m-2i-6}{2}} v_{2m}$$
$$- \sum_{\mu=1}^{i} a_{2i+3,\mu} c_1^{2i+1-2\mu} c_2^{1+\mu} v_{2m-2} v_{2m}.$$

(6)

$$\langle c_1^{m-2j-3} c_2^{2j+1} v_{2m-2} v_{2m} \rangle = c_1^{m-2j-3} c_2^{2j+1} v_{2m-2} v_{2m}$$
$$- \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2j-4}{2}} a_{m-2j-1,\mu} c_1^{m-2j-3-2\mu} c_2^{2j+1+\mu} v_{2m-2} v_{2m}.$$

(7)

$$\langle c_1^{2i+1} v_{2m-2} v_{2m} \rangle = c_1^{2i+1} v_{2m-2} v_{2m} + (-1)^{\frac{m+2i+3}{2}} \frac{(-1)^i(2i+3)+1}{2} c_2^{2i+3} d_{\frac{m-2i-5}{2}} v_{2m-2}$$
$$- \sum_{\mu=1}^{i} a_{2i+3,\mu} c_1^{2i+1-2\mu} c_2^{\mu} v_{2m-2} v_{2m}.$$

(8)

$$\langle c_1^{m-2j-2} c_2^{2j} v_{2m-2} v_{2m} \rangle = c_1^{m-2j-2} c_2^{2j} v_{2m-2} v_{2m}$$
$$- \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2j-3}{2}} a_{m-2j,\mu} c_1^{m-2j-2-2\mu} c_2^{2j+\mu} v_{2m-2} v_{2m}.$$

3.3. The ring structure of $CH^{\cdot}(Y_n)_{(2)}$ for $n = 2m$.

<table>
<tr><th></th><th>even m</th><th>odd m</th></tr>
<tr><td>c_1^{m-1}</td><td colspan="2">(1)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-k-1} c_2^k$ $(k \geq 1)$</td><td colspan="2">(2)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-1} v_{2m-4}$</td><td colspan="2">(3)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-2i-1} c_2^{2i} v_{2m-4}$ $(i \geq 1)$</td><td colspan="2">(4)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-2i-2} c_2^{2i+1} v_{2m-4}$ $(i \geq 0)$</td><td>(5)</td><td>(6)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-2i-1} c_2^{2i} v_{2m-2}$ $(i \geq 0)$</td><td>(7)</td><td>(8)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-2i-2} c_2^{2i+1} v_{2m-2}$ $(i \geq 0)$</td><td colspan="2">(9)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-2i-1} c_2^{2i} v_{2m-4} v_{2m-2}$ $(i \geq 0)$</td><td>(10)</td><td>(11)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-2i-2} c_2^{2i+1} v_{2m-4} v_{2m-2}$ $(i \geq 0)$</td><td>(12)</td><td>(13)</td></tr>
<tr><td>v_{2m-4}^2</td><td>(14)</td><td>(15)</td></tr>
<tr><td>v_{2m-2}^2</td><td>(16)</td><td>(17)</td></tr>
</table>

Here

$$(1) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{[\frac{m-1}{2}]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-1-\mu}{\mu} c_1^{m-1-2\mu} c_2^{\mu} \right\} + (-1)^{m+1} 2 v_{2m-2}.$$

$$(2) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{[\frac{m-k-1}{2}]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-k-1-\mu}{\mu} c_1^{m-k-1-2\mu} c_2^{k+\mu} \right\}$$
$$+ \left\{ (-1)^{m+k} 2 c_2 b_{k-1} \right\} v_{2m-4} + \left\{ (-1)^{m+k} 2 c_2 b_{k-2} \right\} v_{2m-2}.$$

$$(3) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{[\frac{m-1}{2}]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-1-\mu}{\mu} c_1^{m-1-2\mu} c_2^{\mu} \right\} v_{2m-4} + (-1)^{m+1} 2 v_{2m-4} v_{2m-2}.$$

$$(4) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{[\frac{m-2i-1}{2}]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-1-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-1-2\mu} c_2^{2i+\mu} \right\} v_{2m-4}$$
$$+ \left\{ (-1)^m 2 \sum_{\mu=0}^{i-1} a_{2i-1,\mu} c_1^{2i-2-2\mu} c_2^{1+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2}.$$

$$(5) = \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+2}{2}} \frac{4i}{2i+1} c_2^{2i+2} d_{\frac{m-2i-4}{2}} + \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}} a_{m-2i-1,\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-4}$$
$$+ \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-2} \left(a_{2i-1,\mu} + \frac{2i-1}{2i+1} a_{2i+1,1+\mu} \right) c_1^{2i-3-2\mu} c_2^{2+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2}.$$

$$(6) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-3}{2}} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-2-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-4}$$
$$+ \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+1}{2}} \frac{2}{2i+1} c_2^{2i+1} d_{\frac{m-2i-3}{2}} \right\} v_{2m-2}$$
$$- \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-2} \left(a_{2i-1,\mu} + \frac{2i-1}{2i+1} a_{2i+1,1+\mu} \right) c_1^{2i-3-2\mu} c_2^{2+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2}.$$

$$(7) = \left\{ (-1)^{\frac{m+2i}{2}} \frac{2}{2i+1} c_2^{2i+2} d_{\frac{m-2i-4}{2}} \right\} v_{2m-4}$$

$$+\left\{\sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}}(-1)^{1+\mu}\binom{m-2i-1-\mu}{\mu}c_1^{m-2i-1-2\mu}c_2^{2i+\mu}\right\}v_{2m-2}$$

$$+\left\{2\sum_{\mu=-1}^{i-2}\left(a_{2i-1,\mu}+\frac{2i-1}{2i+1}a_{2i+1,1+\mu}\right)c_1^{2i-3-2\mu}c_2^{2+\mu}\right\}v_{2m-4}v_{2m-2}.$$

$$(8)=\left\{(-1)^{\frac{m+2i+3}{2}}\frac{4i}{2i+1}c_2^{2i+1}d_{\frac{m-2i-3}{2}}+\sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-1}{2}}a_{m-2i,\mu}c_1^{m-2i-1-2\mu}c_2^{2i+\mu}\right\}v_{2m-2}$$

$$-\left\{2\sum_{\mu=-1}^{i-2}\left(a_{2i-1,\mu}+\frac{2i-1}{2i+1}a_{2i+1,1+\mu}\right)c_1^{2i-3-2\mu}c_2^{2+\mu}\right\}v_{2m-4}v_{2m-2}.$$

$$(9)=\left\{\sum_{\mu=1}^{[\frac{m-2i-2}{2}]}(-1)^{1+\mu}\binom{m-2i-2-\mu}{\mu}c_1^{m-2i-2-2\mu}c_2^{2i+1+\mu}\right\}v_{2m-2}$$

$$+\left\{(-1)^m 2\sum_{\mu=0}^{i}a_{2i+1,\mu}c_1^{2i-2\mu}c_2^{1+\mu}\right\}v_{2m-4}v_{2m-2}.$$

$$(10)=\left\{\sum_{\mu=0}^{\frac{m-2i-4}{2}}\left(\frac{m-2i+1}{m-2i-1}a_{m-2i-1,\mu}+a_{m-2i+1,1+\mu}\right)c_1^{m-2i-3-2\mu}c_2^{2i+1+\mu}\right\}v_{2m-4}v_{2m-2}.$$

$$(11)=\left\{\sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-1}{2}}a_{m-2i,\mu}c_1^{m-2i-1-2\mu}c_2^{2i+\mu}\right\}v_{2m-4}v_{2m-2}.$$

$$(12)=\left\{\sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}}a_{m-2i-1,\mu}c_1^{m-2i-2-2\mu}c_2^{2i+1+\mu}\right\}v_{2m-4}v_{2m-2}.$$

$$(13)=\left\{\sum_{\mu=0}^{\frac{m-2i-5}{2}}\left(\frac{m-2i}{m-2i-2}a_{m-2i-2,\mu}+a_{m-2i,1+\mu}\right)c_1^{m-2i-4-2\mu}c_2^{2i+2+\mu}\right\}v_{2m-4}v_{2m-2}.$$

$$(14)=(-1)^{\frac{m}{2}}d_{\frac{m-2}{2}}v_{2m-4}.$$

$$(15)=-b_{m-2}v_{2m-4}+(-1)^{\frac{m+3}{2}}d_{\frac{m-3}{2}}v_{2m-2}.$$

$$(16)=(-1)^{\frac{m+2}{2}}c_2^2 d_{\frac{m-4}{2}}v_{2m-4}.$$

$$(17)=(-1)^{\frac{m+1}{2}}c_2 d_{\frac{m-3}{2}}v_{2m-2}.$$

3.4. The ring structure of $CH^{\cdot}(Y_n)_{(2)}$ for $n = 2m+1$.

<table>
<tr><th></th><th>even m</th><th>odd m</th></tr>
<tr><td>c_1^{m-1}</td><td colspan="2">(i)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-k-1}c_2^k\ (k \geq 1)$</td><td colspan="2">(ii)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-2i-1}c_2^{2i}v_{2m-2}\ (i \geq 0)$</td><td>(iii)</td><td>(iv)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-2i-2}c_2^{2i+1}v_{2m-2}\ (i \geq 0)$</td><td colspan="2">(v)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-1}v_{2m}$</td><td colspan="2">(vi)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-2i-1}c_2^{2i}v_{2m}\ (i \geq 1)$</td><td colspan="2">(vii)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-2i-2}c_2^{2i+1}v_{2m}\ (i \geq 0)$</td><td>(viii)</td><td>(ix)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-2i-1}c_2^{2i}v_{2m-2}v_{2m}\ (i \geq 0)$</td><td>(x)</td><td>(xi)</td></tr>
<tr><td>$c_1^{m-2i-2}c_2^{2i+1}v_{2m-2}v_{2m}\ (i \geq 0)$</td><td>(xii)</td><td>(xiii)</td></tr>
<tr><td>v_{2m-2}^2</td><td>(xiv)</td><td>(xv)</td></tr>
<tr><td>v_{2m}^2</td><td>(xvi)</td><td>(xvii)</td></tr>
</table>

Here

$$(\mathrm{i}) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{[\frac{m-1}{2}]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-1-\mu}{\mu} c_1^{m-1-2\mu} c_2^{\mu} \right\} + (-1)^{m+1} 2 v_{2m-2}.$$

$$(\mathrm{ii}) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{[\frac{m-k-1}{2}]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-k-1-\mu}{\mu} c_1^{m-k-1-2\mu} c_2^{k+\mu} \right\}$$
$$+ \left\{(-1)^{m+k} 2 c_2 b_{k-2}\right\} v_{2m-2} + \left\{(-1)^{m+k+1} 2 b_{k-1}\right\} v_{2m}.$$

$$(\mathrm{iii}) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-1-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-1-2\mu} c_2^{2i+\mu} \right\} v_{2m-2}$$
$$+ \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+2}{2}} \frac{2}{2i-1} c_2^{2i} d_{\frac{m-2i-2}{2}} \right\} v_{2m}$$
$$- \left\{ 2 \sum_{\mu=0}^{i-1} \left(\frac{2i+1}{2i-1} a_{2i-1,-1+\mu} + a_{2i+1,\mu} \right) c_1^{2i-1-2\mu} c_2^{\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}.$$

$$(\mathrm{iv}) = \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+3}{2}} \frac{4i}{2i+1} c_2^{2i+1} d_{\frac{m-2i-3}{2}} + \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-1}{2}} a_{m-2i,\mu} c_1^{m-2i-1-2\mu} c_2^{2i+\mu} \right\} v_{2m-2}$$
$$+ \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-2} \left(a_{2i-1,\mu} + \frac{2i-1}{2i+1} a_{2i+1,1+\mu} \right) c_1^{2i-3-2\mu} c_2^{1+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}.$$

$$(\mathrm{v}) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{[\frac{m-2i-2}{2}]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-2-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-2}$$

$$+ \left\{ (-1)^{m+1} 2 \sum_{\mu=0}^{i} a_{2i+1,\mu} c_1^{2i-2\mu} c_2^{\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}.$$

$$(\mathrm{vi}) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{[\frac{m-1}{2}]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-1-\mu}{\mu} c_1^{m-1-2\mu} c_2^{\mu} \right\} v_{2m} + (-1)^{m+1} 2 v_{2m-2} v_{2m}.$$

$$(\mathrm{vii}) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{[\frac{m-2i-1}{2}]} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-1-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-1-2\mu} c_2^{2i+\mu} \right\} v_{2m}$$

$$+ \left\{ (-1)^{m} 2 \sum_{\mu=0}^{i-1} a_{2i-1,\mu} c_1^{2i-2-2\mu} c_2^{1+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}.$$

$$(\mathrm{viii}) = \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+2}{2}} \frac{4i}{2i+1} c_2^{2i+2} d_{\frac{m-2i-4}{2}} + \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}} a_{m-2i-1,\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m}$$

$$+ \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-2} \left(a_{2i-1,\mu} + \frac{2i-1}{2i+1} a_{2i+1,1+\mu} \right) c_1^{2i-3-2\mu} c_2^{2+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}.$$

$$(\mathrm{ix}) = \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+8}{2}} \frac{2}{2i+3} c_2^{2i+3} d_{\frac{m-2i-5}{2}} \right\} v_{2m-2}$$

$$+ \left\{ \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-3}{2}} (-1)^{1+\mu} \binom{m-2i-2-\mu}{\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m}$$

$$+ \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-1} \left(a_{2i+1,\mu} - a_{2i+1,1+\mu} + \frac{2i+1}{2i+3} a_{2i+3,1+\mu} \right) c_1^{2i-1-2\mu} c_2^{1+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}.$$

$$(\mathrm{x}) = \left\{ \sum_{\mu=0}^{\frac{m-2i-4}{2}} \left(\frac{m-2i+1}{m-2i-1} a_{m-2i-1,\mu} + a_{m-2i+1,1+\mu} \right) c_1^{m-2i-3-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}.$$

$$(\mathrm{xi}) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-1}{2}} a_{m-2i,\mu} c_1^{m-2i-1-2\mu} c_2^{2i+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}.$$

$$(\text{xii}) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}} a_{m-2i-1,\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}.$$

$$(\text{xiii}) = \left\{ \sum_{\mu=0}^{\frac{m-2i-5}{2}} \left(\frac{m-2i}{m-2i-2} a_{m-2i-2,\mu} + a_{m-2i,1+\mu} \right) c_1^{m-2i-4-2\mu} c_2^{2i+2+\mu} \right\} v_{2m-2} v_{2m}.$$

$$(\text{xiv}) = (-1)^{\frac{m+2}{2}} d_{\frac{m-2}{2}} v_{2m}.$$

$$(\text{xv}) = (-1)^{\frac{m+1}{2}} c_2 d_{\frac{m-3}{2}} v_{2m-2}.$$

$$(\text{xvi}) = (-1)^{\frac{m}{2}} c_2^2 d_{\frac{m-4}{2}} v_{2m}.$$

$$(\text{xvii}) = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{3} c_2^3 d_{\frac{m-5}{2}} v_{2m-2} - \frac{2}{3} c_1 v_{2m-2} v_{2m}.$$

3.5. A remark on the ring structure of $CH^{\cdot}(Y_n)$. We have given the ring structure of $CH^{\cdot}(Y_n)_{(2)}$ in 3.3 and 3.4. But actually, it is easy to determine the ring structure of $CH^{\cdot}(Y_n)$ from 3.2, 3.3 and 3.4. For example, by the basis in 5.2, the formula 3.3 (5) is rewritten as follows:

$$(5)' \quad c_1^{m-2i-2} c_2^{2i+1} v_{2m-4} = \left\{ (-1)^{\frac{m+2i+2}{2}} \left((-1)^i (2i-1) + 1 \right) c_2^{2i+2} d_{\frac{m-2i-4}{2}} \right.$$
$$\left. + \sum_{\mu=1}^{\frac{m-2i-2}{2}} a_{m-2i-1,\mu} c_1^{m-2i-2-2\mu} c_2^{2i+1+\mu} \right\} v_{2m-4}$$
$$+ \left\{ 2 \sum_{\mu=-1}^{i-2} a_{2i-1,\mu} c_1^{2i-3-2\mu} c_2^{2+\mu} \right\} v_{2m-4} v_{2m-2} - \frac{4i-2}{2i+1} \langle c_1^{2i-1} c_2 v_{2m-4} v_{2m-2} \rangle.$$

The other cases can be calculated similarly.

References

[1] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and S. I. Gelfand, *Schubert cells and cohomology of the spaces G/P*, Russian Math. Surveys **28** (1973), 1–26.

[2] A. Borel, Linear Algebraic Groups, Graduate Texts in Mathematics **126**, Springer-Verlag, New York, 1991.

[3] C. Chevalley, Anneaux de Chow et Applications, Secrétariat Mathématique, Paris, 1958.

[4] P. Deligne, Théorie de Hodge III, Publ. Math. IHES **44** (1974), 5–77.

[5] P. Deligne, Cohomologie Étale (SGA $4\frac{1}{2}$), Lecture Notes in Math. **569**, Springer-Verlag, New York, 1977.

[6] M. Demazure, *Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl et torsion*, Invent. Math. **21** (1973), 287–301.

[7] S. K. Donaldson, *Instantons and geometric invariant theory*, Comm. Math. Phys. **93** (1984), 453–460.

[8] E. M. Friedlander, Étale Homotopy of Simplicial Schemes, Ann. of Math. Studies **104**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1982.
[9] A. Grothendieck, Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas (SGA 4). Tomes I–III, Lecture Notes in Math. **269, 270, 305**, Springer-Verlag, New York, 1972–1973.
[10] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. **52**, Springer-Verlag, New York, 1977.
[11] Y. Kamiyama, *Generating varieties for the triple loop space of classical Lie groups*, Fund. Math. **177** (2003), 269–283.
[12] Y. Kamiyama, A. Kono and M. Tezuka, *Cohomology of the moduli space of $SO(n)$-instantons with instanton number* 1, Topology Appl. **146** (2005), 471–487.
[13] J. S. Milne, Étale Cohomology, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980.
[14] P. Norbury and M. Sanders, *Real instantons, Dirac operators and quaternionic classifying spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 2193–2201.
[15] P. Pragacz and J. Ratajski, *A pieri-type theorem for Lagrangian and odd orthogonal Grassmannians*, J. Reine Angew. Math. **476** (1996), 143–189.
[16] P. Pragacz and J. Ratajski, *A Pieri-type formula for even orthogonal Grassmannians*, Fund. Math. **178** (2003), 49–96.
[17] B. Schuster and N. Yagita, *Transfers of Chern classes in BP-cohomology and Chow rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 1039–1054.
[18] Y. Tian, *The Atiyah-Jones conjecture for classical groups and Bott periodicity*, J. Differential Geom. **44** (1996), 178–199.
[19] B. Totaro, *Torsion algebraic cycles and complex cobordism*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 467–493.