数理解析研究所講究録
第 1585 巻 2008 年 77-90

擬非拡大写像族に対する弱収束定理について

芝浦工業大学　工学部
厚芝 幸子 (SACHIKO ATSUSHIBA)

1. 序論

H を実 Hilbert 空間とし, $\{C_i\}$ を空でない閉凸部分集合族で $F=\bigcap_{i\in I}C_i$ が空でないものとする. このとき制約可能性問題 (convex feasibility problem) とは H から C_i の上への距離射影 P_i を用いて F の元をもとめることである。ここで, P_i は非拡大 (nonexpansive) になり, つまり, 任意の $x, y\in H$ に対して

$$\|P_ix-P_iy\|\leqq\|x-y\|$$

が成立し, $F(P_i)$ で P_i の不動点集合を表すとすると, $C_i=F(P_i)$ が成立する。従って, Hilbert 空間上で制約可能性問題 (convex feasibility problem) とは有限個の非拡大写像の共通不動点をみつける問題に帰着される。Matsushita・Takahashi [14, 15, 16] は擬非拡大写像 (relatively nonexpansive mapping) という概念を導入した ([8] 参照). 彼らは擬非拡大写像の不動点への弱および強収束定理を示した. 本論文では, Banach 空間における有限個の擬非拡大写像の共通不動点近似問題について考察する. その結果得られた定理を基に, 制約可能性問題について考察する.

2. 準備と補題

本論文では以後, E は実 Banach 空間を表し, E^* は E の共役空間とし, $\langle y, x^*\rangle$ は $x^*\in E^*$ の $y\in E$ での値を表す. $x_n\to x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを表し, また $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ も x_n が x に強収束することを表す. $x_n\rightharpoonup x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束することを表し, また w-$\lim_{n\to\infty}x_n=x$ も x_n が x に弱収束することを表す. $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}^+$ はそれぞれ全ての正の整数からなる集合, 全ての非負の整数からなる集合を表す. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^+$ はそれぞれ, 全ての実数からなる集合, 全ての非負の実数からなる集合とする. 写像 T に対して, $F(T)$ で集合 $\{x\in C: x=Tx\}$ を表す.

Banach 空間 E が狭義凸であるとは $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ をみたす任意の $x, y \in E$ に対して $\|x+y\|/2 < 1$ が成立するときをいう．狭義凸な Banach 空間 E では，任意の $x, y \in E$, $\lambda \in (0,1)$ に対して $\|x\| = \|y\| = \|(1-\lambda)x + \lambda y\|$ が成立するならば，$x = y$ となる．

$B_r = \{v \in E : \|v\| \leq r\}$ とする．Banach 空間 E が一様凸であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$x, y \in B_1$ かつ $\|x - y\| \leq \varepsilon$ ならば，$\|x+y\|/2 \leq 1 - \delta$ となる $\delta > 0$ が存在することである．一様凸な Banach 空間は回帰的であり，狭義凸であることが知られている ([23] 参照)．

$\delta(K)$ で集合 K の直径を表すものとする．E の閉凸部分集合 C が，正規構造をもつとは C の 2 点以上を含む任意の有界閉凸部分集合 K が，

$$\sup\{\|x - y\| : y \in K\} < \delta(K)$$

となるような点 $x \in K$ を含むときをいう．次の結果は [9] で示されている．

Theorem 2.1. E は回帰的な Banach 空間であり，C は E の空でない有界閉凸部分集合で正規構造を持つものとする．T は C から C への非拡大写像であるとする．すると $F(T)$ は空でない．

$x \in E$ に対して

$$Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義される E から 2^{E^*} への写像 J を E の双対写像という．Hahn-Banach の定理より，$Jx \neq \emptyset$ が任意の $x \in E$ に対して成立することがわかる．また，Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能 (E がなめらか) であるとは任意の $x, y \in B_1$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

が存在するときにいう．任意の $x \in B_1$ に対して，極限 (2.1) が $y \in B_1$ に関して一様に存在するとき，Banach 空間 E のノルムが Fréchet 微分可能であるという．任意の $y \in B_1$ に対して，極限 (2.1) が $x \in B_1$ に関して一様に存在するとき，Banach 空間 E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるという．E がなめらかであるとき，双対写像 $J : E \to E^*$ は一価になり，連続である．ただし，E の位相はノルム位相であり，E^* の位相は 弱* 位相である．また，E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとき，双対写像 $J : E \to E^*$ は一価で

一様連続である．ただし，E の位相はノルム位相であり，E^* の位相は弱* 位相である．E は滑らかで狭義凸で回帰的な Banach 空間であり，C は E の空でない閉凸部分集合で，$J : E \to E^*$ は双対写像とする．実数値関数 ϕ を $x, y \in E$ に対して

$$\phi(y, x) = \|y\|^2 - 2\langle y, Jx\rangle + \|x\|^2$$

が成立するものとして定義する．Alber [1] により，E から C の上への擬射影 (generalized projection) P_C は $x \in E$ に対して

$$P_C x = \arg\min_{y \in C} \phi(y, x)$$

が成立するものと定義される．もし E が Hilbert 空間であれば，全ての $y, x \in E$ に対して成立し，

$$\phi(y, x) = \|y - x\|^2$$

が成立し，P_C は距離射影に一致する．擬射影に関する次の補題が知られている．

Lemma 2.2 ([1, 10]). E は滑らかで狭義凸で回帰的な Banach 空間であり，C は E の空でない閉凸部分集合とする．P_C を E から C への擬射影とする．すると任意の $x \in C$ と $y \in E$ に対して

$$\phi(x, P_C y) + \phi(P_C y, y) \le \phi(x, y)$$

が成立する．

Lemma 2.3 ([1, 10]). E は滑らかで狭義凸で回帰的な Banach 空間であり，C は E の空でない閉凸部分集合とする．P_C を E から C への擬射影とする．$x \in E$, $z \in C$ とする．すると，$z = P_C x$ であることの必要十分条件は全ての $y \in C$ に対して

$$\langle y - z, Jx - Jz\rangle \le 0$$

が成立することである．

次の 4 つの補題も知られている．

Lemma 2.4 ([10]). E は滑らかで一様凸な Banach 空間であり，$\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は E の点列で，$\{x_n\}$ か $\{y_n\}$ のいずれかは有界であるものとする．もし，$\phi(x_n, y_n) = 0$ であれば $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$. が成立する．

Lemma 2.5 ([10]). E は滑らかで一様凸な Banach 空間であり, $r > 0$ を任意にとる. すると, 狭義単調増加, 連続な凸関数 $g : [0, 2r] \to \mathbb{R}$ で $g(0) = 0$ をみたし, $x, y \in B_r$ に対して, $g(\|x - y\|) \leq \phi(x, y)$ が成立するものが存在する.

Lemma 2.6 ([26, 27, 28]). E は一様凸な Banach 空間であり, $r > 0$ とする. すると, 狭義単調増加, 連続な凸関数 $g : [0, 2r] \to \mathbb{R}$ で $g(0) = 0$ をみたし, 任意の $x, y \in B_r$ と $t \in [0, 1]$ に対して

$$\|tx + (1-t)y\|^2 \leq t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 - t(1-t)g(\|x - y\|)$$

が成立するものが存在する.

Lemma 2.7 ([11]). E は滑らかで狭義凸で回帰的な Banach 空間であり, $z \in E$ とし, $\{t_i\} \subset (0, 1)$ を $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ をみたす実数列とする. もし, $\{x_i\}_{i=1}^m$ が E の有界集合で全ての $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して

$$\phi\left(z, J^{-1}\left(\sum_{j=1}^m t_j J x_j\right)\right) = \phi(z, x_i)$$

が成立するものとすると, $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$ が成立する.

E は滑らかで狭義凸で回帰的な Banach 空間であり, C を E の空でない閉凸部分集合とする. T は C から C への写像とし, $F(T)$ は T の不動点集合とする. このとき, もし C の点列 $\{z_n\}$ で $z_n \rightharpoonup z$ と $\lim_{n\to\infty} \|z_n - Tz_n\| = 0$ をみたすものが存在すれば, この $z \in C$ は T の漸近的不動点といわれる ([17] 参照). $\hat{F}(T)$ で T の漸近的不動点の集合を表す.

Matsushita・Takahashi [14, 15, 16] に従い, C から C への写像 T が、以下の条件をみたすとき擬非拡大であるとよぶ:

(a) $F(T)$ は空でない;

(b) $\phi(u, Tx) \leq \phi(u, x)$ が全ての $u \in F(T)$ と $x \in C$ に対して成立する;

(c) $\hat{F}(T) = F(T)$.

また、写像 $T : C \to C$ は次の条件をみたすとき強擬非拡大 (strongly relatively nonexpansive) であるといわれる ([17] 参照):

(a) T は擬非拡大である;

(b) $\{x_n\}$ が有界点列, $p \in F(T)$, $\phi(p, x_n) - \phi(p, Tx_n) \to 0$ ならば $\phi(Tx_n, x_n) \to 0$ が成立する.

次に例を挙げておく (詳細は Reich [17], Matsushita・Takahashi [14, 16] 等を参照).

Example 2.8.

(1) C を Hilbert 空間の閉凸部分集合とし, T は C から C への非拡大写像で $F(T)$ が空でないものとする. すると T は擬非拡大である.

(2) E は滑らかで狭義凸で回帰的な Banach 空間であり, C を E の空でない閉凸部分集合とする. T は C から C への擬非拡大写像であるとし, 不等式

$$\phi(u, Tx) + \phi(Tx, x) \leq \phi(u, x)$$

が全ての $u \in F(T)$ と $x \in C$ に対して成立するとする. このとき, T は強擬非拡大である. よって E から C の上への擬射影 P_C は強擬非拡大である.

(3) E は一様滑らかで狭義凸な Banach 空間であり, $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素で $A^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たすものとする. このとき, リゾルベント $J_r = (J + rA)^{-1}J$ は E から $D(A)$ の上への強擬射影である. ただし, $r > 0$ であり, $D(A)$ は A の定義域を表し, $F(J_r) = A^{-1}0$ である.

次の補題は Matsushita・Takahashi [16] によって証明された.

Lemma 2.9 ([16]). E は滑らかで狭義凸で回帰的な Banach 空間であり, C を E の空でない閉凸部分集合とする. T は C から C への擬非拡大写像であるとする. すると、$F(T)$ は閉凸である.

次の 2 つの補題も知られている.

Lemma 2.10 ([11, 12]). E は一様凸で一様に Gâteaux 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とする. C は E の空でない閉凸部分集合とし, $S\colon C \to C$, $T\colon C \to C$ は擬非拡大写像で $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ をみたすものとする. ここで, S か T のいずれかは強擬非拡大であることを仮定する. すると, $\hat{F}(ST) = F(ST) = F(S) \cap F(T)$ が成立し, $ST\colon C \to C$ は擬非拡大となる. さらに, S と T 両方が強擬非拡大であるならば, $ST\colon C \to C$ もまた強擬非拡大となる.

Lemma 2.11 ([11, 12]). E は一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし, C は E の空でない閉凸部分集合とする. $S\colon C \to C$ は強擬非拡大写像であり,$T\colon C \to C$ は擬非拡大写像で, $U : C \to C$ は $U = P_C J^{-1}(\lambda JS+(1-\lambda)JT)$ で定義される写像とする, ここで $\lambda \in (0,1)$ である. $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ を仮定する. すると, $\hat{F}(U) = F(U)$ が成立し, U は強擬非拡大となる.

3. 収束定理

C を滑らかで狭義凸で回帰的な Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. $T_1, T_2, \ldots$ は C から C への写像とし, P_C は E から C の上への擬射影とする. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は任意の $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して $0 \leq \alpha_i \leq 1$ をみたす実数とする. Takahashi [25] は以下のような C から C への写像 W を定義した:

$$\begin{aligned} U_1 &= P_C J^{-1}(\alpha_1 JT_1 + (1-\alpha_1)J), \\ U_2 &= P_C J^{-1}(\alpha_2 JT_2U_1 + (1-\alpha_2)J), \\ &\vdots \\ U_{r-1} &= P_C J^{-1}(\alpha_{r-1} JT_{r-1}U_{r-2} + (1-\alpha_{r-1})J), \\ W = U_r &= P_C J^{-1}(\alpha_r JT_rU_{r-1} + (1-\alpha_r)J). \end{aligned} \tag{3.1}$$

このような写像 W は $P_C, T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W-mapping と呼ばれる. 以下, P_C は E から C の上への擬射影とする. Lemmas 2.10,2.11 を用いて, 次の 3 つの Lamma を得る.

Lemma 3.1. E は滑らかで狭義凸で回帰的な Banach 空間で, C は E の空でない閉凸部分集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ は C から C への擬非拡大写像とし, $\bigcap_{i=1}^r F(T_i) \neq \emptyset$ をみたすものとすし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は任意の $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して, $0 < \alpha_i < 1$ をみたす実数とする. $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{r-1}$ と W は (3.1) で定義される写像とする. $k \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ を任意にとる. すると,

$$\phi(u, Wx) \leq \phi(u, x) \quad , \quad \phi(u, U_kx) \leq \phi(u, x)$$

が全ての $u \in \bigcap_{i=1}^r F(T_i)$ と $x \in C$ に対して成立する.

Lemma 3.2. E は滑らかで狭義凸であり, 回帰的な Banach 空間とし, C は E の空でない閉凸部分集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ は C から C への擬非拡

大写像で, $\bigcap_{i=1}^{r} F(T_i) \neq \emptyset$ をみたすものとし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は任意の $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して $0 < \alpha_i < 1$ をみたす実数とする. W は $P_C, T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される C から C への W-mapping である. すると, $F(W) = \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$ が成立する.

Lemma 3.3. E は滑らかで狭義凸であり, 回帰的な Banach 空間とし, C は E の空でない閉凸部分集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ は C から C への擬非拡大写像で $\bigcap_{i=1}^{r} F(T_i) \neq \emptyset$ をみたすものとし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は任意の $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して $0 < \alpha_i < 1$ をみたす実数とする. $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{r-1}$ と W は (3.1) で定義される写像とする. すると, 任意の $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して $T_k U_{k-1}$ と U_k は擬非拡大となる, ここで $U_0 = I$ である.

[11, 14] の考えを使って以下の定理を示すことができる (証明は [4] 参照). 簡単のために, $F = \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$ とする.

Theorem 3.4 ([4]). E は滑らかで一様凸な Banach 空間とし, C は E の空でない閉凸部分集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ は C から C への擬非拡大写像で $F = \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i) \neq \emptyset$ をみたすものとし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は任意の $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して $0 \leq \alpha_i \leq 1$ をみたす実数とする. W は $P_C, T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W-mapping とする. $\{x_n\}$ は, $x_0 = x \in C$, 任意の $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ に対して $x_{n+1} = W x_n$ で定義される点列とする. すると $\{P_F x_n\}$ は

$$\lim_{n \to \infty} \phi(z, x_n) = \min \left\{ \lim_{n \to \infty} \phi(y, x_n) : y \in F \right\}$$

をみたす F の唯一の元に強収束する.

また次の結果は主定理の証明で本質となる.

Theorem 3.5 ([4]). E は一様に滑らかで一様凸な Banach 空間とし, C は E の空でない閉凸部分集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ は C から C への擬非拡大写像で $F = \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i) \neq \emptyset$ をみたすものとし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は任意の $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して $0 < \alpha_i < 1$ をみたす実数とする. W は $P_C, T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W-mapping とする. $\{z_n\}$ は C の有界な点列で, ある $u \in F$ に対して $\phi(u, z_n) - \phi(u, W z_n) \to 0$ が成立し, さらに $z_{n_k} \rightharpoonup z$ も成立するものとする. すると, $z \in F$ が成立する.

Proof. $\{z_n\}$ は有界であり, $\phi(u, T_i z_u) \leq \phi(u, z_n)$ が全ての $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して成立することから, $\{T_i z_n\}$, $\{T_i U_{i-1} z_n\}$ もまた有界であることがわかる. E が一様に滑らかであることから, E^* が一様凸である ([23] 参照). $R > 0$ を $\{z_n\}, \{T_i z_n\}, \{T_i U_{i-1} z_n\} \subset B_R$ が全ての $i = \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して成立するようにとる, ここで $U_0 = I$ である. すると Lemma 2.6 から, 狭義単調増加で連続な凸関数 $g : [0, 2R] \to \mathbb{R}$ で $g(0) = 0$ をみたし, さらに全ての $t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$, $i = \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&\|tJz_n + (1-t)JT_iU_{i-1}z_n\|^2 \\
&\leq t\|z_n\|^2 + (1-t)\|T_iU_{i-1}z_n\|^2 - t(1-t)g(\|Jz_n - JT_iU_{i-1}z_n\|)
\end{aligned}
$$

が成立するものが存在する. u は F の元であるので, Lemma 2.2 から

$$
\begin{aligned}
&\phi(u, Wz_n) \\
&\leq \alpha_r \phi(u, T_r U_{r-1} z_n) + (1-\alpha_r)\phi(u, z_n) \\
&\quad - \alpha_r(1-\alpha_r) g(\|JT_rU_{r-1}z_n - Jz_n\|) \\
&\leq \alpha_r \phi(u, U_{r-1} z_n) + (1-\alpha_r)\phi(u, z_n) \\
&\quad - \alpha_r(1-\alpha_r) g(\|JT_rU_{r-1}z_n - Jz_n\|) \\
&\leq \alpha_r\{\alpha_{r-1}\phi(u, U_{r-2}z_n) + (1-\alpha_{r-1})\phi(u, z_n) \\
&\quad - \alpha_{r-1}(1-\alpha_{r-1}) g(\|JT_{r-1}U_{r-2}z_n - Jz_n\|)\} \\
&\quad + (1-\alpha_r)\phi(u, z_n) - \alpha_r(1-\alpha_r) g(\|JT_rU_{r-1}z_n - Jz_n\|) \\
&\leq \alpha_r \cdot \alpha_{r-1}\phi(u, U_{r-2}z_n) - \alpha_r\alpha_{r-1}(1-\alpha_{r-1}) g(\|JT_{r-1}U_{r-2}z_n - Jz_n\|) \\
&\quad - \alpha_r(1-\alpha_r) g(\|JT_rU_{r-1}z_n - Jz_n\|) + (1-\alpha_r \cdot \alpha_{r-1})\phi(u, z_n) \\
&\qquad \vdots \\
&\leq \prod_{i=k}^{r} \alpha_i \, \phi(u, T_kU_{k-1}z_n) + (1 - \prod_{i=k}^{r} \alpha_i)\phi(u, z_n) \\
&\quad - \sum_{l=k}^{r} (\prod_{i=l}^{r} \alpha_i \, (1-\alpha_l)) g(\|JT_kU_{k-1}z_n - Jz_n\|)
\end{aligned}
$$

が成立することを示せる. 従って

$$
\sum_{l=k}^{r} (\prod_{i=l}^{r} \alpha_i \, (1-\alpha_l)) g(\|JT_kU_{k-1}z_n - Jz_n\|)
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \prod_{i=k}^{r} \alpha_i\, \phi(u, T_k U_{k-1} z_n) + (1 - \prod_{i=k}^{r} \alpha_i) \phi(u, z_n) - \phi(u, W z_n) \\
&\leq \prod_{i=k}^{r} \alpha_i\, \phi(u, U_{k-1} z_n) + (1 - \prod_{i=k}^{r} \alpha_i) \phi(u, z_n) - \phi(u, W z_n).
\end{aligned}
$$

が成立する．Lemma 3.1 より，任意の $k \in \{1, 2 \ldots, r\}$ に対して

$$\phi(u, U_{k-1} z_n) \leq \phi(u, z_n)$$

が成立する．従って，

$$\sum_{l=k}^{r} (\prod_{i=l}^{r} \alpha_i\, (1 - \alpha_l)) g(\|JT_k U_{k-1} z_n - J z_n\|) \leq \phi(u, z_n) - \phi(u, W z_n).$$

が成立する．$\phi(u, z_n) - \phi(u, W z_n) \to 0$ であるので，

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{l=k}^{r} (\prod_{i=l}^{r} \alpha_i\, (1 - \alpha_l)) g(\|JT_k U_{k-1} z_n - J z_n\|) = 0$$

が成立する．$\{\alpha_i\}$ の仮定から，任意の $k \in \{1, 2, \ldots r\}$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} g(\|JT_k U_{k-1} z_n - J z_n\|) = 0$$

が成立する．よって，g の性質から，任意の $k \in \{1, 2, \ldots r\}$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \|JT_k U_{k-1} z_n - J z_n\| = 0$$

が成立することがわかる．E が一様凸であるので，双対写像 $J^{-1} : E^* \to E$ は E^* の有界部分集合上で一様連続である ([23] 参照)．ただし，E の位相はノルム位相であり，E^* の位相は 弱* 位相である．従って，任意の $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \|T_k U_{k-1} z_n - z_n\| = \lim_{n \to \infty} \|J^{-1}(JT_k U_{k-1} z_n) - J^{-1}(J z_n)\| = 0 \quad (3.2)$$

が成立することがわかる．よって，

$$\lim_{n \to \infty} \|T_1 z_n - z_n\| = 0$$

から，$z \in \hat{F}(T_1)$ を得る．T_1 は擬非拡大であるので，$\hat{F}(T_1) = F(T_1)$ が成立し，従って，$z \in F(T_1)$ を得る．

$z \in \bigcap_{k=1}^{r} F(T_k)$ を示す．$\hat{F}(T_i U_{i-1}) = F(T_i U_{i-1})$ が全ての $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して成立することに注意する．$z_{n_k} \rightharpoonup z$ が成立するので，(3.2) から，

$$z \in \hat{F}(T_i U_{i-1}) = F(T_i U_{i-1}) \quad (3.3)$$

が全ての $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して成立する. 数学的帰納法により

$$z \in \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i), \quad z \in \bigcap_{i=1}^{r} F(U_i). \tag{3.4}$$

であることが示される. 実際, $z = T_1 z$, から

$$U_1 z = P_C J^{-1}(\alpha_1 J T_1 z + \alpha_1 J z) = P_C J^{-1}(Jz) = z$$

を得て, $z = U_1 z$ となる. (3.3) から, $z = T_2 U_1 z$ が成立することもわかる. よって $z = T_2 U_1 z = T_2 z$ が成立する. よって,

$$U_2 z = P_C J^{-1}(\alpha_2 J T_2 U_1 z + \alpha_2 J z) = P_C J^{-1}(Jz) = z$$

を得る. 従って, $z = T_1 z = T_2 z, \quad z = U_1 z = U_2 z$ が成立する.

$$z \in \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i), \quad z \in \bigcap_{i=1}^{k} F(U_i). \tag{3.5}$$

を仮定する. (3.3) より $z \in F(T_{k+1} U_k)$ が成立することがわかる. よって, (3.5) より $z = T_{k+1} U_k z = T_{k+1} z$ を得る. また,

$$U_{k+1} z = P_C J^{-1}(\alpha_{k+1} J T_{k+1} U_k z + \alpha_{k+1} J z) = P_C J^{-1}(Jz) = z$$

も得る. よって, $z \in \bigcap_{i=1}^{k+1} F(T_i), \quad z \in \bigcap_{i=1}^{k+1} F(U_i)$ が成立する. 従って, 数学的帰納法により

$$z \in \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i), \quad z \in \bigcap_{i=1}^{r} F(U_i).$$

が示されたことになる. 以上より $z \in \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i) = F$ となり, この定理が証明できたことになる. □

Theorems 3.4,3.5 などを用いて次の主定理を得る.

Theorem 3.6 ([4]). E は一様に滑らかで一様凸な Banach 空間とし, C は E の空でない閉凸部分集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ は C から C への擬非拡大写像で $F = \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i) \neq \emptyset$ をみたすものとし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は任意の $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して $0 < \alpha_i < 1$ をみたす実数とする. W は $P_C, T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W-mapping とする. $\{x_n\}$ は, $x_0 = x \in C$, 任意の $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ に対して $x_{n+1} = W x_n$ と定義される点列とする. すると次が成立する:

(a) 点列 $\{x_n\}$ は有界で $\{x_n\}$ の部分点列の極限は $\bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$ に属する;

(b) E から E^* への双対写像 J が弱点列連続であるならば, $\{x_n\}$ は $\bigcap_{i=1}^r F(T_i)$ の元 z に収束する. また, この z は $z = \lim_{n\to\infty} P_{\bigcap_{i=1}^r F(T_i)} x_n$ をみたす.

Proof. まず (a) を示す. $u \in F$ を任意にとる. Theorem 3.4 の証明と同様に, $\{\phi(u, x_n)\}$ が非増加で $\{x_n\}$, $\{T_i x_n\}$, $\{T_i U_i x_n\}$ が有界であることが示せる. また

$$\phi(u, x_n) - \phi(u, W x_n) = \phi(u, x_n) - \phi(u, x_{n+1}) \to 0$$

が $n \to \infty$ のときに成立する. Theorem 3.5 を使い, $\{x_n\}$ の部分点列の極限全てが F に属することもわかる.

次に (b) を示す. J が弱点列連続であると仮定する. もし $x_{n_k} \rightharpoonup z$ であるとすると (a) より, $z \in F$ が成立する. Lemma 2.3 より,

$$\langle z - P_F x_n, J x_n - J P_F x_n \rangle \leq 0$$

が全ての $n \in N$ に対して成立する. Theorem 3.5 より, $P_F x_n \to w \in F$ が成立する. よって $n_k \to \infty$ とするとき, $\langle z - w, Jz - Jw \rangle \leq 0$ を得る. さらに J が単調作用素であるので,

$$\langle z - w, Jz - Jw \rangle = 0$$

を得る. よって, E が狭義凸であることから, $z = w$ が成立する ([23] 参照). 以上より定理が示せたことになる. □

4. 応用

Theorem 3.6 の直接の系として, 次の定理を得る ([4] も参照).

Theorem 4.1. H は Hilbert 空間とし, C は H の空でない閉凸部分集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ は C から C への非拡大写像で $F = \bigcap_{i=1}^r F(T_i) \neq \emptyset$ をみたすものとし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は任意の $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して $0 < \alpha_i < 1$ をみたす実数とする. W は $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W-mapping とする. $\{x_n\}$ は, $x_0 = x \in C$, 任意の $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ に対して $x_{n+1} = W x_n$ と定義される点列とする. すると $\{x_n\}$ は $\bigcap_{i=1}^r F(T_i)$ の元 z に収束する. また, この z は $z = \lim_{n\to\infty} P_{\bigcap_{i=1}^r F(T_i)} x_n$ をみたす.

Theorem 4.2. E は一様に滑らかで一様凸な Banach 空間とし, C は E の空でない閉凸部分集合とする. T は C から C への擬非拡大写像で $F(T) \neq \emptyset$ を

みたすものとし, α は $0 < \alpha < 1$ をみたし実数とする. $\{x_n\}$ は $x_0 = x \in C$, 任意の $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ に対して

$$x_{n+1} = P_C J^{-1}(\alpha JTx_n + (1-\alpha)Jx_n)$$

と定義する. すると次が成立する:

(a) 点列 $\{x_n\}$ は有界で $\{x_n\}$ の部分点列の極限は $F(T)$ に属する;

(b) E から E^* への双対写像 J が弱点列連続であるならば, $\{x_n\}$ は $F(T)$ の元 z に収束する. また, この z は $z = \lim_{n\to\infty} P_{F(T)}x_n$. をみたす.

Theorem 3.6 を使って制約可能性問題に結びつく次の定理を得る ([14, 4] 参照).

Theorem 4.3. E は一様に滑らかで一様凸な Banach 空間とし, $\{C_i\}$ は E の有限個の空でない閉凸部分集合で $C = \bigcap_{i=1}^r C_i \neq \emptyset$ をみたすものとする. $P_{C_1}, P_{C_2}, \ldots, P_{C_r}$ はそれぞれ E から C_i の上への擬射影とする. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は任意の $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して $0 < \alpha_i < 1$ をみたす実数とする. W は $P_{C_1}, P_{C_2}, \ldots, P_{C_r}$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W-mapping とする. 点列 $\{x_n\}$ は $x_0 = x \in C$, 任意の $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ に対して $x_{n+1} = Wx_n$ と定義される点列とする. すると次が成立する:

(a) 点列 $\{x_n\}$ は有界で $\{x_n\}$ の部分点列の極限は $\bigcap_{i=1}^r C_i$ に属する;

(b) E から E^* への双対写像 J が弱点列連続であるならば, $\{x_n\}$ は $\bigcap_{i=1}^r C_i$ の元 z に収束する. また, この z は $z = \lim_{n\to\infty} P_{\bigcap_{i=1}^r C_i}x_n$. をみたす.

References

[1] Y.I.Alber., *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, A.G.Kartsatos, Ed., Vol. 178 of Lecture Notes in Pure and Appl. Math., pp. 15-50, Dekker, New York, 1996.

[2] S. Atsushiba and W.Takahashi, Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications, Indian J. Math., **41** (1999), 435–453.

[3] S. Atsushiba and W.Takahashi, *Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces,* Bull. Austral. Math. Soc., **57** (1998), 117–127.

[4] S. Atsushiba and W.Takahashi, *Weak convergence theorem for a Family of relatively Nonexpansive Mappings in Banach Spaces*, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, to appear.

[5] R. E. Bruck, *Nonexpansive retracts of Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **76** (1970), 384–386.

[6] R. E. Bruck, *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., **179**(1973), 251-262.

[7] R. E. Bruck, *A common fixed-point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings,* Pacific J. Math., **53**(1974), 59-71.

[8] D. Butnariu, S. Reich and A.J.Zaslavski, *Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces*, J. Appl. Anal., **7** (2001), 151–174.

[9] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances,* Amer. Math. Monthly, **72** (1965), 1004-1006.

[10] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim., **13** (2002), 938–945.

[11] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Block iterative methods for a finite family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl., **2007** (2007), ArtID 21972, 18pp.

[12] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of countable families of strongly nonexpansive mappings*, Nonlinear Studies, **14** (2007), 219–234.

[13] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series,* Acta Math., **80** (1948), 167-190.

[14] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl., **2004** (2004), 37–47.

[15] S. Matsushita and W. Takahashi, *An iterative algorithm for relatively nonexpansive mappings by a hybrid method and applications*, in Nonlinear analysis and convex analysis, W.Takahashi and T.Tanaka, Eds., pp.305–313, Yokohama Publ., Yokohama, Japan, 2004.

[16] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory, **134** (2005), 257–266.

[17] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, in Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, A.G. Kartsatos, Ed., Vol. 178 of Lecture Notes in Pure and Appl. Math., pp. 313-318, Dekker, New York, 1996.

[18] K. Shimoji and W. Takahashi, Strong convergence to common fixed points of infinite nonexpansive mappings and applications. Taiwanese J. Math., **5** (2001),387–404.

[19] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer, Math, Soc., **125** (1997), 3641-3645.

[20] W. Takahashi, *Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets,* J. Math. Soc. Japan, **36** (1984), 543-553.

[21] W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis, Kindai-kagakusha, Tokyo, 1988 (Japanese).

[22] W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications,* Ann., Univ. Mariae Curie-Sklodowskka, **51** (1997), 277–292.

[23] W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis–Fixed Point Theory and Its Applications–, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[24] W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems*, Mathematical and Computer Modelling, **32** (2000), 1463–1471.

[25] W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl., **104** (1984), 546–553.

[26] H.K.Xu, Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl., **298** (2004), 1, 279–291.

[27] C. Zălinescu, *On uniformly convex functions*, J. Math. Anal. Appl., **95** (1983), 344–374.

[28] C. Zălinescu, *Convex analysis in general vector spaces*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.

(S. Atsushiba) Department of Mathematics, Shibaura Institute of Technology, Fukasaku, Minuma-ku, Saitama-City, Saitama 337–8570, Japan
E-mail address: atusiba@sic.shibaura-it.ac.jp