数理解析研究所講究録
第 1587 巻 2008 年 100-108

コンパクト量子群作用のガロワ対応について

戸松 玲治
東京大学大学院 数理科学研究科

1 はじめに

表題としましたように，コンパクト量子群 (の極小) 作用についてのガロワ対応の概略を報告します．今回の結果は，[3] で証明されたコンパクト Kac 環についてのガロワ対応をコンパクト量子群にまで一般化するものです．始めに作用素環論におけるガロワ対応とその研究の歴史を簡単に振り返ってみます．一口にガロワ対応といっても状況設定は様々ですが，今回は次の二つの状況を考えます．

(1) コンパクト (量子) 群 $\mathbb{G}$ が因子環 M に極小に作用しているとき，固定点環 $M^{\mathbb{G}}$ と M との中間部分因子環を，$\mathbb{G}$ の「閉部分群」的な対象で記述する．

(2) 離散 (量子) 群 Γ が因子環 N に自由に作用しているとき，N と接合積 $N \rtimes \Gamma$ との中間部分因子環を，Γ の「部分群」的な対象で記述する．

有限群 $\mathbb{G}$ と II_1 型因子環という状況下で，(1) のタイプについて最初に成功したのは中村-武田 [6] でした．それ以来，主に日本で活発な研究が続きます．岸本 [4] は，コンパクト群 $\mathbb{G}$ が大局的不変にする中間部分環と正規閉部分群との対応を得ました．また (2) のタイプについて，中神-竹崎 [5] が (局所コンパクト群)Γ の双対作用と接合積の中間部分環について論じ，長田 [2] は，「条件付き期待値が落ちる中間部分因子環」と部分群との対応を証明しました．

(1) と (2) は一見異なるように思われますが，自由作用の双対作用は極小作用であること，(固定点環が無限なら) 極小作用は自由作用の双対作用であることから，Kac 環や量子群の言葉を用いれば本質的には変わりありません (コンパクト群や，離散群の双対はコンパクト Kac 環を作る)．泉-Longo-Popa[3] は，(1) を部分因子環論の技術を用いて，コンパクト Kac 環にまで拡張しました．その証明の過程で特に重要だったのが，「全ての中間部分因子環に条件付き期待値が落ちる」ということでした．これは長田の条件は自動的にみたされていることを意味します．

さて今回は，コンパクト量子群にまで (1) を一般化します．ここでの一番の難所は，コンパクト量子群の極小作用については条件付き期待値が落ちない中間部分因子環が存在することがある，という点です．実際 $\mathbb{G} = SU_q(2)$ の極小作用 (具体的な構成は植田 [11] による) を考えて，[3] の方法により ($SU_q(2)/\mathbb{T}$ でない)Podleś 球面 [7] から中間部分因子環を構成すると，簡単な計算からその例となることが分かります．そのため [3] の証明全てを用いることはできませんが，そこで導入された「離散的包含」という対象を少し異なる角度から研究することで，条件付き期待値を使う議論を避けられます．この点を含めて説明してみたいと思います．

2 泉-Longo-Popaによる方法

まずコンパクト(量子)群の極小作用の定義を確認します．記号については[3, 10]，コンパクト量子群の基礎事項については[13]をご参照ください．量子群に不慣れな方はコンパクト群に置き換えると理解しやすいと思います．

定義 2.1 $\mathbb{G}$ をコンパクト量子群，M を vN 環，$\alpha : M \to M \otimes L^\infty(\mathbb{G})$ を単位的かつ忠実な正則 $*$ 準同型とする．

1. α が**作用** (action) であるとは，$(\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \alpha$ をみたすときにいう．ここで δ は，$(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \delta$ をみたす $\mathbb{G}$ の余積準同型 $\delta\colon L^\infty(\mathbb{G}) \to L^\infty(\mathbb{G}) \otimes L^\infty(\mathbb{G})$ のことである．
2. 作用 α が**忠実** (faithful) であるとは，次の条件 (full spectrum condition) が成り立つときにいう:
$$L^\infty(\mathbb{G}) = \overline{\mathrm{span}}^{\sigma-\mathrm{weak}}\{(\omega \otimes \mathrm{id})(\alpha(M)) \mid \omega \in M_*\}.$$
3. 作用 α が**極小** (minimal) であるとは，α が忠実かつ $(M^\alpha)' \cap M = \mathbb{C}$ をみたすときにいう．

極小作用 α に対して，既約な包含 $N := M^\alpha \subset M$ を subfactor 理論から理解し，この包含の中間にある因子環 $N \subset L \subset M$ を特定する，というのが [3] の基本的戦略です．ここで重要な概念「離散的包含」([3, Definition 3.7]) について触れておきます．そのために多少記号を導入します．

$E\colon P \to Q$ を因子環 P から因子環 Q の上への条件付き期待値，$Q \subset P \subset P_1$ を E に対する一回目の basic extension とします．E の双対作用素値荷重を $\widehat{E}$ と書きます．作用素値荷重について，出発地と行き先を明確にしたい場合は E_Q^P や $\widehat{E}_P^{P_1}$ のように書くこととします．

定義 2.2 因子環の包含 $Q \subset P$ が**離散的**であるとは，ある条件付き期待値 $E\colon P \to Q$ が存在し，その双対作用素値荷重 $\widehat{E}\colon P_1 \to P$ が $Q' \cap P_1$ 上で半有限であるときにいう．

すると次が成り立ちます．

補題 2.3 α を $\mathbb{G}$ の M への極小作用とすると，包含 $M^\alpha \subset M$ は離散的である．

実際 M_1 は接合積 $M \rtimes_\alpha \mathbb{G}$ と自然に同型であり，極小性から $(M^\alpha)' \cap M_1$ が $\mathbb{G}$ の群環と同型になります．$E_{M^\alpha}^M$ を $\mathbb{G}$ 作用の平均から得られる M から M^α の上への条件付き期待値とすると，その双対作用素値荷重 $\widehat{E}_M^{M_1}$ の $(M^\alpha)' \cap M_1$ への制限は，群環上の Plancherel 荷重と一致します．よって特にその制限は半有限となります．

[3] では，この離散性という概念に注目して，中間部分因子環を特定する方法が編み出されました．以降しばらく極小作用から離れ，既約で離散的な部分因子環 $N \subset M$ を考えることにします．sector の議論を使うため，必要なら無限環をテンソルして N の無限性も仮定しておきます．

条件付き期待値は E_N^M と書き，その双対作用素値荷重を $\widehat{E}_M^{M_1}$ と書きます．N の忠実状態 ω を固定しておき，M の忠実状態 $\varphi := \omega \circ E_N^M$ からできる GNS 表現 $(H_\varphi, \Lambda_\varphi)$ を考えます．そこで basic extension を標準的な方法で実現しておきます．つまり，Jones 射影 $e_N \in B(H_\varphi)$ を

$$e_N \Lambda_\varphi(x) = \Lambda_\varphi(E_N^M(x)) \quad \text{for } x \in M$$

と定め，$M_1 = M \vee \{e_N\}''$ とします．

離散性は $\widehat{E}_M^{M_1}$ の $N' \cap M_1$ への制限が半有限であることを意味しますが，山上の結果 [12, Corollary 28] により $N' \cap M_1$ は I 型因子環に分解します:

$$N' \cap M_1 = \bigoplus_{\xi \in \Xi} A_\xi,$$

ここで A_ξ のタイプを I_{n_ξ} 型とします．先ほどの極小作用の例では，$(M^\alpha)' \cap M_1$ は $\mathbb{G}$ の群環だったので，Ξ は既約表現の同値類の集合 $\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$ となります．

次の目標は M を，N と M 内のある Hilbert 空間族で生成させることです．極小作用についていえば，M を M^α と $\widehat{\mathbb{G}}$ の Roberts 作用 [8] の接合積として表すことに対応します．

$\gamma_N^M \colon M \to N$ を Longo による canonical な準同型とします．次の双加群の同型を導く準同型というのがその定義です (従って N のユニタリで摂動するだけの自由度を除き一意的に決まります):

$${}_M L^2(M)_N \cong {}_M {}_{\gamma_N^M} L^2(N)_N.$$

等式 $N' \cap M_1 = \mathrm{End}({}_N L^2(M)_N) \cong \mathrm{End}({}_N {}_{\gamma_N^M} L^2(N)_N)$ から，極小射影 $p_\xi \in A_\xi$ に対応した $\gamma_N^M|_N$ の直和因子があります．これを ρ_ξ と書きます (sector $[\rho_\xi]$ は一意的に決まります):

$${}_N p_\xi L^2(M)_N \cong {}_N {}_{\rho_\xi} L^2(N)_N.$$

p_ξ が極小射影であり，$\widehat{E}_M^{M_1}(p_\xi) < \infty$ なので，ρ_ξ は既約かつ有限指数を持ちます．なお，ρ_ξ は次のようにしても求められます．$e_N \in N' \cap M_1$ を Jones 射影とし，$w \in M_1$ を $p_\xi = ww^*$，$e_N = w^* w$ となるように取ります．このとき $x \in N$ に対し，元 $w^* x w$ は $N e_N$ に含まれるため，これを $\rho_\xi(x) e_N$ と書いて $\rho_\xi \in \mathrm{End}(N)$ を定義します．これで上の同型が成り立ちます．

次に N の準同型 ρ_ξ を implement する M の元の集合を $\mathcal{H}_\xi$ と書きます:

$$\mathcal{H}_\xi = \{V \in M \mid Vx = \rho_\xi(x) V \text{ for all } x \in N\}.$$

すると $\mathcal{H}_\xi^* \mathcal{H}_\xi$ は $N' \cap M = \mathbb{C}$ に含まれるので，$\mathcal{H}_\xi$ は M 内の Hilbert 空間 (定義は [8] を参照してください) です．[3, Theorem 3.3] により，次が成り立ちます．

補題 2.4 前述のように$\xi \in \Xi$, A_ξはI_{n_ξ}型因子環とする.

1. n_ξは$\dim(\mathcal{H}_\xi)$に等しく，有限である.

2. $A_\xi = \mathcal{H}_\xi^* e_N \mathcal{H}_\xi$.

$V, W \in \mathcal{H}_\xi$に対し，$(V, W) := E_N^M(VW^*)$と定めます．右辺は$\rho_\xi(N)' \cap N = \mathbb{C}$に含まれることから，$(\cdot,\cdot)$はHilbert空間$\mathcal{H}_\xi$の別の内積となります．この内積について$\mathcal{H}_\xi$の正規直交基底$(V_{\xi_i})_{i \in I_\xi}$を取ります．すると$(V_{\xi_i}^* e_N V_{\xi_j})_{i,j \in I_\xi}$が$A_\xi$の行列単位となります．$A_\xi$たちの直和が$N' \cap M_1$だったので，次が成り立ちます:

$$1 = \sum_{\xi \in \Xi} \sum_{i \in I_\xi} V_{\xi_i}^* e_N V_{\xi_i}.$$

特にベクトル$\Lambda_\varphi(x)$, $x \in M$にかけてみると

$$\Lambda_\varphi(x) = \sum_{\xi \in \Xi} \sum_{i \in I_\xi} \Lambda_\varphi(V_{\xi_i}^* E_N^M(V_{\xi_i} x)).$$

それゆえMはGNS Hilbert空間のレベルで$\mathcal{H}_\xi^* N$たちの線形和によって張られます．またこの線形和はNを含む$*$部分環であることが分かります([3, Lemma 3.2]から$\rho_\xi \rho_\eta$の既約因子が$\gamma_N^M|_N$に含まれる).

次にHilbert空間のレベルよりも強い主張である，σ-弱位相による閉包のMとの一致を竹崎の定理[9]を応用して示します．そのためにモジュラー自己同型群σ^φが$\mathcal{H}_\xi$についてどうふるまうかを計算します．実際に次が成り立ちます([3, Lemma 2.12.(i)]).

補題 2.5 $\varphi = \omega \circ E_N^M$を前に取った忠実状態とする．このとき

1. 各$\xi \in \Xi$に対してN上の支配的荷重ψ_ξとユニタリ$u \in N$が存在し，全ての$t \in \mathbb{R}$に対して$\sigma_t^{\psi_\xi \circ E_N^M}(u\mathcal{H}_\xi) = u\mathcal{H}_\xi$が成り立つ.

2. 全ての$t \in \mathbb{R}$に対して$\sigma_t^\varphi(\mathcal{H}_\xi) \subset N\mathcal{H}_\xi$が成り立つ.

2の主張は，1の主張とConnesのRadon-Nikodym定理から従います．よって次が分かります([3, Lemma 3.8]に記述がありますが，その補題ではより強い内容を主張しています).

定理 2.6 $N \subset M$を既約かつ離散的包含とする．Ξ, ρ_ξ, $\mathcal{H}_\xi$を前のように取ると，次が成り立つ:

$$M = \overline{\mathrm{span}}^{\sigma-\mathrm{weak}}\{\mathcal{H}_\xi^* N \mid \xi \in \Xi\}.$$

次に泉-Longo-Popaは中間部分因子環の特徴付けに話を進めます．$N \subset L \subset M$ を中間部分因子環とします．ρ_ξ，$\mathcal{H}_\xi$ を前のように取っておき

$$\mathcal{K}_\xi = L \cap \mathcal{H}_\xi$$

とおきます．これは0かもしれません．$\mathcal{K}_\xi \neq 0$ となる ξ たちの集合を Ξ_L と書きます．目標は L を次のように書くことです:

$$L = \overline{\mathrm{span}}^{\sigma-\mathrm{weak}}\{\mathcal{K}_\xi^* N \mid \xi \in \Xi_L\}. \tag{1}$$

先ほどの議論にならい，A_ξ の射影を作ることから始めます．まず $\mathcal{H}_\xi$ には内積 $(\cdot,\cdot)$ が入っていました．部分空間 $\mathcal{K}_\xi$ にもその制限内積が入りますから，その内積についての正規直交基底 $(V_{\xi_i})_{i \in I_\xi^L}$ を取ります．そこで

$$z_L := \sum_{\xi \in \Xi_L} \sum_{i \in I_\xi^L} V_{\xi_i}^* e_N V_{\xi_i} \in N' \cap M_1 \tag{2}$$

とおきます．私たちは $\overline{\Lambda_\varphi(L)} = z_L H_\varphi$ を期待するわけですが，[3, Theorem 3.9] の証明 ($\sigma^{E_N^M \circ \hat{E}_M^{M_1}} = \mathrm{id}$ を仮定) をよく読むと，$\sigma^{E_N^M \circ \hat{E}_M^{M_1}} = \mathrm{id}$ は竹崎の定理から部分環を特定するのに必要な条件であり，GNS Hilbert 空間レベルの決定には必要でないことが分かります．すなわち

補題 2.7 *$N \subset L \subset M$ を中間部分因子環とする．z_L を前のように決めると，次が成り立つ:*

$$\overline{\Lambda_\varphi(L)} = z_L H_\varphi.$$

つまり L はGNS Hilbert 空間のレベルで $\mathcal{K}_\xi^* N$ たちの線形和で張られることが分かります．

(1) を示すため，[3] では $\sigma^{E_N^M \circ \hat{E}_M^{M_1}} = \mathrm{id}$ を仮定します．すると補題 2.5 (1) において，特に $\sigma^{\psi_\xi}|_{u\mathcal{H}_\xi} = \mathrm{id}$ をみたす支配的荷重 ψ_ξ を取ることができ，σ^φ が $\mathcal{K}_\xi^* N$ を不変にすることが分かります．ここで竹崎の定理により，L の上に M から φ を保存する条件付き期待値が落ちるため，(1) が成り立ちます．私たちの課題は「$\sigma^{E_N^M \circ \hat{E}_M^{M_1}} = \mathrm{id}$ を仮定せず (1) を示す」ことです．

3 主結果の証明

私たちは全体 M から中間 L を特定するのではなく，まず包含 $N \subset L$ の離散性を示すことを目指します．実際もしもそれが離散的であり，さらに $\mathcal{K}_\xi$ が離散性に由来する implementing Hilbert 空間であること (つまり $N' \cap M_1$ から作られた ρ_ξ が $N' \cap L_1$ からも作られるということ) が分かれば，定理 2.6 から L が $\mathcal{K}_\xi^* N$ たちの線形和から張られることになります．

$N \subset L$ の離散性を示すため，条件付き期待値 $E_N^L := E_N^M|_L$ に対する basic extension $N \subset L \subset L_1$ を，$N \subset L \subset M_1$ の corner として実現することを目指します．ここで $\varphi_1 := \omega \circ E_N^M \circ \widehat{E}_M^{M_1}$，$\psi_1 := \omega \circ E_N^L \circ \widehat{E}_L^{L_1}$ と M_1，L_1 上の荷重をそれぞれ定めます．また $N \subset L$ の Jones 射影を f_N と書きます．双対作用素値荷重の性質から $\widehat{E}_M^{M_1}(e_N) = 1$，$\widehat{E}_L^{L_1}(f_N) = 1$ が成り立ちます．

今，L_1 の GNS Hilbert 空間 H_{ψ_1} を M_1 の GNS Hilbert 空間 H_{φ_1} に埋め込む等距離作用素 U_L を次のように構成できます:

$$U_L \Lambda_{\psi_1}(af_Nb) = \Lambda_{\varphi_1}(ae_Nb), \quad a, b \in L.$$

実際 $\Lambda(Lf_NL) \subset H_{\psi_1}$ が稠密であることと内積の簡単な計算から，U_L が well-defined かつ等距離であることが分かります．明らかに U_L は次の性質を持ちます:

$$U_Lx = xU_L,\ x \in L, \quad U_Lf_N = e_NU_L. \tag{3}$$

U_L の像射影を p_L と書けば，U_L の定義から

$$p_LH_{\varphi_1} = \overline{\Lambda_{\varphi_1}(Le_NL)}$$

が従い，特に $p_L \in L' \cap \{e_N\}' \subset B(H_{\varphi_1})$ が分かります．

ここで (2) で定めた $z_L \in M_1$ と $p_L \in B(H_{\varphi_1})$ の関係を調べます，補題 2.7 から $e_N \leq z_L$ かつ $z_L \in L' \cap M_1$ が分かります．よって

$$z_Lp_LH_{\varphi_1} = z_L\overline{\Lambda_{\varphi_1}(Le_NL)} = \overline{\Lambda_{\varphi_1}(Lz_Le_NL)} = \overline{\Lambda_{\varphi_1}(Le_NL)} = p_LH_{\varphi_1}$$

より $B(H_{\varphi_1})$ の作用素として次が成り立ちます:

$$p_L \leq z_L$$

このことから，次の単位的な写像 $\pi: z_LM_1z_L \to B(H_{\psi_1})$ を定められます:

$$\pi(x) = U^*xU, \quad x \in z_LM_1z_L.$$

ここで $p_L \in L' \cap \{e_N\}' \subset B(H_{\varphi_1})$ と $z_LM_1z_L = (L \vee \{e_N\}'')z_L$ から，π は準同型です．さらに定義と (3) から

$$\pi(xe_Ny) = xf_Ny,\ x, y \in L$$

が成り立ち，特に π の像は L_1 となります．もちろん $z_LM_1z_L$ は因子環なので単射的な写像です．よって次が分かりました．

補題 3.1 同型 $\pi: z_LM_1z_L \to L_1$ は，次の包含の同型を導く*:*

$$\pi: Nz_L \subset Lz_L \subset z_LM_1z_L \to N \subset L \subset L_1.$$

この補題から $N' \cap L_1$ を求めてみます．まず z_L の定義から次が従います:

$$(Nz_L)' \cap z_L M_1 z_L = z_L(N' \cap M_1)z_L = \bigoplus_{\xi \in \Xi_L} \mathcal{K}_\xi^* e_N \mathcal{K}_\xi.$$

両辺に π を施すと

$$N' \cap L_1 = \bigoplus_{\xi \in \Xi_L} \mathcal{K}_\xi^* f_N \mathcal{K}_\xi.$$

となります．双対作用素値荷重 $\widehat{E}_L^{L_1}$ は各 $\mathcal{K}_\xi^* f_N \mathcal{K}_\xi$ の上で有限ですから，$N' \cap L_1$ の上で半有限となります．すなわち包含 $N \subset L$ は離散的であることが示されました．これで定理2.6を $N \subset L$ に適用できます．このとき ρ_ξ に相当する準同型を求めなければいけません．$V \in \mathcal{K}_\xi$ を $1 = (V, V) = E_N^L(VV^*)$ となるように選ぶと，$p'_\xi = V^* f_N V$ は $N' \cap L_1$ の極小射影です．この射影と N の既約準同型 ρ'_ξ が対応するわけですが，先に述べた計算方法により

$$\rho'_\xi(x) f_N = (f_N V)x(f_N V)^* = f_N \rho_\xi(x) VV^* f_N = \rho_\xi(x) f_N, \ x \in N$$

となり，$\rho'_\xi = \rho_\xi$ が従います．もちろん ρ_ξ を implement する L 内の Hilbert 空間は $\mathcal{K}_\xi$ に他なりません．よって定理2.6から，次の主定理を導くことができます．

主定理 3.2 $N \subset M$ を既約で離散的な包含とする．N は (従って M も) 無限因子環とする．$N \subset L \subset M$ を中間部分因子環とすると，次が成り立つ．

1. $N \subset L$ も離散的な包含である．

2. γ_N^M, γ_N^L をそれぞれ $N \subset M$, $N \subset L$ の canonical な準同型とすると，Sect(N) の元として $[\gamma_N^L|_N] \prec [\gamma_N^M|_N]$ が成り立つ．

3. $[\gamma_N^L|_N]$ を Sect(N) の中で次のように既約分解すると

$$[\gamma_N^L|_N] = \bigoplus_{\xi \in \Xi_L} m_\xi [\rho_\xi]$$

各 m_ξ は有限であり，$\mathcal{K}_\xi = \{V \in L \mid Vx = \rho_\xi(x)V, \ x \in N\}$ と定めれば，$m_\xi = \dim(\mathcal{K}_\xi)$ かつ次が成り立つ:

$$L = \overline{\mathrm{span}}^{\sigma-\mathrm{weak}}\{\mathcal{K}_\xi^* N \mid \xi \in \Xi_L\}.$$

この結果を極小作用に応用すれば，次のコンパクト量子群作用のガロワ対応を証明できます．ここで左余イデアルというのは，関数環 $L^\infty(\mathbb{G})$ の vN 部分環 B であって $\delta(B) \subset L^\infty(\mathbb{G}) \otimes B$ をみたすもののことです．もし $\mathbb{G}$ がコンパクト群であれば，B は一意的な閉部分群 $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ によって $B = L^\infty(\mathbb{G}/\mathbb{H})$ と表せます [1]．§1 で述べた「閉部分群」的な対象とは，左余イデアルのことです．

主定理 3.3 (ガロワ対応) $\alpha: M \to M \otimes L^\infty(\mathbb{G})$ をコンパクト量子群 $\mathbb{G}$ の因子環 M への極小作用とする．$M^\alpha \subset M$ の中間部分因子環の族を $\mathcal{I}(M, M^\alpha)$，$L^\infty(\mathbb{G})$ の左余イデアルの族を $\mathcal{L}(\mathbb{G})$ と書く．$L \in \mathcal{I}(M, M^\alpha)$，$B \in \mathcal{L}(\mathbb{G})$ に対して

$$\mathcal{L}(L) := \overline{\operatorname{span}}^{\sigma-\mathrm{weak}}\{(\omega \otimes \mathrm{id})(\alpha(L)) \mid \omega \in M_*\},$$

$$\mathcal{M}(B) := \{x \in L \mid \alpha(x) \in M \otimes B\}$$

と定めると，次が成り立つ．

1. $\mathcal{L}(L)$ は左余イデアル，$\mathcal{M}(B)$ は中間部分因子環である．

2. 写像 $\mathcal{L}: \mathcal{I}(M, M^\alpha) \to \mathcal{L}(\mathbb{G})$，$\mathcal{M}: \mathcal{L}(\mathbb{G}) \to \mathcal{I}(M, M^\alpha)$ は互いに逆写像である，すなわち $\mathcal{M} \circ \mathcal{L} = \mathrm{id}$，$\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = \mathrm{id}$ が成り立つ．

3. M から中間部分因子環 L の上への条件付き期待値が存在する必要十分条件は，$L^\infty(\mathbb{G})$ から左余イデアル $\mathcal{L}(L)$ の上への Haar 状態を保存する条件付き期待値が存在することである．

最後の (3) については，作用と不変状態のモジュラー自己同型についての等式 $\alpha \circ \sigma_t^\varphi = (\sigma_t^\varphi \otimes \tau_{-t}) \circ \alpha$ を用いた議論によりこれが従うことが分かります (τ_t はコンパクト量子群の scaling 自己同型)．

4 補足

$\alpha: M \to M \otimes L^\infty(SU_q(2))$ を極小作用とします．$SU_q(2)$ の左余イデアルとして，Podleś 球面を取ります．極大トーラスによる等質空間 $SU_q(2)/\mathbb{T}$ でない Podleś 球面には Haar 状態を保存する条件付き期待値が落ちないことが，モジュラー自己同型群の簡単な計算で分かります．特に対応する中間部分因子環には M から条件付き期待値が落ちません (注: 実際はこの事実の証明には上記定理は必要ありません)．まとめると

命題 4.1 既約で離散的な包含 $N \subset M$ であって，ある中間部分因子環 $N \subset L \subset M$ には M から条件付き期待値が落ちないものが存在する．

参考文献

[1] H. Araki, D. Kastler, R. Haag and M. Takesaki, *Extension of KMS states and chemical potential*, Comm. Math. Phys. **53** (1977), no. 2, 97–134.

[2] H. Choda, *A Galois correspondence in a von Neumann algebra*, Tôhoku Math. J. (2) **30** (1978), no. 4, 491–504.

[3] M. Izumi, R. Longo and S. Popa, *A Galois correspondence for compact groups of automorphisms of von Neumann algebras with a generalization to Kac algebras*, J. Funct. Anal. **155** (1998), no. 1, 25–63.

[4] A. Kishimoto, *Remarks on compact automorphism groups of a certain von Neumann algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **13** (1977/78), no. 2, 573–581.

[5] Y. Nakagami and M. Takesaki, *Duality for crossed products of von Neumann algebras*, Lecture Notes in Mathematics, 731. Springer, Berlin, 1979. ix+139 pp.

[6] M. Nakamura and Z. Takeda, *A Galois theory for finite factors*, Proc. Japan Acad. **36** 1960 258–260.

[7] P. Podleś, *Quantum spheres*, Lett. Math. Phys. **14** (1987), no. 3, 193–202.

[8] J.E. Roberts, *Cross products of von Neumann algebras by group duals*, Symposia Mathematica, Vol. **XX** (1976), pp. 335–363. Academic Press, London.

[9] M. Takesaki, *Conditional expectations in von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **9** (1972), 306–321.

[10] R. Tomatsu, *A Galois correspondence for compact quantum group actions*, to appear in arXiv.

[11] Y. Ueda, *A minimal action of the compact quantum group* $\mathrm{SU}_q(n)$ *on a full factor*, J. Math. Soc. Japan **51** (1999), no. 2, 449–461.

[12] S. Yamagami, *Modular theory for bimodules*, J. Funct. Anal. **125** (1994), no. 2, 327–357.

[13] S. L. Woronowicz, *Compact quantum groups*, Symétries quantiques (Les Houches, 1995), 845–884, North-Holland, Amsterdam, (1998).