数理解析研究所講究録
第 1593 巻 2008 年 31-35

群上のある2変数方程式による群の特徴づけ

室蘭工業大学・工学部　千吉良直紀 (Naoki Chigira)
Muroran Institute of Technology

1 Introduction

Gを有限群とする。

$$\begin{array}{cccc} f: & G\times G & \longrightarrow & G \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x,z) & \longmapsto & z^{-1}[xz^{-1}x^{-1}, x^{-1}zx] \end{array}$$

という写像を考える。ここで、交換子は $[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab$ とする。この写像を使って群の構造を調べたいというのが今回の話題の主題である。

$f(1,a^{-1})=a$ なので、f は全射であることがわかる。そこで、$a\in G$ に対して、

$$\mathfrak{X}_G(a)=f^{-1}(a)=\{(x,z)\in G\times G|f(x,z)=a\}$$

とおく。$\mathfrak{X}_G$ は $G\times G$ の分割を与えている。

Remark 1. (i) $f(x,z)=1 \iff z=[xz^{-1}x^{-1}, x^{-1}zx]$

(ii) $\{(x,a^{-1})|x\in C_G(a)\}\subseteq \mathfrak{X}_G(a)$ なので $|\mathfrak{X}_G(a)|\geq |C_G(a)|$ である。特に $\{(x,1)|x\in G\}\subseteq \mathfrak{X}_G(1)$ であり、$|\mathfrak{X}_G(1)|\geq|G|$ である。

Example 1. $x=(1,2,3,4,5)$, $z=(1,2,3)$ とおくと

$$[xz^{-1}x^{-1}, x^{-1}zx]=[(1,3,2)^{(1,5,4,3,2)}, (1,2,3)^{(1,2,3,4,5)}]=(1,2,3)=z$$

となるので、$G\supseteq A_5$ とすれば $((1,2,3,4,5),(1,2,3))\in\mathfrak{X}_G(1)$ となる。よって、$G\supseteq A_5$ であるときには

$$|\mathfrak{X}_G(1)|>|G|$$

となることがわかる。 □

$f(x,z)$ の式を変形することにより次が得られる。

Lemma 1. 次が成り立つ。

(i) $f(x,z)=(z^{-1})^{x[x^{-1},z]}[z,x]$.

(ii) $f(x,z)=([x,z](z^{-1})^{[z,x^2]})^{x^{-1}}$

このことから次がわかる。

Theorem 1. $|\mathfrak{X}_G(1)| > |G|$ ならば G は偶数位数である。

∵) $|\mathfrak{X}_G(1)| > 1$ ならば $z \neq 1$ であるような $(x,z) \in \mathfrak{X}_G(1)$ が存在する。Lemma 1 (i) より $[x,z] = (z^{-1})^{x[x^{-1},z]}$ であり、Lemma 1 (ii) より $[x,z] = z^{[z,x^2]}$ である。そこで、$t = [z,x^2][z,x^{-1}]x^{-1}$ とおくと、$z^t = z^{-1}$ となる。

G が奇数位数とすると、$C_G(z)$ も奇数位数である。上の式から $t^2 \in C_G(z)$ となるので、$t \in C_G(a)$ となり、$z \neq 1$ に矛盾する。したがって G は偶数位数である。 □

対偶をとれば次のことがわかる。

Corollary 1. G が奇数位数ならば、$|\mathfrak{X}_G(1)| = |G|$ である。

可解群に関しては一般に次のことが成り立つ。

Lemma 2. G が可解群ならば、$|\mathfrak{X}_G(1)| = |G|$ である。

∵) derived series を $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_l = 1$ とする。すなわち、$G_{i+1} = [G_i, G_i]$ とする。$z \neq 1$ とする。$z \in G_i$ かつ $z_i \notin G_{i+1}$ となるように i をとると、$[xz^{-1}x^{-1}, x^{-1}zx] \in G_{i+1}$ であるから $z \neq 1$ ならば $z \neq [xz^{-1}x^{-1}, x^{-1}zx]$ である。([2] も参照のこと) □

Remark 2. (i) 後で述べるように G が非可換単純群であるとき $|\mathfrak{X}_G(1)| > |G|$ となることを有限単純群の分類定理を用いて示すことが出来る。

(ii) 非可解群でも $|\mathfrak{X}_G(1)| = |G|$ となる群が存在する。例えば $G = 2^4.SL(2,5)$ (non-split extension) で $|\mathfrak{X}_G(1)| = |G|$ を満たすものがある。

2 Background

どこから f のような写像が出て来たかについて触れたい。

$$u_1 = u_1(x,y) = x^{-2}y^{-1}x, \qquad u_{n+1} = u_{n+1}(x,y) = [xu_n^{-1}x^{-1}, yu_n^{-1}y^{-1}]$$

とおく。Bandman et. al は [1, 2] において次のことを示している。

Theorem 2 ([1, 2]). 次は同値である。

(i) G が可解群である。

(ii) 任意の $x, y \in G$ に対して $u_n(x,y) = 1$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する。

この定理を示す上で次のことが代数幾何などを用いて示されている。

Theorem 3 ([1, 2]). G を minimal simple group とするとき、$u_1(x,y) \neq 1$ かつ $u_1(x,y) = u_2(x,y)$ となる $x, y \in G$ が存在する。

さらに有限単純群の分類定理を用いて次が成り立つことが書かれている。

Theorem 4 ([2]). G が非可換単純群とする。このとき、$u_1(x,y) \neq 1$ かつ $u_1(x,y) = u_2(x,y)$ となる $x, y \in G$ が存在する。

さて、列 u_n において $z = yx$ とおいてみる。$u_1 = x^{-1}(x^{-1}y^{-1})x = x^{-1}z^{-1}x$, $u_2 = [x(x^{-1}zx)x^{-1}, zx^{-1}(x^{-1}zx)xz^{-1}] = [x^{-2}zx^2, z^{-1}]$ であるから

$$u_1 \neq 1 \iff z \neq 1$$

であり、また

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 &\iff x^{-1}z^{-1}x = [x^{-2}zx^2, z^{-1}] \\ &\iff x^{-1}zx = [z^{-1}, x^{-2}zx^2] \\ &\iff z = [xz^{-1}x^{-1}, x^{-1}zx] \end{aligned}$$

である。すなわち、Theorem 4 の主張は G が非可換単純群ならば $|\mathfrak{X}_G(1)| > |G|$ であるということになる。

3 $\mathfrak{X}_G(a)$

ここまで $|\mathfrak{X}_G(1)|$ に注目してきたが、もう少し一般に任意の $a \in G$ での様子を調べることにする。そのために少し準備をする。

Brauer は [3] において Frobenius の定理を証明する際に次のような同値関係 $\underset{H}{\approx}$ を与えている。G を群とし、H をその部分群とする。$x, y \in G$ に対して

$$x \underset{H}{\approx} y \iff \text{任意の } r \in \mathbb{Z} \text{ に対して } x^{-r}hy^r \in H \text{ となる } h \in H \text{ が存在する。}$$

Thompson は [5] においてある集合の個数を数え上げるときにこの同値関係と同等のものを用いていることに注意しておく。さて、Brauer は次のことを示している。

Theorem 5 ([3]). 上の記号のもとで

(i) $x \underset{H}{\approx} y \Leftrightarrow y = h^{-1}xdh$ となる $h \in H$, $d \in \cap_{r\in\mathbb{Z}} H^{x^r}$ が存在する。

(ii) $|\{y \in G | x \underset{H}{\approx} y\}| = |H|$

$$\mathfrak{X}_G(a, z) = \{x \in G | f(x, z) = a\}$$

とおく。

Lemma 3. $H = C_G(a) \cap C_G(z)$ とする。$x \in \mathfrak{X}_G(a, z)$, $y \in G$ を $x \underset{H}{\approx} y$ とすると、$y \in \mathfrak{X}_G(a, z)$ である。

すなわち、$\mathfrak{X}_G(a, z)$ は $\underset{H}{\approx}$-class のいくつかの和集合になる。これを用いて次のことがわかる。

Proposition 1. $a \in G$ に対して $|\mathfrak{X}_G(a)| \equiv 0 \pmod{|C_G(a)|}$ が成り立つ。

4 Decomposition by $\mathfrak{X}_G$

はじめに述べたように $\mathfrak{X}_G$ により $G \times G$ は $a \in G$ で index 付けされた $|G|$ 個の集合に分割される。ここでは分割の様子に注目する。

Example 1. $G = S_3$ とするとき、

$$\mathfrak{X}_G((1)) = \{(x, (1)) | x \in G\}$$
$$\mathfrak{X}_G((1,2,3)) = \{(x, (1,3,2)) | x \in G\}$$
$$\mathfrak{X}_G((1,2)) = \left\{ \begin{array}{ll} ((1),(1,2)) & ((1,2),(1,2)) \\ ((1,3),(1,2)) & ((2,3),(1,2)) \\ ((1,2,3),(1,3)) & ((1,3,2),(2,3)) \end{array} \right\}$$

となり、任意の $a \in G$ に対して $|\mathfrak{X}_G(a)| = |G|$ であることがわかる。

このように均等に分割されていることがある。べき零群に関しては次のことが成り立つ。

Theorem 6. G をべき零群とするとき、任意の $a \in G$ に対して、$|\mathfrak{X}_G(a)| = |G|$ が成り立つ。

Remark 3. $|\mathfrak{X}_G(a)| \neq |G|$ となる $a \in G$ をもつ可解群 G が存在する。例えば、$G = 3^2 : SL(2,3)$ はその 1 例である。このような例は位数の小さい群では極めて稀にしか存在していない。 □

Theorem 4 を用いると次のことが示せる。

Theorem 7. 任意の $a \in G$ に対して $|\mathfrak{X}_G(a)| = |G|$ であるとする。このとき、G は可解群である。

最後にいくつか問題を挙げておく。

Problem . (i) G が非可換単純群ならば $|\mathfrak{X}_G(1)| > |G|$ となること（すなわち、Theorem 4）を分類定理を使わずに示せ。

(ii) $|\mathfrak{X}_G(a)| \neq |G|$ となる $a \in G$ をもつ群 G を特徴づけよ。

(iii) Theorem 7 を分類定理を使わずに示せ。

参考文献

[1] T. Bandman, G. Greuel, F. Grunewald, B. Kunyavskiĭ, G. Pfister and E. Plotkin, Two-variable identities for finite solvable groups, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **337** (2003) 581–586.

[2] T. Bandman, G. Greuel, F. Grunewald, B. Kunyavskiĭ, G. Pfister and E. Plotkin, Identities for finite solvable groups and equations in finite simple groups, Compositio Math. **142** (2006) 734–764.

[3] R. Brauer, On a theorem of Frobenius, Amer. Math. Monthly **76** (1969) 12–15.

[4] N. Chigira, Equations over groups and solvability of finite groups, in preparation.

[5] J. Thompson, Some generalized characters, J. Algebra **179** (1996) 889–893.