数理解析研究所講究録
第 1597 巻 2008 年 56-61

On the singular limit methods

Hirokazu Ninomiya (Ryukoku University)
(二宮 広和・龍谷大学 理工学部)

1 はじめに

極限問題は，さまざまな分野の多くの場面で現れる．方程式が小さなパラメータや大きなパラメータを含むことはよくある．方程式を導出する際，小さな係数を含む項を他の項と較べて小さいものとして無視するとき，極限問題を取り扱っていることになる．また，いろんな効果が同時に含んだ系では，そのメカニズムは容易につかめない．そこで，系に含まれるパラメータが極端に大きい場合や小さい場合を考えて，方程式を簡略化するときも極限問題を用いている．この種の極限問題では，一つのメカニズムを強調して取り扱うため，隠れたメカニズムに注目することができる利点がある．本稿では，m 成分の反応拡散系

$$\boldsymbol{u}_t = D\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) \tag{1.1}$$

の摂動を考えてみよう．ここで，$\boldsymbol{u}(x,t) \in \mathbb{R}^m$ で，D は対角行列，$\boldsymbol{F}$ は $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^m$ への関数とする．摂動としては，ε は小さなパラメータとして，

$$\boldsymbol{u}_t = (D_0 + \varepsilon D_1)\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{u}) + \varepsilon \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u}) \tag{1.2}$$

や

$$\boldsymbol{u}_t = D_0\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u}) \tag{1.3}$$

あるいはそれらの組み合わせなどが考えられる．大雑把に言って，(1.2) で $D_0 = 0$ の場合や (1.3) は特異摂動となっている．どちらの場合も拡散係数 (微分の最高次の係数) に ε を含んでいると言うことができる．本稿では，特異極限法についての入門的な解説と形式的な導出を行う．

2 正則摂動と特異摂動

以下のような方程式

$$2u - u^2 + \varepsilon = 0 \tag{2.1}$$

を考えてみよう．(2.1) の定常解は，$\varepsilon = 0$ のとき，$0, 2$ であり，ε が 0 に十分近いときは，

$$u = 1 \pm \sqrt{1+\varepsilon} = 1 \pm \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \cdots\right) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \cdots, \\ -\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \cdots \end{cases}$$

となる．上式は $\varepsilon=0$ でも連続的に接続されるので，これは正則摂動となっている．解が，

$$u(x)=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon^2 u_2(x)+\cdots \tag{2.2}$$

と展開できることを意味している．これが，"通常" の摂動である．しかし，正則摂動であっても，小さな摂動の影響が小さいとは限らない．例えば，常微分方程式系

$$\begin{aligned} u_t &= (u-v)^3-u, \\ v_t &= (u-v)^3-v \end{aligned}$$

のすべての解は，$(0,0)$ に収束するが，小さな摂動を加えた系

$$\begin{aligned} u_t &= (u-v)^3-u, \\ v_t &= (u-v)^3-v-\varepsilon v \end{aligned}$$

は，有限時間に爆発するような解をもつことが知られている ([4] 参照)．このような2つの系でも，十分小さな時間の区間 $[0,T]$ では，同じ初期値をもつ２つの方程式の解は近い．この例では，範囲 T が初期値に依存している．摂動を考える際には,「どのような状況や範囲を考えているのか」,「どのような効果を見たいのか」をはっきりとさせる必要がある．

正則でない摂動 (特異摂動) では，(2.2) の展開では十分ではない．拡散係数が小さくなるとき，拡散を無視できる部分と $\varepsilon\Delta u$ が他の項と同じぐらいの大きさになる部分に分ける必要が生じる．つまり，

$$u=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon^2 u_2(x)+\cdots+U_0(x/\varepsilon)+\varepsilon U_1(x/\varepsilon)+\varepsilon^2 U_2(x/\varepsilon)+\cdots \tag{2.3}$$

の形に展開する必要がある．後半の項は，解をある点 (この場合は原点) を中心に拡大して見る必要があることを意味している．

3 自由境界値問題

ここでは，以下のような方程式を考える．m,n は1以上の整数，d_1,d_2 は正の定数として，

$$\begin{cases} u_t = d_1\Delta u+f(u)-\dfrac{1}{\varepsilon}u^m v^n, \\ \\ v_t = d_2\Delta v+g(v)-\dfrac{1}{\varepsilon}u^m v^n \end{cases} \tag{3.1}$$

を考えよう．これは，$m=n=1$，$f(u)=u(a_1-b_1u)$，$g(v)=v(a_2-b_2v)$ のとき，拡散競争系となっている．両辺に ε をかけて，$\varepsilon\to 0$ としよう．εu_t，$\varepsilon\Delta u$，$\varepsilon f(u)$ などが小さくなると考えると，形式的に

$$uv=0$$

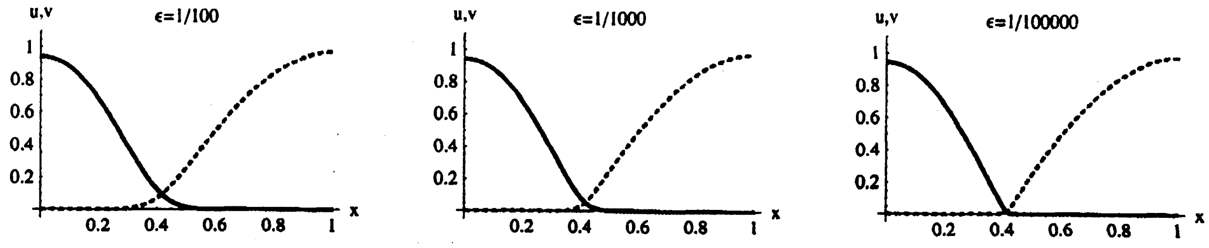

図 1: εによる (3.1) の解の形状の変化. $f(u) = u(1-u), g(v) = v(1-v), d_1 = 0.1, d_2 = 0.1$ のときの u, v を実線 (青), 破線 (赤) で描いている.

となる. 実際, 数値計算を行うと図 3 のようになる.

図 3 から分かるように, ε が小さくなるにつれて, ある領域で u が 0 となり, その補集合で, v が 0 に収束していくと予想できる. すると, その境界の運動を記述する自由境界値問題を求める必要が出てくる.

簡単のために $f = g = 0$ で空間次元は 1 としよう. まず, 拡散項が比較的小さい領域, つまり, 自由境界から離れた領域に関して考えよう. そこでは, 正則な摂動なので,

$$\begin{aligned} u &= u_0(x,t) + \varepsilon u_1(x,t) + \varepsilon^2 u_2(x,t) + \cdots \\ v &= v_0(x,t) + \varepsilon v_1(x,t) + \varepsilon^2 v_2(x,t) + \cdots \end{aligned}$$

と展開してしてよい. これを (3.1) に代入すると

$$\begin{aligned} & u_{0t} + \varepsilon u_{1t} + \varepsilon^2 u_{2t} + \cdots \\ & \quad = d_1(u_{0xx} + \varepsilon u_{1xx} + \varepsilon^2 u_{2xx} + \cdots) \\ & \qquad -\frac{1}{\varepsilon}(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots)^m (v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \cdots)^n, \\ & v_{0t} + \varepsilon v_{1t} + \varepsilon^2 v_{2t} + \cdots \\ & \quad = d_2(v_{0xx} + \varepsilon v_{1xx} + \varepsilon^2 v_{2xx} + \cdots) \\ & \qquad -\frac{1}{\varepsilon}(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots)^m (v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \cdots)^n \end{aligned}$$

となる. ε に関する係数比較を行うと, ε^{-1} の項から

$$u_0(x,t)^m v_0(x,t)^n = 0$$

が得られる. これより, $u_0 > 0$ のとき, $v_0 = 0$ で, 逆に $v_0 > 0$ のとき, $u_0 = 0$ が従う. つまり, 図のように領域 $\Omega_1(t) = \{x \mid u(x,t) > 0\}$ と $\Omega_2(t) = \{x \mid v(x,t) > 0\}$ の 2 つの領域に分かれることを意味している. 次の項は ε によらない項 (ε^0 の係数) である. 右辺最後の項をテーラー展開すると

$$\begin{aligned} u_{0t} &= d_1 u_{0xx} - n u_0^m v_0^{n-1} v_1 - m u_0^{m-1} u_1 v_0^n, \\ v_{0t} &= d_2 v_{0xx} - n u_0^m v_0^{n-1} v_1 - m u_0^{m-1} u_1 v_0^n \end{aligned}$$

が得られる．各領域 $\Omega_j(t)$ での方程式を導こう．Ω_1 では，$v_0 = 0$ なので，

$$u_{0t} = d_1 u_{0xx} \quad \text{in} \quad \Omega_1(t)$$

となる．同様に $\Omega_2(t)$ でも

$$v_{0t} = d_2 v_{0xx} \quad \text{in} \quad \Omega_2(t)$$

となる．また，自由境界上では

$$u_0(x,t) = v_0(x,t) = 0 \tag{3.2}$$

となる．

次に，自由境界の近くに注目しよう．ここでは，拡散項を無視できない．従って，(3.2) に注意すると

$$\begin{aligned} u &= U_0(x/\varepsilon) + \varepsilon U_1(x/\varepsilon) + \varepsilon^2 U_2(x/\varepsilon) + \cdots \\ v &= V_0(x/\varepsilon) + \varepsilon V_1(x/\varepsilon) + \varepsilon^2 V_2(x/\varepsilon) + \cdots \end{aligned}$$

とできそうであるが，これでは，うまく求められない．方程式の ε と自由境界を拡大する幅の ε が必ずしも一致しないためである．そこで，境界の位置を $x = \ell(t)$ とし，y を x, t の関数として $y = (x - \ell(t))/\delta$ で定義する．これを変数として，

$$\begin{aligned} u(x,t) &= U_0(y) + \delta U_1(y) + \delta^2 U_2(y) + \cdots \\ v(x,t) &= V_0(y) + \delta V_1(y) + \delta^2 V_2(y) + \cdots \end{aligned}$$

を代入して，δ を求めよう．まず，自由境界値の近くでは u, v が 0 に収束していることから，

$$U_0 = V_0 = 0$$

に注意すると，

$$\begin{aligned} &-\ell'(t)U_1'(y) - \ell'(t)\delta U_2'(y) - \ell'(t)\delta^2 U_3'(y) + \cdots \\ &= \frac{d_1}{\delta} U_1''(y) + d_1 U_2''(y) + d_1 \delta U_3''(y) + \cdots \\ &\quad - \frac{\delta^{m+n}}{\varepsilon} (U_1(y) + \delta U_2(y) + \cdots)^m (V_1(y) + \delta V_2(y) + \cdots)^n \\ &-\ell'(t)V_1'(y) - \ell'(t)\delta V_2'(y) - \ell'(t)\delta^2 V_3'(y) + \cdots \\ &= \frac{d_2}{\delta} V_1''(y) + d_2 V_2''(y) + d_2 \delta V_3''(y) + \cdots \\ &\quad - \frac{\delta^{m+n}}{\varepsilon} (U_1(y) + \delta U_2(y) + \cdots)^m (V_1(y) + \delta V_2(y) + \cdots)^n \end{aligned}$$

が得られる．左辺の δ の次数の最も小さい項は，$-\ell'(t)U_1'(y)$ であり，右辺の最低次の項は，$\frac{d_1}{\delta}U_1''(y)$ であり後者の方が大きくなる．また，右辺の $-\frac{\delta^{m+n}}{\varepsilon}U_1^m V_1^n$ は，δ と ε の関係によっては大きくなりうるので，これらが δ に関して同じ次数になるとすると

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\delta^{m+n}}{\varepsilon}$$

より

$$\delta = \varepsilon^{1/(m+n+1)}$$

が得られる．$\delta^{-1/(m+n+1)}$ の項の係数比較より，

$$\begin{aligned} 0 &= d_1 U_1''(y) - U_1^m(y)V_1^n(y) \\ 0 &= d_2 V_1''(y) - U_1^m(y)V_1^n(y) \end{aligned}$$

が得られ，

$$d_1 U_1''(y) = d_2 V_1''(y)$$

となる．これを y について $(-\infty,\infty)$ で積分しよう．これは自由境界の近辺を意味している．すると，

$$d_1(U_1'(\infty) - U_1'(-\infty)) = d_2(V_1'(\infty) - V_1'(-\infty))$$

となる．$x = \ell(t) \pm 0$ は $y = \pm\infty$ に対応するので，$U_1'(\pm\infty), V_1'(\pm\infty)$ は，先に求めた u_0, v_0 から与えられる．

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\ell(t)\pm 0} u_{0x}(x,t) &= \lim_{y\to\pm\infty} U_1'(y), \\ \lim_{x\to\ell(t)\pm 0} v_{0x}(x,t) &= \lim_{y\to\pm\infty} V_1'(y) \end{aligned}$$

となる．こうして，

$$d_1[u_x(x,t)]_{\ell(t)-0}^{\ell(t)+0} - d_2[v_x(x,t)]_{\ell(t)-0}^{\ell(t)+0} = 0$$

という自由境界条件が導き出せた．以上をまとめると，$\Omega_1(t) = \{0 < x < \ell(t)\}, \Omega_2(t) = \{\ell(t) < x < 1\}$ のとき，

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx}, \quad v = 0 & (0 < x < \ell(t)), \\ v_t = d_2 v_{xx}, \quad u = 0 & (\ell(t) < x < 1), \\ u_x = v_x = 0 & (x = 0, 1), \\ -d_1 u_x(\ell(t)-0,t) - d_2 v_x(\ell(t)+0,t) = 0, & \\ u(\ell(t)-0,t) = v(\ell(t)+0,t) = 0 & \end{cases}$$

という 2 相ステファン問題のような自由境界値問題になっている．この計算は，“弱い” 意味では数学的に示すことができる ([1] 参照)．しかし，上で求めたように境界の幅と

εの関係などは分かっていない．この例では，極限方程式の解は，自由境界$x=\ell(t)$で連続になっているが，$d_1=0$なら，U_0が0ではなくなり遷移層が現れ，1相ステファン問題に帰着される．

最後に，以下のような例を考えてみよう．

$$\begin{aligned} u_t &= d_1\Delta u + \frac{1}{\varepsilon}(v-u), \\ v_t &= d_2\Delta v + \frac{1}{\varepsilon}(u-v). \end{aligned}$$

ここで，$0<d_1<d_2$としておくと，拡散の小さな物質と大きな物質が2種類あり，それらが互いに変化し合う状況を表した方程式になっている．ここで，$\varepsilon\to 0$とすると，この解は，u,vとは異なる拡散をもった解に収束する．実際，$w=u+v$とおくと，

$$w_t = d_1\Delta u + d_2\Delta v$$

である．一方，$\varepsilon\to 0$とすると，先に述べたように，$u-v\to 0$となると考えられるので，$u=w/2, v=w/2$に収束すると想像できる．これを代入すると，

$$w_t = \frac{d_1+d_2}{2}\Delta w$$

が得られる．これは，最初の物質u,vとは異なる拡散効果をもった物質のように振る舞うことを意味している．これを用いて，[2]では，交差拡散誘導不安定性とチューリング不安定性の関係を調べている．

参考文献

[1] E.N. Dancer, D. Hilhorst, M. Mimura, and L.A. Peletier, Spatial segregation limit of a competition-diffusion system. *European J. Appl. Math.*, **10** (1999), 97–115.

[2] M. Iida, M. Mimura and H. Ninomiya, Diffusion, cross-diffusion and competitive interaction, *J. Math. Biol.* **53** (2006), no. 4, 617-641.

[3] J.P. キーナー (坂元訳), 応用数学 上, 下, (2007) 日本評論社

[4] H. Ninomiya and H. F. Weinberger, On p-homogeneous systems of differential equations and their linear perturbations, *Applicable Analysis* **85** (2006), 225–246

[5] 太田 隆夫, 界面ダイナミクスの数理, (1997) 日本評論社

[6] J. E. Taylor and J. W. Cahn, Diffuse interfaces with sharp corners and facets: Phase field models with strongly anisotropic surfaces, *Physica D* **112** (1998), 381–411.