数理解析研究所講究録
第 1603 巻 2008 年 25-37

Bayes estimation under the LINEX loss

筑波大・数理物質　大谷内奈穂 (Nao Ohyauchi)
(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

1. はじめに

通常, 推定量の Bayes リスクを考えるときには, 損失関数として 2 乗損失を考えることが多く, リスクの評価を解析的に行うときには便利である ([V79], [AO02], [AO03], [O04]). 実際, 滑らかな損失関数と事前一様分布に関する Bayes 推定量の漸近展開を得ることができ, また, 2 乗損失の場合に推定量の Bayes リスクに関する情報不等式を導出し, その達成についても考えることができる ([AO02]). しかし, 正則条件件が必ずしも成り立たないような非正則の場合には, 2 乗損失のような対称な損失関数よりも, むしろ非対称な損失関数を考える必要があると思われる. そこで, 本論では, 非対称損失関数の典型として, 線形指数 (linear exponential, 略して LINEX) 損失関数を考え, 切断分布族の場合に, LINEX 損失とある事前分布に関する Bayes 推定量を求め, その Bayes リスクも求める. そして, それと最尤推定量等の Bayes リスクを漸近的に比較する. また, 両側指数分布の場合についても考察する.

2. LINEX 損失に関する Bayes 推定量

確率ベクトル $\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ の (ルベーグ測度に関する) 同時密度を $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}, \theta)$ とする. ただし, $\boldsymbol{x} := (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\theta \in \Theta = \mathbf{R}^1$ とする. いま, $\boldsymbol{X}$ に基づく θ の推定量を $\delta(\boldsymbol{X})$ とし, $\pi(\theta)$ を Θ 上の事前密度とする. ここで, 損失関数として次の形の LINEX 損失

$$L(\theta, d) = \beta\{e^{\alpha(d-\theta)} - \alpha(d-\theta) - 1\} \quad (d \in \mathbf{R}^1; \alpha > 0, \beta > 0)$$

を考える. このような LINEX 損失は Varian[V75] によって導入され, Zellner[Z86] は正規分布の平均の推定問題において, LINEX 損失の下で, Bayes 推定量を求め, その Bayes リスクを計算した. その結果, 標本平均は非許容的になることが分かり, それは, 2 乗損失の下では標本平均が許容的であることと異なる結果になることに注意. また, Sakairi and Akahira[SA05] は, 非対称で非有界な LINEX 損失の下で, 最良位置共変推定量, 最良位置尺度共変推定量の導出方法について論じ, 具体例として正規分布, 一様分布の場合を挙げた. さらに, 未知の分散をもつ正規分布の場合に最良位置尺度共変推定量を導出した.

いま, 推定量 $\delta(\boldsymbol{X})$ の LINEX 損失と π に関する Bayes リスク $r(\delta)$ は

$$\begin{aligned}
r(\delta) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \beta\left\{e^{\alpha(\delta(\boldsymbol{x})-\theta)} - \alpha(\delta(\boldsymbol{x})-\theta) - 1\right\} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}, \theta) dx_1 \cdots dx_n \pi(\theta) d\theta \\
&= \beta\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\delta(\boldsymbol{x})}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\theta} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}, \theta)\pi(\theta) d\theta\right) dx_1 \cdots dx_n \right.\\
&\qquad \left. - \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha\delta(\boldsymbol{x}) + 1)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}, \theta)\pi(\theta) d\theta\right) dx_1 \cdots dx_n\right.
\end{aligned}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\alpha\left(\int_{-\infty}^{\infty}\theta f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta)\pi(\theta)d\theta\right)dx_1\cdots dx_n\Big]$$

となる．このとき

$$A(\boldsymbol{x}) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\theta} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta)\pi(\theta)d\theta, \tag{2.1}$$

$$B(\boldsymbol{x}) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta)\pi(\theta)d\theta, \tag{2.2}$$

$$C(\boldsymbol{x}) := \int_{-\infty}^{\infty} \theta f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta)\pi(\theta)d\theta \tag{2.3}$$

とすれば，

$$r(\delta) = \beta\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left\{e^{\alpha\delta(\boldsymbol{x})}A(\boldsymbol{x}) - (\alpha\delta(\boldsymbol{x})+1)B(\boldsymbol{x}) + \alpha C(\boldsymbol{x})\right\}dx_1\cdots dx_n \tag{2.4}$$

となる．このとき，次の定理を得る．

定理 1 LINEX 損失と事前密度 π に関する Bayes 推定量は

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{\alpha}\log\frac{B(\boldsymbol{X})}{A(\boldsymbol{X})}$$

で与えられる．また，その Bayes リスクは

$$r(\delta^*) = \beta\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha C(\boldsymbol{x}) - B(\boldsymbol{x})\log\frac{B(\boldsymbol{x})}{A(\boldsymbol{x})}\right)dx_1\cdots dx_n$$

である．

証明については，各 $\boldsymbol{x}$ について (2.4) の右辺の被積分関数を最小にする δ を求めればよい．

3. 左片側切断分布族の場合

まず，$X_1,\cdots,X_n$ をたがいに独立に，いずれも次の形の密度

$$f(x,\theta) = \begin{cases} S(\theta)e^{U(x)} & (x>\theta), \\ 0 & (x\le\theta) \end{cases}$$

をもつ左片側切断分布に従う確率変数とする．ただし，$U(x)$ は x のみの関数で，$S(\theta)$ は θ に依存する正規化定数とする．このとき，この分布の母数 θ に対する完備十分統計量は $X_{(1)} := \min_{1\le i\le n} X_i$ となり，これに基づく一様最小分散不偏推定量も存在することが知られていて ([VN93])，不偏推定量の分散に対する情報不等式の導出とその達成についても論じられている ([AO07])．いま，確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ の同時密度 $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta)$ は

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \begin{cases} S^n(\theta)e^{\sum_{i=1}^{n}U(x_i)} & (x_{(1)}>\theta), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$= S^n(\theta)\chi_{\{x_{(1)}>\theta\}}(\boldsymbol{x})e^{\sum_{i=1}^n U(x_i)}$$

となる. ただし, $x_{(1)} := \min_{1\le i\le n} x_i$ とし, χ は定義関数を表すものとする. ここで, (2.1)〜(2.3) より, $A(\boldsymbol{x})$, $B(\boldsymbol{x})$, $C(\boldsymbol{x})$ はそれぞれ

$$A(\boldsymbol{x}) = e^{\sum_{i=1}^n U(x_i)} \int_{-\infty}^{x_{(1)}} e^{-\alpha\theta} S^n(\theta)\pi(\theta)d\theta =: e^{\sum_{i=1}^n U(x_i)} A_1(x_{(1)}), \tag{3.1}$$

$$B(\boldsymbol{x}) = e^{\sum_{i=1}^n U(x_i)} \int_{-\infty}^{x_{(1)}} S^n(\theta)\pi(\theta)d\theta =: e^{\sum_{i=1}^n U(x_i)} B_1(x_{(1)}), \tag{3.2}$$

$$C(\boldsymbol{x}) = e^{\sum_{i=1}^n U(x_i)} \int_{-\infty}^{x_{(1)}} \theta S^n(\theta)\pi(\theta)d\theta =: e^{\sum_{i=1}^n U(x_i)} C_1(x_{(1)}) \tag{3.3}$$

となるので, 定理 1 から次の系を得る.

系 1 LINEX 損失と事前密度 π に関する Bayes 推定量は

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{\alpha}\log\frac{B_1(X_{(1)})}{A_1(X_{(1)})}$$

で与えられる. ただし, $X_{(1)} := \min_{1\le i\le n} X_i$ とする. また, Bayes リスクは

$$r(\delta^*) = \beta\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^n U(x_i)}\left\{\alpha C_1(x_{(1)}) - B_1(x_{(1)})\log\frac{B_1(x_{(1)})}{A_1(x_{(1)})}\right\}dx_1\cdots dx_n$$

である.

例 1 $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に, いずれも密度

$$f(x,\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & (x>\theta), \\ 0 & (x\le\theta) \end{cases}$$

をもつ指数分布に従う確率変数とする. このとき, θ の最尤推定量 (MLE) は $\hat\theta_{ML} = X_{(1)}$ になる. ここで, $n > \alpha$ とし, 事前密度 $\pi(\theta)$ として一般一様密度 $\pi(\theta)\equiv 1$ を取る. このとき, $S(\theta) = e^\theta$ より, (3.1)〜(3.3) から

$$A_1(x_{(1)}) = \frac{1}{n-\alpha}e^{(n-\alpha)x_{(1)}},\quad B_1(x_{(1)}) = \frac{1}{n}e^{nx_{(1)}},\quad C_1(x_{(1)}) = \frac{1}{n}x_{(1)}e^{nx_{(1)}} - \frac{1}{n^2}e^{nx_{(1)}}$$

となるので, 系 1 より一般 Bayes 推定量 δ^* は

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = X_{(1)} + \frac{1}{\alpha}\log\frac{n-\alpha}{n} \tag{3.4}$$

になることが分かる. ここで, δ^* の Bayes リスクは, $\bar{x} := (1/n)\sum_{i=1}^n x_i$ とすると

$$\begin{aligned} r(\delta^*) &= \frac{\beta}{n}\left(\log\frac{n}{n-\alpha} - \frac{\alpha}{n}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n(\bar{x}-x_{(1)})}dx_1\cdots dx_n \\ &= \frac{1}{2}\frac{\alpha^2\beta}{n^3}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n(\bar{x}-x_{(1)})}dx_1\cdots dx_n + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

$$= \infty$$

となり, 一般 Bayes 推定量 δ^* のリスクは発散してしまう. そこで, 事後リスクを用いて, 一般 Bayes 推定量 δ^* と MLE $\hat{\theta}_{ML}$ を比較することを考える. いま, 事後密度 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$ は

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x}) = \frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta)\pi(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{e^{-n(\bar{x}-\theta)}}{(1/n)e^{-n(\bar{x}-x_{(1)})}} = ne^{n(\theta-x_{(1)})} \qquad (\theta < x_{(1)})$$

となるので, 一般 Bayes 推定量 δ^* の事後リスク $r(\delta^*|\boldsymbol{x})$ は

$$\begin{aligned}
r(\delta^*|\boldsymbol{x}) &= \int_{-\infty}^{x_{(1)}} \beta\left\{e^{\alpha(\delta^*(\boldsymbol{x})-\theta)} - \alpha(\delta^*(\boldsymbol{x})-\theta) - 1\right\} ne^{n(\theta-x_{(1)})}d\theta \\
&= n\beta e^{-nx_{(1)}} \int_{-\infty}^{x_{(1)}} \left\{\frac{B_1(x_{(1)})}{A_1(x_{(1)})}e^{-\alpha\theta} - \log\frac{B_1(x_{(1)})}{A_1(x_{(1)})} + \alpha\theta - 1\right\} e^{n\theta}d\theta \\
&= -\beta\log\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) - \frac{\alpha\beta}{n} \\
&= \frac{\alpha^2\beta}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

となる. 一方, MLE $\hat{\theta}_{ML}$ の事後リスク $r(\hat{\theta}_{ML}|\boldsymbol{x})$ は

$$\begin{aligned}
r(\hat{\theta}_{ML}|\boldsymbol{x}) &= \int_{-\infty}^{x_{(1)}} \beta\left\{e^{\alpha(x_{(1)}-\theta)} - \alpha(x_{(1)}-\theta) - 1\right\} ne^{n(\theta-x_{(1)})}d\theta = \frac{\alpha^2\beta}{n(n-\alpha)} \\
&= \frac{\alpha^2\beta}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

となるので,

$$n^2\left(r(\hat{\theta}_{ML}|\boldsymbol{x}) - r(\delta^*|\boldsymbol{x})\right) = \frac{1}{2}\alpha^2\beta + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

となり, $1/n^2$ のオーダーで一般 Bayes 推定量 δ^* は MLE $\hat{\theta}_{ML}$ の半分の事後リスクをもつことが分かる.

次に, 事前密度として, $\pi(\theta) = e^\theta$ $(\theta < 0)$ を考える. このとき, (3.1)〜(3.3) より

$$A_1(x_{(1)}) = \begin{cases} \frac{1}{n-\alpha+1}e^{(n-\alpha+1)x_{(1)}} & (x_{(1)} < 0), \\ \frac{1}{n-\alpha+1} & (x_{(1)} \geq 0), \end{cases}$$

$$B_1(x_{(1)}) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}e^{(n+1)x_{(1)}} & (x_{(1)} < 0), \\ \frac{1}{n+1} & (x_{(1)} \geq 0), \end{cases}$$

$$C_1(x_{(1)}) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}x_{(1)}e^{(n+1)x_{(1)}} - \frac{1}{(n+1)^2}e^{(n+1)x_{(1)}} & (x_{(1)} < 0), \\ -\frac{1}{(n+1)^2} & (x_{(1)} \geq 0) \end{cases}$$

となるので, 系 1 より Bayes 推定量は

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} X_{(1)} + \frac{1}{\alpha}\log\frac{n-\alpha+1}{n+1} & (X_{(1)} < 0), \\ \frac{1}{\alpha}\log\frac{n-\alpha+1}{n+1} & (X_{(1)} \geq 0) \end{cases} \tag{3.5}$$

になることが分かる. さらに, Bayes リスク $r(\delta^*)$ は, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ とすると

$$\begin{aligned} r(\delta^*) &= \frac{\beta}{n+1}\left(\log\frac{n+1}{n-\alpha+1} - \frac{\alpha}{n+1}\right)\int\cdots\int_{\{\boldsymbol{x}|x_{(1)}<0\}} e^{-n\bar{x}}\cdot e^{(n+1)x_{(1)}}dx_1\cdots dx_n \\ &\quad - \frac{\beta}{n+1}\left(\log\frac{n-\alpha+1}{n+1} + \frac{\alpha}{n+1}\right)\int\cdots\int_{\{\boldsymbol{x}|x_{(1)}\geq 0\}} e^{-n\bar{x}}dx_1\cdots dx_n \\ &= \left\{\frac{\alpha^2\beta}{2n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right\}(n+1) \\ &= \frac{\alpha^2\beta}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

となる. ここで, MLE $X_{(1)}$ の Bayes リスク $r(X_{(1)})$ は

$$r(X_{(1)}) = \frac{\alpha^2\beta}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

となり, (3.6) と比較すれば, MLE の Bayes リスクは Bayes 推定量のそれの 2 倍になることが分かる.

例 2 まず, $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に, いずれも密度

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \gamma\theta^\gamma x^{-(\gamma+1)} & (x > \theta), \\ 0 & (x \leq \theta) \end{cases}$$

をもつ Pareto 分布に従う確率変数とする. ただし, $\gamma > 0$, $\theta > 0$, $\alpha < n$ とし, γ は既知で θ は未知とする. いま, 事前密度を $\pi(\theta) = ne^{-n\theta}$ とすると, $S(\theta) = \gamma\theta^\gamma$ より, (3.1)〜(3.3) から

$$\begin{aligned} A_1(x_{(1)}) &= \frac{n\gamma^n}{(\alpha+n)^{n\gamma+1}}\left(\Gamma(n\gamma+1) - \Gamma_{(\alpha+n)x_{(1)}}(n\gamma+1)\right), \\ B_1(x_{(1)}) &= \frac{\gamma^n}{n^{n\gamma}}\left(\Gamma(n\gamma+1) - \Gamma_{nx_{(1)}}(n\gamma+1)\right), \\ C_1(x_{(1)}) &= \frac{\gamma^n}{n^{n\gamma+1}}\left(\Gamma(n\gamma+2) - \Gamma_{nx_{(1)}}(n\gamma+2)\right) \end{aligned}$$

となるので, 系 1 より Bayes 推定量 δ^* は

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{\alpha}\left\{(n\gamma+1)\log\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) + \log\left(1 - \frac{\Gamma_{nX_{(1)}}(n\gamma+1)}{\Gamma(n\gamma+1)}\right) - \log\left(1 - \frac{\Gamma_{(\alpha+n)X_{(1)}}(n\gamma+1)}{\Gamma(n\gamma+1)}\right)\right\}$$

になる. ただし, $\Gamma(a)$ はガンマ関数, $\Gamma_b(a) := \int_b^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ $(a > 0,\ b > 0)$ は不完全ガンマ関数を表すものとする. ここで, a が正の整数の場合,

$$\frac{\Gamma_b(a)}{\Gamma(a)} = e^{-b}\sum_{k=0}^{a-1}\frac{1}{k!}b^k$$

より, Poisson 分布の裾確率の近似 ([J95]) を用いれば,

$$\begin{aligned}\delta^*(\boldsymbol{X}) &= \frac{1}{\alpha}\left\{\alpha X_{(1)} + \log\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) - \log\left(1-\exp\left(-\left|\log\frac{\gamma}{X_{(1)}}\right|\right)\right)\right.\\ &\qquad\left. + \log\left(1-\exp\left(-\left|\log\frac{n\gamma}{(\alpha+n)X_{(1)}}\right|\right)\right)\right\} + o_p(1)\\ &= \begin{cases} X_{(1)} + o_p(1) & \left(X_{(1)} \le \frac{n\gamma}{\alpha+n}, \gamma \le X_{(1)}\right),\\ \left(1+\frac{1}{\alpha\gamma}\right)X_{(1)} - \frac{\gamma}{\alpha}\frac{1}{X_{(1)}} + o_p(1) & \left(\frac{n\gamma}{\alpha+n} < X_{(1)} < \gamma\right)\end{cases}\end{aligned}$$

になることが分かる. また, n が十分大きいとき,

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = X_{(1)} + o_p(1),$$

$$B(x_{(1)}) = \begin{cases}\gamma^{n+1}P_{n,\gamma}x_{(1)}^{n\gamma}\frac{1}{\gamma-x_{(1)}}e^{-nx_{(1)}} + o_p(1) & (x_{(1)} < \gamma),\\ \gamma^n P_{n,\gamma}x_{(1)}^{n\gamma+1}\frac{1}{x_{(1)}-\gamma}e^{-nx_{(1)}} + o_p(1) & (x_{(1)} \ge \gamma),\end{cases}$$

$$C(x_{(1)}) = \begin{cases}\gamma^{n+1}Q_{n,\gamma}x_{(1)}^{n\gamma+1}\frac{1}{\gamma-x_{(1)}}e^{-nx_{(1)}} + o_p(1) & (x_{(1)} < \gamma),\\ \gamma^n Q_{n,\gamma}x_{(1)}^{n\gamma+2}\frac{1}{x_{(1)}-\gamma}e^{-nx_{(1)}} + o_p(1) & (x_{(1)} \ge \gamma)\end{cases}$$

となる. ただし,

$$P_{n,\gamma} := \frac{e^{n\gamma}\Gamma(n\gamma+1)}{\sqrt{2\pi}(n\gamma)^{1/2+n\gamma}},\quad Q_{n,\gamma} := \frac{e^{n\gamma+1}\Gamma(n\gamma+2)}{\sqrt{2\pi}(n\gamma)^{3/2+n\gamma}}$$

とする. よって, 系 1 より, δ^* の Bayes リスクは

$$\begin{aligned}r(\delta^*) =&\beta\left\{\int_{\{\boldsymbol{x}|x_{(1)}<\gamma\}}\prod_{i=1}^n\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\gamma+1}\left(-\gamma^{n+1}P_{n,\gamma}x_{(1)}^{n\gamma}\frac{1}{\gamma-x_{(1)}}e^{-nx_{(1)}}\alpha x_{(1)}\right.\right.\\ &\qquad\left.+\alpha\gamma^{n+1}Q_{n,\gamma}x_{(1)}^{n\gamma+1}\frac{1}{\gamma-x_{(1)}}e^{-nx_{(1)}}\right)d\boldsymbol{x}\\ &+\int_{\{\boldsymbol{x}|x_{(1)}\ge\gamma\}}\prod_{i=1}^n\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\gamma+1}\left(-\gamma^n P_{n,\gamma}x_{(1)}^{n\gamma+1}\frac{1}{x_{(1)}-\gamma}e^{-nx_{(1)}}\alpha x_{(1)}\right.\\ &\qquad\left.\left.+\alpha\gamma^n Q_{n,\gamma}x_{(1)}^{n\gamma+2}\frac{1}{x_{(1)}-\gamma}e^{-nx_{(1)}}\right)d\boldsymbol{x}\right\} + o_p(1)\end{aligned}$$

$$=n\alpha\beta\gamma e^{-n\gamma}(Q_{n,\gamma}-P_{n,\gamma})\left\{\gamma\int_0^\gamma \frac{1}{u}e^{nu}du+\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-nu}du\right\}+o_p(1)$$

と積分表示できる.

4. 位置母数をもつ切断分布族の場合

まず, $X_1,\cdots,X_n$ をたがいに独立に, いずれも密度 $f(x-\theta)$ をもつ分布に従う確率変数とする. ただし, $x\in\mathbf{R}^1$, $\theta\in\Theta=\mathbf{R}^1$ とする. ここで, 次の条件 (D1), (D2) を仮定する.

(D1) $f(x)>0$ $(x>0)$, $f(x)=0$ $(x\le 0)$ とし, $f(x)$ は3回連続微分可能とする.

(D2) $H:=\lim_{x\to 0+0}f(x)>0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $I_1:=-E_0[(d^2/dx^2)\log f(X)]<\infty$, $I_2:=E_0[(d^3/dx^3)\log f(X)]<\infty$ とする.

このとき, θ_0 を真の母数として, 確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ の同時密度 $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta)$ を $\theta=\theta_0$ の周りで Taylor 展開すると, $X_{(1)}\ge\theta$ について

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n f(X_i-\theta)&=\exp\left\{\sum_{i=1}^n\log f(X_i-\theta)\right\}\\&=\prod_{i=1}^n f(X_i-\theta_0)\exp\left[-\frac{t}{n}\sum_{i=1}^n\frac{d}{dx}\log f(X_i-\theta_0)\right.\\&\qquad+\frac{t^2}{2n}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{d^2}{dx^2}\log f(X_i-\theta_0)\right\}\\&\qquad\left.-\frac{t^3}{6n^2}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{d^3}{dx^3}\log f(X_i-\theta_0)\right\}+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=\prod_{i=1}^n f(X_i-\theta_0)\exp\left\{Ht-\frac{I_1}{2n}t^2-\frac{I_2}{6n^2}t^3+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\end{aligned}$$

になる. ただし, $\theta=\theta_0+(t/n)$ とする. ここで, $U:=n(X_{(1)}-\theta_0)$ として, 第2節において $\delta(\boldsymbol{X})$ を $\delta(\boldsymbol{X})-\theta_0$ と考えれば, (2.1)〜(2.3) より

$$\begin{aligned}A(\boldsymbol{X})&=\frac{1}{n}\prod_{i=1}^n f(X_i-\theta_0)\left[\int_{-\infty}^U e^{Ht}\left\{1-\frac{I_1}{2n}t^2-\frac{\alpha}{n}t-\frac{I_2}{6n^2}t^3+\frac{I_1^2}{8n^2}t^4+\frac{\alpha I_1}{2n^2}t^3+\frac{\alpha^2}{2n^2}t^2\right\}\right.\\&\qquad\left.\cdot\pi\left(\theta_0+\frac{t}{n}\right)dt+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=:\frac{1}{n}\prod_{i=1}^n f(X_i-\theta_0)\left\{A_{2,n}(U)+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}B(\boldsymbol{X})&=\frac{1}{n}\prod_{i=1}^n f(X_i-\theta_0)\left[\int_{-\infty}^U e^{Ht}\left\{1-\frac{I_1}{2n}t^2-\frac{I_2}{6n^2}t^3+\frac{I_1^2}{8n^2}t^4\right\}\pi\left(\theta_0+\frac{t}{n}\right)dt+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=:\frac{1}{n}\prod_{i=1}^n f(X_i-\theta_0)\left\{B_{2,n}(U)+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$C(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\prod_{i=1}^{n} f(X_i-\theta_0)\left[\int_{-\infty}^{U} e^{Ht}\left\{\frac{t}{n}-\frac{I_1}{2n^2}t^3\right\}\pi\left(\theta_0+\frac{t}{n}\right)dt + o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$=: \frac{1}{n}\prod_{i=1}^{n} f(X_i-\theta_0)\left\{C_{2,n}(U)+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} \tag{4.3}$$

となるので, 定理1より次の系を得る.
系 2 LINEX 損失と事前密度 π に関する Bayes 推定量は

$$\alpha\left(\delta^*(\boldsymbol{X})-\theta_0\right) = \log\frac{B_{2,n}(U)}{A_{2,n}(U)} + o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

で与えられる. ただし, $U := n(X_{(1)}-\theta_0)$ とする. また, Bayes リスクは

$$r(\delta^*) = \frac{\beta}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n} f(x_i-\theta_0)\left\{\alpha C_{2,n}(u) - B_{2,n}(u)\log\frac{B_{2,n}(u)}{A_{2,n}(u)}\right\}dx_1\cdots dx_n + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

である.
注意 事前密度 $\pi(\theta)$ に滑らかさを仮定して, 3回連続微分可能とすると

$$\pi\left(\theta_0+\frac{t}{n}\right) = \pi(\theta_0) + \frac{t}{n}\pi'(\theta_0) + \frac{t^2}{2n^2}\pi''(\theta_0) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

になる. このとき, (4.1), (4.2) より $A_{2,n}(U)$, $B_{2,n}(U)$ はそれぞれ

$$A_{2,n}(U) = M_0(U) + \frac{1}{n}M_1(U) + \frac{1}{n^2}M_2(U) + o_p\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$B_{2,n}(U) = M_0(U) + \frac{1}{n}N_1(U) + \frac{1}{n^2}N_2(U) + o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

の形で表現される. ただし,

$$M_0(U) := \int_{-\infty}^{U} e^{Ht}\pi(\theta_0)dt$$

で, $M_1(U)$, $M_2(U)$, $N_1(U)$, $N_2(U)$ は U の関数として積分表示される. このとき

$$\log A_{2,n}(U) = \log M_0(U) + \frac{M_1(U)}{nM_0(U)} + \frac{M_2(U)}{n^2M_0(U)} - \frac{M_1^2(U)}{2n^2M_0^2(U)} + o_p\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$\log B_{2,n}(U) = \log M_0(U) + \frac{N_1(U)}{nM_0(U)} + \frac{N_2(U)}{n^2M_0(U)} - \frac{N_1^2(U)}{2n^2M_0^2(U)} + o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となり

$$\log\frac{B_{2,n}(U)}{A_{2,n}(U)} = \frac{N_1(U)-M_1(U)}{nM_0(U)} + \frac{N_2(U)-M_2(U)}{n^2M_0(U)} - \frac{N_1^2(U)-M_1^2(U)}{2n^2M_0^2(U)} + o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

になる．よって，系 2 より

$$\alpha n(\delta^*(\boldsymbol{X})-\theta_0)=\frac{N_1(U)-M_1(U)}{M_0(U)}+\frac{N_2(U)-M_2(U)}{nM_0(U)}-\frac{N_1^2(U)-M_1^2(U)}{2nM_0^2(U)}+o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

になる．

例 1(続) $X_1,\cdots,X_n$ をたがいに独立に，いずれも密度

$$f(x,\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)} & (x>\theta),\\ 0 & (x\le\theta)\end{cases}$$

をもつ指数分布に従う確率変数とする．このとき，$H=1$, $I_1=I_2=0$ となる．ここで，事前密度を一般一様密度 $\pi(\theta)\equiv 1$ とする．このとき，(4.1)〜(4.3) から

$$A_{2,n}(U)=e^U-\frac{\alpha}{n}(U-1)e^U+\frac{\alpha^2}{2n^2}(U^2-2U+2)e^U,\quad B_{2,n}(U)=e^U,\quad C_{2,n}(U)=(U-1)e^U$$

となるので，系 2 より一般 Bayes 推定量 δ^* は

$$\alpha\left(\delta^*(\boldsymbol{X})-\theta_0\right)=\frac{\alpha}{n}(U-1)-\frac{\alpha^2}{2n^2}+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

より

$$\delta^*(\boldsymbol{X})=X_{(1)}-\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{2n^2}+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.4}$$

となる．一方，(3.4) から

$$\delta^*(\boldsymbol{X})=X_{(1)}+\frac{1}{\alpha}\log\frac{n-\alpha}{n}=X_{(1)}-\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{2n^2}+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

を得るので，(3.4) と (4.4) は $o_p(1/n^2)$ のオーダーまで漸近的に等しいことが分かる．

さらに，$n>\alpha$ とし，事前密度として $\pi(\theta)=e^\theta$ $(\theta<0)$ を取ると，(2.1)〜(2.3), (4.1)〜(4.3) より

$$A(\boldsymbol{X})=\begin{cases}\frac{1}{n}\prod_{i=1}^n e^{-(X_i-\theta_0)}\left[\frac{n}{n+1}e^{\theta_0}\cdot e^{\frac{n+1}{n}U}\right.\\ \qquad\left.\cdot\left\{1-\frac{\alpha}{n}\left(U-\frac{n}{n+1}\right)+\frac{\alpha^2}{2n^2}\left(U^2-\frac{2n}{n+1}U+2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right)\right\}+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] & (X_{(1)}<0),\\ \prod_{i=1}^n e^{-(X_i-\theta_0)}\frac{1}{n+1-\alpha}e^{-n\theta_0} & (X_{(1)}\ge 0),\end{cases}$$

$$B(\boldsymbol{X})=\begin{cases}\frac{1}{n}\prod_{i=1}^n e^{-(X_i-\theta_0)}\left\{\frac{n}{n+1}e^{\theta_0}\cdot e^{\frac{n+1}{n}U}+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} & (X_{(1)}<0),\\ \prod_{i=1}^n e^{-(X_i-\theta_0)}\frac{1}{n+1}e^{-n\theta_0} & (X_{(1)}\ge 0),\end{cases}$$

$$C(\boldsymbol{X})=\begin{cases}\frac{1}{n}\prod_{i=1}^n e^{-(X_i-\theta_0)}\left\{\frac{1}{n+1}e^{\theta_0}\cdot e^{\frac{n+1}{n}U}\left(U-\frac{n}{n+1}\right)+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} & (X_{(1)}<0),\\ \prod_{i=1}^n e^{-(X_i-\theta_0)}\frac{1}{(n+1)^2}e^{-n\theta_0} & (X_{(1)}\ge 0)\end{cases}$$

となるので, Bayes 推定量は, 系 2 より $X_{(1)} < 0$ のとき

$$\alpha\left(\delta^*(\boldsymbol{X})-\theta_0\right)=\frac{\alpha}{n}\left(U-\frac{n}{n+1}\right)-\frac{\alpha^2}{2n^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

より,

$$\delta^*(\boldsymbol{X})=\begin{cases}X_{(1)}-\frac{1}{n}-\frac{\alpha+2}{2n^2}+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right) & (X_{(1)}<0),\\ \frac{1}{\alpha}\log\frac{n-\alpha+1}{n+1} & (X_{(1)}\geq 0)\end{cases} \tag{4.5}$$

になる. また, δ^* の Bayes リスクは

$$\begin{aligned}r(\delta^*)&=\frac{\beta}{n+1}\left\{\frac{\alpha^2}{2n^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\int\cdots\int_{\{\boldsymbol{x}|x_{(1)}<0\}}e^{-n\bar{x}}\cdot e^{(n+1)x_{(1)}}dx_1\cdots dx_n\\&\quad-\frac{\beta}{n+1}\left(\log\frac{n-\alpha+1}{n+1}+\frac{\alpha}{n+1}\right)\int\cdots\int_{\{\boldsymbol{x}|x_{(1)}\geq 0\}}e^{-n\bar{x}}dx_1\cdots dx_n\\&=\frac{\alpha^2\beta}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{4.6}$$

となる. 一方, (3.5) から $X_{(1)} < 0$ のとき

$$\delta^*(\boldsymbol{X})=X_{(1)}+\frac{1}{\alpha}\log\frac{n-\alpha+1}{n+1}=X_{(1)}-\frac{1}{n}-\frac{\alpha+2}{2n^2}+o_p\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

を得るので, (3.5) と (4.5) は $o_p(1/n^2)$ のオーダーまで漸近的に等しいことが分かり, (3.6), (4.6) からその Bayes リスクに対しても同様のことが言える.

5. 両側指数分布の場合

まず, $X_1,\cdots,X_n$ をたがいに独立に, いずれも密度

$$f(x-\theta)=\begin{cases}\frac{2}{3}e^{-2(x-\theta)} & (x-\theta\geq 0),\\ \frac{2}{3}e^{x-\theta} & (x-\theta<0)\end{cases}$$

をもつ両側指数分布に従う確率変数とする. ここで, 順序統計量を $X_{(1)}\leq\cdots\leq X_{(n)}$ とし, $\boldsymbol{X}_{(\cdot)}:=(X_{(1)},\cdots,X_{(n)})$, $\boldsymbol{x}_{(\cdot)}:=(x_{(1)},\cdots,x_{(n)})$ とすると, (2.4) より推定量 $\delta=\delta(\boldsymbol{X})$ の Bayes リスクは

$$r(\delta)$$
$$=n!\beta\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left\{e^{\alpha\delta_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)})}A_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)})-(\alpha\delta_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)})+1)B_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)})+\alpha C_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)})\right\}dx_{(1)}\cdots dx_{(n)}$$

となる. ここで, $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}_{(\cdot)}$ とするとき $\delta_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)})=\delta(T(\boldsymbol{x}))$ とし,

$$A_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)}):=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\theta}\prod_{i=1}^{n}f(x_{(i)},\theta)\pi(\theta)d\theta,$$

$$B_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)}) := \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} f(x_{(i)}, \theta)\pi(\theta)d\theta,$$

$$C_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)}) := \int_{-\infty}^{\infty} \theta \prod_{i=1}^{n} f(x_{(i)}, \theta)\pi(\theta)d\theta$$

とする. このとき, 定理1より, LINEX 損失と事前密度 π に関する $\boldsymbol{X}_{(\cdot)}$ に基づく Bayes 推定量は

$$\delta_0^*(\boldsymbol{X}_{(\cdot)}) = \frac{1}{\alpha}\log\frac{B_0(\boldsymbol{X}_{(\cdot)})}{A_0(\boldsymbol{X}_{(\cdot)})}$$

になり, その Bayes リスクは

$$r(\delta_0^*) = n!\beta \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha C_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)}) - B_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)})\log\frac{B_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)})}{A_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)})}\right)dx_{(1)}\cdots dx_{(n)}$$

である. 特に, $\pi(\theta) \equiv 1$ とすると,

$$A_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \int_{x_{(k)}}^{x_{(k+1)}} e^{-\alpha\theta}\left\{e^{-2(x_{(i)}-\theta)}\chi_{(-\infty,x_{(i)}]}(\theta) + e^{x_{(i)}-\theta}\chi_{(x_{(i)},\infty)}(\theta)\right\}d\theta$$

となる. ただし, $x_{(0)} = -\infty$, $x_{(n+1)} = \infty$ とする. 各 $k = 0, \cdots, n$ について, $2n - \alpha > 0$ とし, $2n \neq 3k - \alpha$ とすれば

$$\int_{x_{(k)}}^{x_{(k+1)}} e^{-\alpha\theta}\left\{e^{-2(x_{(i)}-\theta)}\chi_{(-\infty,x_{(i)}]}(\theta) + e^{x_{(i)}-\theta}\chi_{(x_{(i)},\infty)}(\theta)\right\}d\theta$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2n-\alpha}e^{(2n-\alpha)x_{(1)}-2n\bar{x}} & (k=0), \\ e^{n\bar{x}-3\sum_{i=k+1}^{n}x_{(i)}}\left\{\frac{1}{2n-3k-\alpha}\left(e^{(2n-3k-\alpha)x_{(k+1)}} - e^{(2n-3k-\alpha)x_{(k)}}\right)\right\} & (k=1,\cdots,n-1), \\ \frac{1}{n+\alpha}e^{-(n+\alpha)x_{(n)}+n\bar{x}} & (k=n) \end{cases}$$

となるので

$$\begin{aligned} &A_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)}) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{n\bar{x}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n-3k-\alpha}\left\{e^{(2n-3k-\alpha-3)x_{(k+1)}-3\sum_{i=k+2}^{n}x_{(i)}} - e^{(2n-3k-\alpha+3)x_{(k)}-3\sum_{i=k}^{n}x_{(i)}}\right\} \\ &\qquad + \left(\frac{2}{3}\right)^n \left\{\frac{1}{2n-\alpha}e^{(2n-\alpha)x_{(1)}-2n\bar{x}} + \frac{1}{n+\alpha}e^{-(n+\alpha)x_{(n)}+n\bar{x}}\right\} \end{aligned}$$

を得る. さらに, $2n \neq 3k$ として, 同様に考えれば

$$\begin{aligned} &B_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)}) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{n\bar{x}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n-3k}\left\{e^{(2n-3k-3)x_{(k+1)}-3\sum_{i=k+2}^{n}x_{(i)}} - e^{(2n-3k+3)x_{(k)}-3\sum_{i=k}^{n}x_{(i)}}\right\} \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{2}{3}\right)^n\left\{\frac{1}{2n}e^{2n(x_{(1)}-\bar{x})}+\frac{1}{n}e^{-n(x_{(n)}-\bar{x})}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&C_0(\boldsymbol{x}_{(\cdot)})\\
&=\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{n\bar{x}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2n-3k}\left\{\left(x_{(k+1)}-\frac{1}{2n-3k}\right)e^{(2n-3k-3)x_{(k+1)}-3\sum_{i=k+2}^{n}x_{(i)}}\right.\\
&\qquad\left.-\left(x_{(k)}-\frac{1}{2n-3k}\right)e^{(2n-3k+3)x_{(k)}-3\sum_{i=k}^{n}x_{(i)}}\right\}\\
&\quad+\left(\frac{2}{3}\right)^n\left\{\frac{1}{2n}\left(x_{(1)}-\frac{1}{2n}\right)e^{2n(x_{(1)}-\bar{x})}+\frac{1}{n}\left(x_{(n)}+\frac{1}{n}\right)e^{-n(x_{(n)}-\bar{x})}\right\}
\end{aligned}$$

となることが分かる.

6. おわりに

本論においては, 非対称な損失関数として LINEX 損失関数を取り上げ, LINEX 損失とある事前分布に関する Bayes 推定量とその Bayes リスクについて考察した. また, 片側切断分布族, 位置母数をもつ切断分布族の場合については, 具体的な例を挙げ, 実際に Bayes 推定量とそのリスクを求めた. さらに, 密度の台が母数に依存する指数分布の場合には, 最尤推定量の Bayes リスクと漸近的に比較し, 両側指数分布の場合についても考察した. 今後は, 両側切断分布族の場合や, 他の事前分布をとる場合についても考えたい.

参考文献

[AO02] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2002). Information inequalities for the Bayes risk for a family of non-regular distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **54** (4), 806–815.

[AO03] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2003). An information inequality for the Bayes risk applicable to non-regular cases. *Proc. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.*, **1334**, 183–191.

[AO07] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2007). The asymptotic bound by the Kiefer-type information inequality and its attainment. *Commun. Statist. - Theory and Meth.*, **36**(11), 2049–2059.

[J95] Jensen, J. L. (1995). *Saddlepoint Approximations.* Clarendon Press, Oxford.

[O04] Ohyauchi, N. (2004). The Vincze inequality for the Bayes risk. *J. Japan Statist. Soc.*, **34**(1), 65–74.

[SA05] Sakairi, K. and Akahira, M. (2005). Equivariant estimators under asymmetric loss functions. (In Japanese), *Proc. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.*, **1439**, 41–65.

[V75] Varian, H. R. (1975). A Bayesian approach to real estate assessment. In: *Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honor of Leonard J. Savage* (S. E. Fienberg and A. Zellner, eds.), North-Holland, Amsterdam, 195–208.

[V79] Vincze, I. (1979). On the Cramér-Fréchet-Rao inequality in the non-regular case. In: *Contributions to Statistics. The J. Hájek Memorial Volume.* Academia, Prague, 253–262.

[VN93] Voinov, V. G. and Nikulin, M. S. (1993). *Unbiased Estimaters and Their Applications, Vol. 1: Univariate Case.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[Z86] Zellner, A. (1986). Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss functions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **81**, 446–451.