数理解析研究所講究録
第 1612 巻 2008 年 1-5

デファイナブル C^2 多様体とそのデファイナブル C^2 部分多様体の微分可能性の同時格上げについて

川上　智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

ここでは、実数体 $\mathbb{R}$ の通常の構造 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ の順序極小拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \ldots)$ において、デファイナブル C^2 多様体とそのデファイナブル C^2 部分多様体の微分可能性の同時格上げについて考察する。このような構造 $\mathcal{M}$ は、[11] により、非可算無限個存在することが知られている。もっと一般的に、実閉体上でも議論することができるが、ここでは、$\mathcal{M}$ に制限して考える。デファイナブルカテゴリーに関しては、[2], [3] などに性質がまとめられている。また、[13] では、少し一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル集合は、すべてパラメータつきとし、特に断らなければ、多様体は境界をもたないとする。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 14P20, 03C64.
Keywords and Phrases. 順序極小構造, デファイナブル C^r 多様体, デファイナブル多様体の微分可能性の格上げ, 同時デファイナブル C^r コンパクト化.

2. デファイナブル C^r 多様体

デファイナブル C^r 多様体については、[6], [8] などにおいて考察されている。

C^r 多様体 X がデファイナブル C^r 多様体とは、X が有限個からなる局所座標近傍系をもっており、それらのはり合わせ写像がデファイナブル C^r 微分同相写像となることである。

通常の C^r 多様体の微分可能性の格上げについて、以下が成り立つ。

定理 2.1 (e.g. [5]). $1 \leq r \leq \infty$ とするとき、任意の C^r 多様体は、C^∞ 微分同相を除いて、一意的な C^∞ 多様体構造をもつ。

定理 2.1 の証明は、開集合の無限和を用いるので、デファイナブルカテゴリーでは、適用することができない。デファイナブル開集合の無限和は、デファイナブルとは限らない。

定理 2.1 の証明を適用できるようにするために、デファイナブル集合とデファイナブル多様体の定義を弱めて、局所デファイナブル集合と局所デファイナブル多様体を定義することができる。

定義 2.2. *(1)* $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X が局所デファイナブル集合とは、任意の $x \in X$ に対して、x の $\mathbb{R}^n$ におけるデファイナブル開集合 U が存在して、$X \cap U$ がデファイナブル集合となることである。

(2) $0 \leq r \leq \omega$ とする。C^r 多様体 X が局所デファイナブル C^r 多様体とは、X が可算個からなる局所座標近傍系をもっており、それらのはり合わせ写像がデファイナブル C^r 微分同相写像となることである。

$\mathbb{R}^n$ の任意の開集合は、局所デファイナブルとなる。また、$\mathbb{R}^n$ の局所デファイナブル集合の補集合が局所デファイナブルとは限らないなど、望ましい性質をもたない。

定理 2.1 の証明を適用することにより、以下をえることができる。

定理 2.3 ([9]). $1 \leq s < r < \infty$ とするとき、任意の局所デファイナブル C^s 多様体は、局所デファイナブル C^r 微分同相を除いて、一意的な局所デファイナブル C^r 微分構造をもつ。

定理 2.1 とは、異なる方法を用いることにより、以下の結果をえることができる。

定理 2.4 ([7]). $1 \leq s < r < \infty$ とするとき、任意のデファイナブル C^s 多様体は、デファイナブル C^r 微分同相を除いて、一意的なデファイナブル C^r 多様体構造をもつ。

定理2.4の証明のアイデアは、デファイナブル C^s 多様体のある $\mathbb{R}^n$ へのデファイナブル C^s 埋め込みの存在、デファイナブル C^s コンパクト化、境界をもったデファイナブル C^s 多様体のデファイナブル C^s カラー近傍の存在と S. Akbulut and H. King [1] によるコンパクト C^∞ 多様体とその C^∞ 部分多様体の同時実代数多様体構造の存在 (定理2.12) である。

定義 2.5. $1 \leq r \leq \omega$ とする。X をコンパクトでないデファイナブル C^r 多様体とする。X がデファイナブル C^r コンパクト化可能とは、境界 ∂Y をもったコンパクトデファイナブル C^r 多様体 Y とデファイナブル C^r 微分同相写像 $f : X \to Int\ Y$ が存在することである。ただし、$Int\ Y$ は Y の多様体としての内部を表すものとする。

[注意] ここでは、コンパクト化は境界をつけたものを考えることとする。開区間 $(0, 1)$ のコンパクト化として、閉区間 $[0, 1]$ と単位円周 S^1 が存在するが、ここでは、前者のみを考える。

定理 2.6 ([6]). $1 \leq r < \infty$ とし、X をコンパクトでないデファイナブル C^r 多様体とするとき、X はデファイナブル C^r コンパクト化可能である。

定義 2.7. $1 \leq r \leq \omega$、X を C^r 多様体、$X_1, \ldots, X_n$ を X の C^r 部分多様体とする。$X_1, \ldots, X_n$ が一般の位置にあるとは、任意の $i \in \{1, \ldots, n\}, J \subset \{1, \ldots, n\} - \{i\}$ に対して、X_i と $\cap_{j \in J} X_j$ が横断的に交わることである。

[注意] 一般の位置にあるという条件は、部分多様体の共通部分が部分多様体となる十分条件である。この条件は、*S. Akbulut and H. King* [1] によって導入されたものである。また、帰納法で結論を証明する際に、都合のよい条件である。

一般には、部分多様体の共通部分や和集合は、部分多様体とは限らない。

定理 2.8 ([7]). $1 \leq r < \infty$ とするとき、任意のデファイナブル C^r 多様体は、アフィンである。つまり、ある $\mathbb{R}^n$ にデファイナブル C^r 部分多様体として、デファイナブル C^r 埋め込み可能である。

$1 \leq r < \infty$、X をコンパクトでないデファイナブル C^r 多様体とするとき、[6] により、X はある $\mathbb{R}^n$ 内の有界デファイナブル C^r 部分多様体と仮定してよい。この仮定の下で、以下の定義を考える。

定義 2.9. $X_1, \ldots, X_n$ を X のデファイナブル C^r 部分多様体とする。$(X; X_1, \ldots, X_n)$ がフロンティア条件を満たすとは、各 i に対して、$\overline{X_i} - X_i \subset \overline{X} - X$ を満たすことである。ただし、$\overline{X_i}$ *(resp.* $\overline{X}$*)* は、$\mathbb{R}^n$ における X_i *(resp.* X*)* の閉包を表すものとする。

定義 2.10. X をコンパクトでないデファイナブル C^r 多様体、$X_1,\dots,X_n$ をコンパクトでない X のデファイナブル C^r 部分多様体で、一般の位置にあるとする。$(X;X_1,\dots,X_n)$ が同時デファイナブル C^r コンパクト化可能とは、境界 ∂Y をもったコンパクトデファイナブル C^r 多様体 Y, それぞれ、境界 $\partial Y_1,\dots,\partial Y_n$ をもった, Y のコンパクトデファイナブル C^r 部分多様体 $Y_1,\dots,Y_n$ とデファイナブル C^r 微分同相写像 $f: X \to Int\ Y$ が存在して、以下の３つの条件を満たすことである。

(1) 各 i に対して、$f(X_i) = Int\ Y_i$。

(2) 各 i に対して、$\partial Y_i \subset \partial Y$。

(3) $Y_1,\dots,Y_n,\partial Y$ が一般の位置にある。

定理 2.11 ([10]). $1 \le r < \infty$、X をコンパクトでないデファイナブル C^r 多様体、$X_1,\dots,X_n$ をコンパクトでない X のデファイナブル C^r 部分多様体で、一般の位置にあり、$(X;X_1,\dots,X_n)$ はフロンティア条件を満たすとする。このとき、$(X;X_1,\dots,X_n)$ は同時デファイナブル C^r コンパクト化可能である。

定理 *2.11* の証明のアイデアは、部分的デファイナブル C^r 自明性 [6] を用いることである。

以下は、コンパクト C^∞ 多様体とそのコンパクト C^∞ 部分多様体の同時実代数多様体構造の存在である。

定理 2.12 ([1]). X をコンパクト C^∞ 多様体、$X_1,\dots,X_n$ を X のコンパクト C^∞ 部分多様体で一般の位置にあるとする。このとき、実代数多様体 Y、Y の実代数部分多様体 $Y_1,\dots,Y_n$ と C^∞ 微分同相写像 $f: X \to Y$ が存在して、各 i に対して、$f(X_i) = Y_i$ となる。

定理 *2.11* と *2.12* を用いて、本稿の目的である以下の結果を得る。

定理 2.13 ([10]). X をデファイナブル C^2 多様体、$X_1,\dots,X_n$ を X のデファイナブル C^2 部分多様体で、一般の位置にあるとする。また、$2 \le r < \infty$ とする。このとき、*(1)* $X,X_1,\dots,X_n$ がコンパクトであるか、または、*(2)*$X,X_1,\dots,X_n$ がコンパクトでなく、$(X;X_1,\dots,X_n)$ はフロンティア条件を満たすならば、デファイナブル C^r 多様体 Y, Y のデファイナブル C^r 部分多様体 $Y_1,\dots,Y_n$ とデファイナブル C^2 微分同相写像 $(X;X_1,\dots,X_n) \to (Y;Y_1,\dots,Y_n)$ が存在する。

上の定理で *(1)* の条件を満たすときは、Y を実代数多様体、$Y_1, \dots, Y_n$ を Y の実代数部分多様体としてとることができる。$2 \leq r < \infty$ は技術的な条件である。

デファイナブル C^∞ 多様体, デファイナブル C^ω 多様体の扱いが難しい理由として、以下の二つがある。$r = \infty, \omega$ のとき、

(1) どの次元の $\mathbb{R}^n$ へもデファイナブル C^r 埋め込みできないデファイナブル C^r 多様体が存在する。このようなデファイナブル C^r 多様体をノンアフィンという。たとえば、$\mathcal{M} = \mathcal{R}$ のとき、非可算無限個のノンアフィンデファイナブル C^∞ 多様体が存在する。

(2) 近似定理が成立するかどうか知られていない。$1 \leq s < r < \infty$ のとき、デファイナブル C^r 多様体 X からデファイナブル C^r 多様体 Y のデファイナブル C^s 写像は、デファイナブル C^s 位相において、デファイナブル C^r 写像で近似できることが知られている。これを $r = \infty$ とすると、一般にはこのような定理が成立するかどうか知られていない。知られている場合は、*(1)* $\mathcal{M} = \mathcal{R}$ で、X, Y がアフィンの場合 *(*[12]*)* と、*(2)* $\mathcal{M}$ が $\mathbf{R}_{exp}$ の順序極小拡張であって、C^∞ セル分解可能 *(*[4]*)* の場合のみである。

今後の課題として、定理 *2.13* の同変版がある。また、基礎構造を実数体の順序極小拡張から、実閉体の順序極小拡張へ拡張した場合も課題である。

References

[1] S. Akbulut and H. King, *A relative Nash theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), 465–481.
[2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).
[3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.
[4] A. Fischer, *Smooth functions in o-minimal structures*, Adv. Math. **218**, (2008), 496–514.
[5] M.W. Hirsch, *Differential manifolds*, Springer, (1976).
[6] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323-349.
[7] T. Kawakami, *Every definable C^r manifold is affine*, Bull. Korean Math. Soc. 42 (2005), 165–167.
[8] T. Kawakami, *Imbedding of manifolds defined on an o-minimal structures on* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, Bull. Korean Math. Soc. **36** (1999), 183–201.
[9] T. Kawakami, *Locally definable C^sG manifold structures of locally definable C^rG manifolds*, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. Natur. Sci. **56**, (2006), 1-12.
[10] T. Kawakami, *Relative properties of definable C^rG manifolds*, preprint.
[11] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751-777.
[12] M. Shiota, *Approximation theorems for Nash mappings and Nash manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **293** (1986), no. 1, 319–337.
[13] M. Shiota, *Geometry of subanalyitc and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.