数理解析研究所講究録
第 1612 巻 2008 年 21-40



# Lurie's quasi category Yoneda's lemma

名古屋工業大学・機械工学科 南範彦 (Norihiko Minami)
Department of Mechanical Engineering
Nagoya Institute of Technology

## 1 目的・動機

数年前、Toën と Vezzosi は、[AGMC], [HAG1], [HAG2] において、Quillen モデル圏の枠組みで、代数幾何の一般化を行った。

一方、Lurie は、[BOOK], [DAGI], [DAGII], [DAGIII], [DAGIV], [DAGV], [DAGVI] といった一連の膨大な論文のなかで、Quillen モデル圏ではなく、より一般の quasi category (これは Joyal [Joyal] の用語で、Lurie は $\infty$-category と呼んでいる。実は最初にこの概念に到達したのは Boardman-Vogt [BoardmanVogt] で、彼らは weak Kan complex と呼んだ) の枠組みで、代数幾何の膨大な一般化を構築しつつ (!) ある。しかしながら、ページ数が余りにも膨大なため、余程の強力な理由がない限り読む気にはなれない。

そこで、取りあえず最初の Lurie さん本人が「Book」と呼ぶ *Higher Topos Theory* 中の **p.259, §5.1.3, Yoneda's lemma** の手短な紹介を行おうというのが本稿の目的である。正確にはこれは「quasi category Yoneda's lemma」と呼ぶべきもので、quasi category ではなく (より特別な場合と考えられる) Quillen モデル圏の場合には、「model category Yoneda's lemma」と呼ぶべきものが Toën と Vezzosi の上述の論文 [HAG1] の p.47 Theorem 4.2.3. で得られている。そこで本稿では、以下の順序に従い、話をすすめる：

- Toën-Vezzosi 流の Homotopical Algebraic Geometry の要約、特に「model category Yoneda's lemma」のそこでの役割。
- quasi category ($\infty$-category) の要約。
- 「quasi category Yoneda's lemma」とその証明の方針。

2007 年 12 月に Toën さんが京大数理理研で講演をされた折に Toën さんは Toën-Vezzosi と Lurie のアプローチを比較して、

> 「Lurie のやっていることは我々と比べて一般的だが、我々の枠組みで必要な Yoneda's lemma を示すのに４０ページ少しで私は証明できるのに、Lurie は彼の枠組みで必要な Yoneda's lemma を示すのに 200 ページ以上もの準備が必要となる。こんな事は自分には出来ないので、Foundation は Lurie にまかせる...」

といった趣旨のことを言っておられた。実は、Yoneda's lemma というのは、Toën-Vezzosi のアプローチと Lurie のアプローチの比較において、ページ数の差異にとどまらず、内容的に見ても極めて象徴的なものである。皆さんは、quasi category を用いた Lurie のアプローチが出現したので Toën-Vezzosi のアプローチで用いられたモデル圏など知らなくても良いと思われるかもしれないが、実は Lurie のアプローチでもモデル圏の手法は本質的に用いられているのだ。第一に、quasi category というのは、単体集合のなす圏 $SSets$ ([BOOK] では単体集合のなす圏を表すのに $Set_{\Delta}$ という記号が用いられているが、本稿では通常の慣行に従い $SSets$ を用いた) における Joyal モデル構造に関する fibrant な対象に他ならない。第二に、Lurie の「BOOK」でも quasi category に関する多くの性質を示すのに、モデル圏の場合に帰着して証明することがしばしばあり、Lurie による quasi category Yoneda's lemma の証明というものは、そのような典型的な例なのである。しかも、Lurie の「quasi category Yoneda's lemma」は Lurie の 735 pages にもわたる「Book」の４合目あたりに聳える、手頃な目標である。より多くの人に Lurie の「quasi category Yoneda's lemma」を切り口として Lurie の一連の膨大な仕事への理解に参入してほしい、それが本稿を著わす所以である。

残念なことに、ページ数の制限のため本稿では記号の定義や定理の説明等を逐一与えてない。結局、「quasi category Yoneda's lemma」の証明で用いられることがらを、「BOOK」から適当に引用して羅列しただけに過ぎないかもしれない。それでも「BOOK」では懇切丁寧には書いてない「quasi category Yoneda's lemma」の証明の概略だけは丸裸にしてはっきり記した。本稿を証明や厳密な定義は気にせず、とにかく全体の流れだけを理解して飛ばし読みし、その上で本稿の最後に記した証明の概略を片手に「BOOK」で証明の詳細を読まれれば、読者は時間を大幅に節約できるであろう、そうなることを心から願うのである。読者の便宜を考え、本稿で引用した結果が「BOOK」等の原典のどこにあるかを可能な限り記した。

最後に、講演の機会と本稿を著わす機会を与えて下さった、大阪大学の原靖浩氏に心から感謝を申し上げます。また機会があれば、「BOOK」の主結果である $\infty$-topoi, すなわち quasi-category の枠組みにおけるトポスの理論についても、紹介したい。

## 2 Toën-Vezzosi 流 Homotopical Algebraic Geometry

- Grotherndieck の代数幾何の基本的対象である scheme は，可換環から定まるアファインスキームを適当に貼り合わせて構成したものだった．
- Grothendieck の「functor-of-points」の哲学によると、スキームの圏を調べるために、アファインスキームの圏 $Aff$ を米田の補題を用いて Set 値前層の圏 $Pr(Aff)$ に埋め込んで考えることができる：

$$Aff \hookrightarrow Pr(Aff) := Sets^{Aff^{op}}$$

- しかしながら、スキームからスタックのような商 ( $\Longrightarrow$ colimit) 構成を行おうとすると、Set 値前層ではなく Groupoid 前層が現れる。とはいうものの Groupoid 自体は扱いにくいが、忠実充満部分圏の埋め込みの列

$$Sets \hookrightarrow (small)\ Groupoids \hookrightarrow (small)\ Categories \overset{\text{Nerve}}{\hookrightarrow} SSets$$

があるので、ホモトピー論を用いて調べることが出来る $SSets$ が使える単体集合 SSet 値前層の圏 $SPr(Aff)$ を用いて考えたくなる。 実際、この観点から (Laumon-Moret-Bailly の本で扱われている) Grothendieck 流のスタックの概念が定式化出来る。

- ここで可換環は，加群のなす対称モノイダル圏 $(\mathbb{Z}-\mathrm{mod}, \otimes)$ の結合的かつ単位元的な可換モノイド対象であることに注意すると，もっと一般の対称モノイダル圏に対しても，上述の Grothendieck 流の代数幾何と同様なものが構成できるか気になってくる．
- 一般の完備かつ余完備な圏の概念の一般化として、Quillen のモデル圏という古典的ホモトピー論を抽象化した概念がある。モデル圏 $\mathcal{C}$ の一つの有用性はその weak equivalence という射のクラス $\mathcal{W}$ に関する局所化 $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ を集合論的な問題なしに行うことが出来ることにあり、この局所化はモデル圏 $\mathcal{C}$ の <u>ホモトピー圏</u> $Ho(\mathcal{C})$ と呼ばれる。
- Toën-Vezzosi は，モデル圏の手法を縦横無尽に駆使して，極めて一般的な対称モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes)$ に対しても，Grothendieck の代数幾何と同様なものが構成できることを示し，それを，<u>**Homotopical Algebraic Geometry**</u> と呼んだ．
- そこでは，性質の良い対称モノイダルモデル圏と，そこでの結合的かつ単位元的な可換モノイド対象からなる圏 (これを <u>アファインスキーム</u> のなす圏と思う) を出発点として，そこでモデルサイト (モデル圏 (<u>抽象ホモトピー論</u>) の観点からの Grothendieck サイトを拡張したもの) 上の <u>スタック</u> の圏 (=モデルトポス、<u>これはホモトピー圏である</u>) に広げて考え，次に，その<u>中でより</u> "幾何科学的に意味のある" <u>幾何的スタック</u> のなす圏を定義する．
- 幾何学スタックは、スタックの圏 (ホモトピー圏であった) の性質の良い Groupoid 対象の商スタックのような物として帰納的に定義していくのだが、ホモトピー圏まで行くと圏論的構成がしにくくなるのでホモトピー圏にいく前のモデル圏のレベルに持ち上げた概念が望まれる。そこで Segal groupoid 対象という我々の要求を満たす概念が登場する：

**Definition 2.1** (HAG2. p.64. Definition 1-3-1-6). $0 \le \forall i < \forall n$ に対し，標準単体的圏 $\triangle$ の射 $\sigma_i \in \triangle([1],[n])$ を以下で定義：

$$\begin{aligned} \sigma_i : [1] &\longrightarrow [n] \\ 0 &\longmapsto i \\ 1 &\longmapsto i+1 \end{aligned}$$

すると，モデル圏 $N$ における <u>**Segal groupoid** 対象</u> とは，$N$ における単体的対象

$$X_* : \triangle^{op} \longrightarrow N$$

で，次の二つの条件を満たすものを言う：

1. $\forall n > 0$. 次の自然な射は $\mathrm{Ho}(N)$ における同型射：

$$\prod_{0 \le i < n} \sigma_i : X_n \xrightarrow{\simeq} \underbrace{X_1 \times^h_{X_0} X_1 \times^h_{X_0} \cdots \times^h_{X_0} X_1}_{n \text{ times}}$$

2. 次の自然な射は $\mathrm{Ho}(N)$ における同型射：

$$d_0 \times d_1 : X_2 \xrightarrow{\simeq} X_1 \times^h_{d_0, X_0, d_0} X_1$$

**Remark.** 上の定義からすぐわかるように、モデル圏 $N$ における *Segal groupoid* 対象は，ホモトピー圏 $\mathrm{Ho}(N)$ における *groupoid* 対象を誘導する．

ここで、Grothendieck 流の代数幾何 (Algebraic Geometry over $Z$-modules) と、Toën-Vezzosi によって展開されたホモトピー代数幾何 (Algebraic Geometry over a model category $\mathcal{C}$) を表にして対比すると、以下のようになる。 「モデル米田埋め込み」について特に着目されたい (以下の表は [AGMC, p7 上の表] に若干補足したものである)：

| **Algebraic Geometry over $Z$-mod** | **Algebraic Geometry over a model category $\mathcal{C}$** |
|---|---|
| 基礎モノイダル圏: $(\mathbb{Z}-\mathrm{mod}, \otimes)$ | 基礎モノイダルモデル圏: $(\mathcal{C}, \otimes)$ |
| $alg := (\mathbb{Z}-\mathrm{mod}, \otimes)$ の可換モノイド対象 | $Alg := (\mathcal{C}, \otimes)$ の可換モノイド対象 |
| $Aff := alg^{\mathrm{op}} = (\mathbb{Z}-\mathrm{mod}, \otimes)$ 上の Affine Scheme の圏<br>(自明なモデル構造が入っていると思うとよい) | $\mathcal{C}-Aff := Alg^{\mathrm{op}} = (\mathcal{C}, \otimes)$ 上の Affine Stack の圏<br>($\mathcal{C}$ のモデル構造を用いてモデル構造が入る [SchwedeShipley]) |
| $Aff^{\wedge} := SPr(Aff) = SSets^{Aff^{\mathrm{op}}}$<br>($SSets$ のモデル構造を用いてモデル圏となる) | $\mathcal{C}-Aff^{\wedge} :=$ モデル圏 $\mathcal{C}-Aff, SSets$ のモデル構造<br>を反映したモデル圏 $SPr(\mathcal{C}-Aff) = SSets^{\mathcal{C}-Aff^{\mathrm{op}}}$<br>の左 Bousfield 局所化 (モデル圏となる) |
| 米田埋め込み $Aff \hookrightarrow Ho(Aff^{\wedge})$ | <u>モデル米田埋め込み</u> $Ho(\mathcal{C}-Aff) \hookrightarrow Ho(\mathcal{C}-Aff^{\wedge})$ |
| $\tau$: $Aff$ 上の Grothendieck 位相 | $\tau$: $\mathcal{C}-Aff$ 上のモデル位相 (**sub-canonical** と仮定) |
| $Aff^{\sim,\tau}$: スタックのモデル圏<br>$:=$ モデル圏 $Aff^{\wedge}$ の $\tau$ を反映した<br>左 Bousfield 局所化 (モデル圏となる) | $\mathcal{C}-Aff^{\sim,\tau}$: モデルスタックのモデル圏 [Rezk]<br>$:=$ モデル圏 $\mathcal{C}-Aff^{\wedge}$ の $\tau$ を反映した<br>左 Bousfield 局所化 (モデル圏となる) |
| $Ho(Aff^{\sim,\tau})$: スタックの圏、<br>$\tau =$ ffqc, faithfully flat and quasi-compact の場合、<br>$\Longrightarrow$ 米田埋め込みの分解：<br>$Aff \hookrightarrow Ho(Aff^{\sim,\mathrm{ffqc}}) \hookrightarrow Ho(Aff^{\wedge})$ | $Ho(\mathcal{C}-Aff^{\sim,\tau})$: モデルスタックの圏 (Rezk)<br>sub-canonical $\Longrightarrow$ モデル米田埋め込みの分解：<br>$Ho(\mathcal{C}-Aff) \hookrightarrow Ho(\mathcal{C}-Aff^{\sim,\tau}) \hookrightarrow Ho(\mathcal{C}-Aff^{\wedge})$ |
| $\lvert X_*\rvert = \mathrm{hocolim}_n X_n \in Ho(Aff^{\sim,\mathrm{ffqc}})$: Artin 代数的スタック with affine diagonal [Laumon-Moret-Bailly]<br>ここで $X_* : \triangle^{\mathrm{op}} \to Aff^{\sim,\mathrm{ffqc}}$ は以下を満たす：<br>1. $X_*$ は $Aff^{\sim,\mathrm{ffqc}}$ の Segal groupoid<br>2. 各 $X_n$ の $Ho(Aff^{\sim,\mathrm{ffqc}})$ での像は affine schme の離散和<br>3. 射 $X_0 \rightrightarrows X_1$ (source, target) は faithfully flat かつ affine | $\lvert X_*\rvert = \mathrm{hocolim}_n X_n \in Ho(\mathcal{C}-Aff^{\sim,\tau})$:<br><u>射のクラス $\mathbf{P}$ に関して $n$-幾何的スタック</u>,<br>$X_* : \triangle^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}-Aff^{\sim,\tau}$ は $(n-1)-\mathbf{P}$ Segal groupoid:<br>1. $X_0, X_1$ は $(n-1)$-幾何的スタックの離散和<br>2. 射 $d_0 : X_1 \to X_0$ は $(n-1)-\mathbf{P}$ に属する<br>(この帰納的定義のより正確な定式化に関しては以下を参照) |

ただし、 $F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}-Aff)$ が <u>**stack**</u> とは，その $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}-Aff^{\wedge})$ における像が $Ho(\mathcal{C}-Aff^{\sim,\tau})$ からの essential image に含まれる時をいい、<u>**stack の射**</u> とは，$\mathrm{Ho}(\mathcal{C}-Aff))$ における射，或いは同じことだが $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}-Aff^{\wedge})$ における射，~~或いは同じことだが~~ $Ho(\mathcal{C}-Aff^{\sim,\tau})$ における射のことを言う．

ここで、射のクラス $\mathbf{P}$ に関する $n$-幾何的スタックの定義は、以下のように帰納的に正確に与えられることも出来る。

**Definition 2.2** (HAG2, Definition 1.3.3.1).

1. $n=-1$ の場合：
   (a) stack は，表現可能の時 <u>$(-1)-$ 幾何的</u> という．
   (b) stack の射 $f : F \to G$ は，<u>$(-1)$**–representable**</u>
   $$\iff \forall\,(-1)-\text{geometric } X \xrightarrow{\forall} G.\ F \times^h_G X : (-1)-\text{幾何的}$$
   (c) stack の射 $f : F \to G$ は，<u>$(-1)-\mathbf{P}$ に属する</u>
   $$\iff \forall\,(-1)-\text{幾何的 } X \xrightarrow{\forall} G,$$
   $$F \times^h_G X \to X \text{ は，} (-1)-\text{ 幾何的スタック の間の } \mathbf{P}\text{-射}$$
   - $(-1)-\mathbf{P}$ に属する stack の射は，当然 $(-1)-$ 幾何的.
2. $n \geqq 0$ の場合 ($n-1$ の場合の定義を用いて帰納的に)：
   (a) stack $F$ の <u>**$n$-atlas**</u> とは射の集合族 $\{U_i \to F\}_{i\in I}$ で，
      i. 各 $U_i$ は，$(-1)-$ 幾何的.
      ii. 各射 $U_i \to F$ は，$(n-1)-\mathbf{P}$ に属する.

iii. $\coprod_{i \in I} U_i \to F$ は 全射

(b) stack $F$ は，次を満たす時 <u>$n$-幾何的</u> と呼ばれる：

i. 対角射 $F \to F \times^h F$ は，$(n-1)$-representable.

ii. $F$ は $n$-atlas を持つ.

(c) stack の射 $f : F \to G$ は，<u>**$n$−representable**</u>

$$\Longleftrightarrow \ \forall\,(-1)-\text{geometric}\ X \xrightarrow{\forall} G,\ F \times^h_G X : n - \text{幾何的}$$

(d) stack の射 $f : F \to G$ は，<u>$n-$**P** に属する</u>、或いは，<u>$n-$**P** の性質を持つ</u>. 或いは，<u>$n-$**P** 射</u>.

$$\Longleftrightarrow \ \forall\,(-1)-\text{幾何的}\ X \xrightarrow{\forall} G,\ \text{次が成立:}$$

- $F \times^h_G X$ は $n-$ 幾何的
- $\exists n$-atlas $\{U_i \to F \times^h_G X\}_{i \in I}$ s.t. $\forall i \in I$, 合成 $(U_i \to F \times^h_G X \to X) \in \mathbf{P}$

- $n-$**P** に属する stack の射は，当然 $n-$representable.

これらの概念を考慮した Segal groupoid を考えることも出来る：

**Definition 2.3** (HAG2. Definition 1.3.4.1). $Ho(SPr(\mathcal{C}-Aff^{\sim,\tau})$ の Segal groupoid 対象 $X_*$ : は、次の２つの条件を満たすとき、<u>$n-$**P Segal groupoid**</u> と呼ばれる：

1. $X_0, X_1$ は $n$-幾何的スタックの離散和
2. 射 $d_0 : X_1 \to X_0$ は $n-$**P** に属する

すると、"幾何学的に意味のある" 幾何学的スタックは Segal groupoid の商スタックとして表わされることがわかる:

$n$-幾何的 stack は $(n-1)-$**P** Segal groupoid の商スタック

**Proposition 2.4** (HAG2. Proposition 1.3.4.2). スタック $F \in Ho(SPr(\mathcal{C}-Aff^{\sim,\tau})$ と非負整数 $n \geq 0$ に対して、次は同値：

*1.* スタック $F$ は $n$-幾何的。

*2.* ある $(n-1)-$**P** *Segal groupoid* $X_*$ : $\triangle^{op} \to \mathcal{C}-Aff^{\sim,\tau}$ が存在して、$Ho(SPr(\mathcal{C}-Aff^{\sim,\tau})$ における同型

$$F \simeq |X_*| = \mathrm{hocolim}_n X_n$$

が成立する。

このとき $F$ を、<u>$(n-1)-$**P Segal groupoid** $X_*$ の商スタック</u> という。

**Remark.** これからも容易に推察できるように、与えられたスタックがいつ幾何学的スタックになるかは、極めて重要な問題である。実際、[HAG2] の主結果 *(の一つ)* は、特別は *Homotopical Algebraic Geometry* の場合に、与えられた *(導来)* スタックが幾何学的スタックになるための必要十分条件を与えた、*Lurie* による *Derived Artin Representability Criterion* [HAG2, Theorem C.0.9] である。

# 3 Quasi Cateogory

## 3.1 Quasi Category の背景 — Kan 複体 と Category の Nerve

**Fact.** (i) 単体集合 $S$ に対し,

$$S \text{ が } Kan \text{ 複体} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} 0 \leqq \forall i \leqq n,\quad \begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "\forall f_i"] \arrow[d, hook] & S \\ \triangle^n \arrow[ur, dotted, "\exists f"'] & \end{tikzcd}$$

(ii) 単体集合 $S$ に対し,

$$S \text{ が小圏 } c \text{ の } nerve\ N(c) \text{ に} \cong \iff 0 < \forall i < n, \quad \begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "\forall f_i"] \arrow[d, hook] & S \\ \Delta^n \arrow[ur, dotted, "\exists 1 f"'] & \end{tikzcd}$$

## 3.2 Quasi Category とそこでの写像空間の定義

**Definition 3.1.** 単体集合 $S$ に対し,

$$S \text{ が } \underline{\text{quasi category}} \overset{\text{定義}}{\iff} 0 < \forall i < n, \quad \begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "\forall f_i"] \arrow[d, hook] & S \\ \Delta^n \arrow[ur, dotted, "\exists f"'] & \end{tikzcd}$$

**Remark.** 定義より quasi category は, *Kan* 複体 $S$ と小圏 $c$ の nerve $N(c)$ を共に一般化する. それゆえ, quasi category 論は, 通常のホモトピー論と (small) category 論を共に一般化する理論と思える.

**Warning.** しかしながら、通常の圏が *small* とは限らないように、
**quasi category** やより一般に 単体 **"集合"** も、必ずしも **small** とは限らないものも考えていく。

quasi category での object, morphism, equivalence

**Definition-Proposition 3.2** (Joyal). quasi category $\mathcal{C}$ に対し,

- $\mathcal{C}_0$ の元を **object** と呼ぶ.
- $\mathcal{C}_1$ の元を **morphism** と呼ぶ.
- [BOOK, Proposition 1.2.2.3.] $X, Y \in \mathcal{C}_0$ に対し,

  $\mathrm{Hom}^R_{\mathcal{C}}(X, Y)_n = \{\sigma \in \mathcal{C}_{n+1} \mid \sigma$ の最後のの頂点は $Y$; その対面は $X$ に退化 $\}$

  で定まる単体集合 $\mathrm{Hom}^R_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は Kan 複体となる.
- [BOOK, Remark 1.2.2.5] $X, Y \in \mathcal{C}_0$ に対し,

  $\mathrm{Hom}^L_{\mathcal{C}}(X, Y)_n = \{\sigma \in \mathcal{C}_{n+1} \mid \sigma$ の最初のの頂点は $X$; その対面は $Y$ に退化 $\}$

  で定まる単体集合 $\mathrm{Hom}^L_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は Kan 複体となる.
- $\mathrm{Hom}^R_{\mathcal{C}}(X, Y)$ と $\mathrm{Hom}^L_{\mathcal{C}}(X, Y)$ はホモトピー同値
- しかしながら、$\mathrm{Hom}^R_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\mathrm{Hom}^L_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 共に合成に関しては上手く振舞わない。

**Definition 3.3** (BOOK, Proposition 1.2.4.1. の直前). 圏との類似で行くと、どのように quasi category $\mathcal{C}$ の morphism $(f : X \to Y) \in \mathcal{C}_1$ が **equivalence** であると定義すべきか気になる。これは、すぐ定義する $\mathfrak{C} : SSets \to \mathrm{Cat}_\Delta$ を用いて quasi category $\mathcal{C}$ のホモトピー圏を simplicial 圏 $\mathfrak{C}[\mathcal{C}]$ のホモトピー圏

$$h\mathcal{C} := h\mathfrak{C}[\mathcal{C}]$$

として定義し ([BOOK, Definition 1.1.5.14.]、関手

$$h\mathfrak{C}[f] : \{\overset{0}{\bullet} \xrightarrow{i} \overset{1}{\bullet}\} = h\mathfrak{C}[\Delta^1] \to h\mathfrak{C}[\mathcal{C}] =: h\mathcal{C}$$

による射 $i$ の像

$$h\mathfrak{C}[f](i) \in \mathrm{Mor}_{h\mathfrak{C}[\mathcal{C}]}(h\mathfrak{C}[\overset{0}{\bullet}], h\mathfrak{C}[\overset{1}{\bullet}])$$

が isomorphism であるものとして定義する。quasi category $\mathcal{C}$ の 2 つの対象 $X, Y \in \mathcal{C}_0$ が **equivalent** であるとは、ある射 $(f : X \to Y) \in \mathcal{C}_1$ が存在して equivalence となるときをいう。

**Definition 3.4** (BOOK, Definition 1.2.12.1, Remark 1.2.12.6). quasi category $\mathcal{C}$ に対し，object $X \in \mathcal{C}$ は <u>initial</u> $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall f_0 : \partial\triangle^n \to \mathcal{C},\ s.t.\ f_0(\{0\}) = X,\quad \exists f : \triangle^n \to \mathcal{C}.s.t.\ f\,|_{\partial\triangle^n} = f_0.$$

**Theorem 3.5.** $\mathcal{C}$ に対し，*object* $X \in \mathcal{C}$ は initial $\Longleftrightarrow$ $\forall Y \in \mathcal{C}, \mathrm{Hom}^L_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は可縮.

**Remark.** この性質は *Lurie* によって *quasi category* を用いて *"Derived Affine Schme"* を張り合わせて *"Derived Scheme"* を構成するときに使用されている。詳細は *Lurie* の一連の [DAG] シリーズを参照されたい。ごくごくさわりのとこだけは [南] に書いた。

## 3.3 Quasi Category の例および性質

**Example 3.6** (既にみた quasi category の例).
(i) 位相空間 $X$ の特異単体集合 $S_*(X)$.
(ii) 小圏 $c$ の nerve $N(c)$.

**Definition-Theorem 3.7** (Lurie). $t$ を小位相圏 (よって各 Hom 集合が位相空間になっている) とするとき，以下のように定義される単体集合 $\mathcal{N}(t)$ は，quasi-category となる：

$\mathcal{N}(t)_0 = \{t$ の objexts $\}$

$\mathcal{N}(t)_1 = \{t$ の morphisms$\}$

$$\mathcal{N}(t)_2 = \left\{ \text{可換 \underline{と限らない} 図式} \quad \begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & Z \end{tikzcd} \quad \text{及び，} \mathrm{Hom}_t(X, Z) \text{ における } h \text{ から } g \circ f \text{ への道} \right\}$$

$\mathcal{N}(t)_3$は，次の4種類のデータによって与えられる：

(1) 4つの objects:$W, X, Y, Z \in t$.

(2) 6つの morphisms:
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_{X,Y}"] \arrow[drrr, "f_{X,Z}"'] & & Y \arrow[dr, "f_{Y,Z}"] & \\ & W \arrow[ul, "f_{W,X}"] \arrow[ur, dashed, "f_{W,Y}"] \arrow[rr, "f_{W,Z}"'] & & Z \end{tikzcd}$$
(可換 <u>と限らない</u> 図式)

(3) 4つの道: $f_{W,Y} \to f_{X,Y} \circ f_{W,X},\quad f_{X,Z} \to f_{Y,Z} \circ f_{X,Y},$
$f_{W,Z} \to f_{Y,Z} \circ f_{W,Y},\quad f_{W,Z} \to f_{X,Z} \circ f_{W,X}$

(4) $\mathrm{Hom}_t(W, Z)$ における右の閉道の拡張：
$$\begin{tikzcd} f_{W,Z} \arrow[r] \arrow[d] & f_{X,Z} \circ f_{W,X} \arrow[d] \\ f_{Y,Z} \circ f_{W,Y} \arrow[r] & f_{Y,Z} \circ f_{X,Y} \circ f_{W,Y} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{N}(t)_n (n \geqq 4)$ : 以上を繰り返す.

**Definition 3.8** (BOOK, Definition 1.1.4.1.). **<u>simplicial category</u>** とは単体集合の圏 $SSets = Sets^{\triangle^{op}}$ に豊穣された圏のことをいう。simplicial category のなす圏 (射は simplicially 豊穣関手) を $\mathrm{Cat}_\triangle$ と表す。

**Theorem 3.9** (Cordier). (i) (BOOK, Definition 1.1.5.5) $S$ が simplicial 小圏の時も，$\mathcal{N}(t)$ と同様の構成 $\mathcal{N}(S)$ が存在し、小位相圏 $t$ に対し，$S_*(t)$ で特異単体集合関手を射の位相空間に適応させていられる *simplicial category* とすると，$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(S_*(t))$. となる。
(ii) (BOOK, Proposition 1.1.5.10) 更に，$S$ のすべての写像空間が Kan 複体なら，$\mathcal{N}(S)$ は quasi category となる.

**Corollary 3.10** (Lurie). simplicial model category $\mathcal{A}$ に対し，その fibrant かつ cofibrant な object からなる部分圏を $\mathcal{A}^0$ とおくと，$\mathcal{N}(\mathcal{A}^0)$ は quasi category になる.

**Remark.** *Toën-Vezzosi* 流の *Homotopical Algebraic Geometry* の応用で現れるモデル圏は通常 *simplicial* モデル圏である。それゆえ上の *Corollary* は、*quasi category* に基づいた抽象的代数幾何の構築を期待・予期する。実際それが *Lurie* のやりつつあることなのである。

実は、simplicial 小圏 $\mathcal{S}$ に対する構成 $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ は、ある随伴関手として特徴づけられる。通常の小圏 $\mathcal{C}$ に対する nerve$N(\mathcal{C})$ は、

$$\mathrm{Hom}_{SSets}(\triangle^n, N(\mathcal{C})) = \mathrm{Hom}_{Cats}([n], \mathcal{C})$$

によって特徴づけられた。simplicial 小圏 $\mathcal{S}$ に対する simplicial nerve $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ を、この意味のある類似として次の形で特徴付けたいのである：

$$\mathrm{Hom}_{SSets}(\triangle^n, \mathcal{N}(\mathcal{S})) = \mathrm{Hom}_{Cat_\triangle}(\mathfrak{C}[\triangle^n], \mathcal{S}).$$

よって simplicial 小圏 $\mathfrak{C}[\triangle^n]$ をどのように定めるか問題となる。これは線形順序集合を小圏とみなした $[n]$ の「意味のある」simplicial 小圏への「厚み付け」であるべきだが、具体的には次のようにおこなう：

**Definition 3.11** (BOOK, Definition 1.1.5.1.). 線形順序集合 $J$ にたいして simplicial 圏 $\mathfrak{C}[\triangle^J]$ を次のように定める：

- $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}[\triangle^J]) = J$.
- $i, j \in J$, に対し、

$$\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\triangle^J]}(i, j) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } j < i \\ N(P_{i,j}) & \text{if } i \leq j. \end{cases}$$

  ここで $P_{i,j}$ は半順序集合 $\{I \subseteq J : (i, j \in I) \wedge (\forall k \in I)[i \leq k \leq j]\}$.

- $i_0 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_n$, に対し、射の合成

$$Map_{\mathfrak{C}[\triangle^J]}(i_0, i_1) \times \ldots \times \mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\triangle^J]}(i_{n-1}, i_n) \to \mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\triangle^J]}(i_0, i_n)$$

  は半順序集合としての写像

$$\begin{aligned} P_{i_0,i_1} \times \ldots \times P_{i_{n-1},i_n} &\to P_{i_0,i_n} \\ (I_1, \ldots, I_n) &\mapsto I_1 \cup \ldots \cup I_n. \end{aligned}$$

  により誘導される。

simplicial 圏 $\mathfrak{C}[\triangle^J]$ は、線形順序集合 $J$ にたいして関手的に振る舞う：

**Definition 3.12** (BOOK, Definition 1.1.5.3.). 線形順序集合の間の単調写像 $f : J \to J'$ に対して simplicial functor

$$\mathfrak{C}[f] : \mathfrak{C}[\triangle^J] \to \mathfrak{C}[\triangle^{J'}]$$

が次のように定まる:

- 各対象 $i \in \mathfrak{C}[\triangle^J]$ に対して, $\mathfrak{C}[f](i) = f(i) \in \mathfrak{C}[\triangle^{J'}]$.
- $i \leq j$ in $J$ に対して $f$ によって誘導される写像

$$\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\triangle^J]}(i, j) \to \mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\triangle^{J'}]}(f(i), f(j))$$

  は、半順序集合としての写像

$$\begin{aligned} P_{i,j} &\to P_{f(i),f(j)} \\ I &\mapsto f(I). \end{aligned}$$

  の nerve として誘導される。

これより次を得る：

(𝔇, $\mathcal{N}$) は随伴関手を定める

- $Cat_\triangle$ は余完備、つまりすべての colimit が存在、
- すべての単体集合 $X$ は、基本単体集合 $\triangle^n$ たちの colimit、
- simplicial 小圏 $\mathcal{S}$ の simplicial nerve $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ は、

$$\mathrm{Hom}_{SSets}(\triangle^n, \mathcal{N}(\mathcal{S})) = \mathrm{Hom}_{Cat_\triangle}(\mathfrak{D}[\triangle^n], \mathcal{S})$$

となるよう定められた：

$\Longrightarrow$ すべての単体集合 $X$ と simplicial 小圏 $\mathcal{S}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{SSets}(X, \mathcal{N}(\mathcal{S})) = \mathrm{Hom}_{Cat_\triangle}(\mathfrak{D}[X], \mathcal{S})$$

となるように、

$$\mathfrak{D} : SSets \to Cat_\triangle$$

が定義でき、$(\mathfrak{D}, \mathcal{N})$ は随伴関手を定める：

$$SSets \underset{\mathcal{N}}{\overset{\mathfrak{D}}{\rightleftarrows}} Cat_\triangle.$$

しかしながら、話はこれで終わらない！

(𝔇, $\mathcal{N}$) は Quillen 同値を定める

**Bergner モデル構造:** $Cat_\triangle$ にはモデル構造 (Bergner モデル構造) が入る。

**Joyal モデル構造:** $SSets$ には通常の Kan モデル構造とは異なるモデル構造 (Joyal モデル構造) が入り、$(\mathfrak{D}, \mathcal{N})$ は Bergner モデル構造と Joyal モデル構造に関して Quillen 同値を定める：

$$SSets \underset{\mathcal{N}}{\overset{\mathfrak{D}}{\rightleftarrows}} Cat_\triangle.$$

**Quasi Category の特徴付け:** Joyal モデル構造に関して、quasi category は $SSets$ の fibrant object に他ならない。

次節でこれらをもう少し詳細に説明するが、その前に必要となるホモトピー圏の事柄についてまとめておこう：

$(|-|, \mathrm{Sing})$ は通常の Kan モデル構造をもった $SSets$ とコンパクト生成位相空間の圏 $CG$ の間の Quillen 同値を定めた：

$$SSets \underset{\mathrm{Sing}}{\overset{|-|}{\rightleftarrows}} CG,$$

これから定まる共通のホモトピー圏を $\mathcal{H}$ と書く：

$$\mathcal{H} = Ho(SSets) \cong Ho(CG)$$

このとき、simplicial 圏 (= $SSets$ 豊穣圏) $\mathcal{C}$ に対して以下のようにして定まる $\mathcal{H}$-豊穣圏 $h(\mathcal{C})$ を simplicial 圏 $\mathcal{C}$ のホモトピー圏 と呼ぶ：

$$\begin{array}{ccc} h: \text{simplicial 圏の圏} & \longrightarrow & \mathcal{H}\text{-豊穣圏の圏} \\ \| & & \| \\ \mathrm{Cat}_\triangle = \mathrm{Cat}_{SSets} & \longrightarrow & \mathrm{Cat}_{\mathcal{H}} = \mathrm{Cat}_{Ho(SSets)} \end{array}$$

$$\mathcal{C} \longmapsto h(\mathcal{C})$$

我々は以下の定義で $\mathbf{S} = SSets$ の場合を用いる：

**Definition 3.13** (BOOK, Definition A.3.2.1.). モノイダルモデル圏 $\mathbf{S}$ に関して対して、豊穣関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ が **weak equivalence** とは、その誘導関手
$hF : h\mathcal{C} \to h\mathcal{C}_0$ が **equivalence of $h$S-enriched categories** つまり、次が成立するときをいう：

1. (**fully faithful**) 各対象対 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し、誘導写像

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_0}(F(X), F(Y))$$

は $\mathbf{S}$ の weak equivalence.

2. (**essencially surjective**) 各対象 $Y \in \mathcal{C}_0$ は、ホモトピー圏 $h\mathcal{C}_0$ においてある $X \in \mathcal{C}$ に対応する $F(X)$ と同値.

**Definition 3.14** (BOOK, Definition 1.1.5.14.). **単体集合 $S$ の homotopy category** $hS$ は、simplicial 圏 $\mathfrak{C}[S]$ の homotopy category $h\mathfrak{C}[S]$ として定義される. しばしば、$hS$ を $\mathcal{H}$-豊穣圏とみなす. つまり、各頂点対 $x, y \in S$ に対し、

$$\mathrm{Map}_{hS}(x, y) = [\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[S]}(x, y)] \text{ (写像空間のホモトピー型)}.$$

単体写像 $f : S \to T$ が **categorical equivalence** とは、誘導された $\mathcal{H}$-豊穣関手 $hS \to hT$ が $\mathcal{H}$-豊穣圏の同値となるときをいう.

**Remark** (BOOK, Remark 1.1.5.17.). 定義から直ちに、

$$\begin{aligned} & f : S \to T \text{ は } \textit{categorical equivalence} \\ \iff & \mathfrak{C}[S] \to \mathfrak{C}[T] \text{ は } \textit{simplicial} \text{ 圏の同値} \\ \iff & |\mathfrak{C}[S]| \to |\mathfrak{C}[T]| \text{ は位相圏の同値} \end{aligned}$$

**Proposition 3.15** (BOOK, Proposition 1.2.3.1.). 合成

$$h : SSets \xrightarrow{\mathfrak{C}[\bullet]} \mathrm{Cat}_{\Delta} = \mathrm{Cat}_{SSets} \xrightarrow{h} \mathrm{Cat}_{Ho(SSets)} = \mathrm{Cat}_{\mathcal{H}} \xrightarrow{forget} \mathrm{Cat}_{Set} = \mathrm{Cat}$$

を $\mathcal{H}$-豊穣構造を忘却して定義すると、 通常の *nerve functor* $N : \mathrm{Cat} \to SSets$ と随伴関手 $(h, N)$ をなす：

$$SSets \underset{N}{\overset{h}{\rightleftarrows}} \mathrm{Cat}$$

$$\mathrm{Hom}_{SSets}(X, N(\mathcal{C})) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(hX, \mathcal{C})$$

*Proof.* 随伴関手 $(\pi_0, \mathrm{inclusion})$

$$SSets \underset{\text{inclusion}}{\overset{\pi_0}{\rightleftarrows}} Set$$

$$\mathrm{Hom}_{SSets}(X, \mathrm{inclusion}(E)) = \mathrm{Hom}_{Set}(\pi_0 X, E)$$

は、対応する豊穣圏の間の随伴関手 $(h, i)$ を誘導する：

$$\mathrm{Cat}_{\Delta} = \mathrm{Cat}_{SSets} \underset{i}{\overset{h}{\rightleftarrows}} \mathrm{Cat}_{Set} = \mathrm{Cat}$$

$$\mathrm{Hom}_{SSets}(X, \mathrm{inclusion}(E)) = \mathrm{Hom}_{Set}(\pi_0 X, E)$$

通常の nerve functor $N$ は、simplical nerve $\mathcal{N}$ を用いた合成で表わされる：

$$\mathrm{Cat} \overset{i}{\subseteq} \mathrm{Cat}_{\Delta} \xrightarrow{\mathcal{N}} SSets.$$

これらより、随伴関手の合成 $(h, N) = (h \circ \mathfrak{C}[\bullet], \mathcal{N} \circ i)$ を得る：

$$h : SSets \underset{\mathcal{N}}{\overset{\mathfrak{C}[\bullet]}{\rightleftarrows}} \mathrm{Cat}_{\Delta} = \mathrm{Cat}_{SSets} \underset{i}{\overset{h}{\rightleftarrows}} \mathrm{Cat}_{Set} = \mathrm{Cat} : N$$

□

**Remark** (BOOK, Remark 1.2.3.4.). 単体集合 $S$ に対し、*Joyal* はそのホモトピー圏 $hS$ を **単体集合 $S$ の fundamental category** と呼ぶ。これは、$S$ が *Kan complex* のとき $hS$ が通常の意味での $S$ の *fundamental groupoid* となることに由来する。

Kan complex と quasi category

**Proposition 3.16** (BOOK, Proposition 1.2.5.1 (Joyal)). 単体集合 $\mathcal{C}$ に対し次は同値:

1. $\mathcal{C}$ は *quasi-category* でその *homotopy category* $h\mathcal{C}$ は *groupoid*.
2. $\mathcal{C}$ は *Kan complex*.

<u>復習</u>: quasi category $\mathcal{C}$ の morphism $(f : X \to Y) \in \mathcal{C}_1$ が <u>**equivalence**</u> であるとは、quasi category $\mathcal{C}$ のホモトピー圏を

$$h\mathcal{C} := h\mathfrak{C}[\mathcal{C}]$$

によって定義 [BOOK, Definition 1.1.5.14.] したとき、関手

$$h\mathfrak{C}[f] : \{\overset{0}{\bullet} \xrightarrow{i} \overset{1}{\bullet}\} = h\mathfrak{C}[\Delta^1] \to h\mathfrak{C}[\mathcal{C}] =: h\mathcal{C}$$

による射 $i$ の像

$$h\mathfrak{C}[f](i) \in \mathrm{Mor}_{h\mathfrak{C}[\mathcal{C}]}(h\mathfrak{C}[\overset{0}{\bullet}], h\mathfrak{C}[\overset{1}{\bullet}])$$

が isomorphism であるものとして定義した [BOOK, Definition 1.1.5.14.]。

**Proposition 3.17** (BOOK, Proposition 1.2.5.3 (Joyal) ). *quasi-category* $\mathcal{C}$ に対し, $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}'$ のすべての *edge* が $\mathcal{C}$ の *equivalence* [BOOK, Proposition 1.2.4.1. の直前] であるような最大の部分単体集合とする。すると $\mathcal{C}'$ は *Kan complex* となり、次の普遍的性質によって特徴づけられる:
任意の *Kan complex* $K$ に対し, 次の誘導された写像は全単射となる:

$$\mathrm{Hom}_{Set_\Delta}(K, \mathcal{C}') \to \mathrm{Hom}_{Set_\Delta}(K, \mathcal{C})$$

[BOOK, Proposition 1.2.5.3] より関手 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ は Kan complex なす $SSets$ の充満部分圏圏 $\mathcal{K}an$ から quasi category のなす $SSets$ の充満部分圏 $\mathcal{Q}Cat$ への入射関手 $i$ の右随伴となる:

$$\mathcal{K}an \underset{(-)'}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathcal{Q}Cat$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}an}(K, Q') \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}Cat}(i(K), Q)$$

quasi category $Q$ に対し、Kan complex $Q'$ の部分圏としての入射 $Q' \to Q$ は圏同値

$$h(Q') \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}rouppoid(hQ)$$

を誘導する。ただし圏 $C$ の $\mathcal{G}roupoid(C)$ は圏 $C$ の同型射からなる部分圏である. $Q'$ は <u>**quasi category $Q$ に含まれる largest Kan complex**</u> と呼ばれる。

ここで「空間の quasi-category」という極めて重要な概念に到達する。

空間の quasi-category $\mathcal{S}$

**Definition 3.18** (BOOK, Definition 1.2.16.1.). すべての Kan complex からなる $SSets$ の充満部分圏を $\mathcal{K}an$ で表し、これを simplicial 圏と思う。
$\mathcal{K}an$ の simplicial nerve $\mathcal{N}(\mathcal{K}an)$ を $\mathcal{S}$ で表し、<u>**空間の quasi-category**</u> と呼ぶ。

**Remark** (BOOK, Remark 1.2.16.2.). 各対象対 $X, Y \in \mathcal{K}an$ に対し, 単体集合 $\mathrm{Map}_{\mathcal{K}an}(X, Y) = Y^X$ は *Kan complex* となる。 このことから $\mathcal{S}$ は *quasi-category* となる *(Proposition 1.1.5.9)*.

**Remark** (BOOK, Remark 1.2.16.3.). $\mathcal{S} = \mathcal{N}(\mathcal{K}an)$ は、$CW$ 複体と連続写像のなす位相圏の *topological nerve* としても定義できるが、米田埋め込みの議論には $\mathcal{K}an$ を用いて $\mathcal{S} = \mathcal{N}(\mathcal{K}an)$ とした方が判りやすい。

## 3.4 Bergner モデル構造

**Notation 3.19.** モノイダルモデル圏 $\mathbf{S}$ とその対象 $S$ に対し、

$\mathrm{Cat}_{\mathbf{S}}$ := $S$-豊穣圏のなす圏、 射は $S$-豊穣関手

$h\mathbf{S}$ := $\mathbf{S}$ のホモトピーモノイダルモデル圏

$\emptyset$ := $\mathbf{S}$ の始対象

$\mathbf{1_S}$ := $\mathbf{S}$ のモノイダル構造に関する unit 対象

$[1]_S$ := 2つの対象 $X, Y$ を持った $\mathbf{S}$-豊穣圏で、

$$\mathrm{Map}_{[1]_S}(Z, Z') = \begin{cases} \mathbf{1_S} & \text{if } Z = Z' = X \\ \mathbf{1_S} & \text{if } Z = Z' = Y \\ S & \text{if } Z = X, Z' = Y \\ \emptyset & \text{if } Z = Y, Z' = X \end{cases}$$

$[1]_{\mathbf{S}} := [1]_{\mathbf{1_S}}$

$[1]_{\tilde{\mathbf{S}}}$ := 2つの対象 $X, Y$ を持った $\mathbf{S}$-豊穣圏で、

$\mathrm{Map}_{[1]_{\tilde{\mathbf{S}}}}(Z, Z') = \mathbf{1_S} \quad \forall Z, Z' \in \{X, Y\}$

$[0]_{\mathbf{S}}$ := 1つの対象 $X$ だけを持った $\mathbf{S}$-豊穣圏で、

$\mathrm{Map}_{[0]_{\mathbf{S}}}(X, X) = \mathbf{1_S}$

$C_0$ := 以下の形の $\mathbf{S}$ の射の集まり：

$(i)$ 入射 $\emptyset \hookrightarrow [0]_{\mathbf{S}}$

$(ii)$$\mathbf{S}$ の cofibration により飽和される射のクラスの

ある生成集合に属する射 $S \to S'$ の誘導 $S$-豊穣関手

$[1]_S \to [1]_{S'}$

しかしながら、意味のある結果を出すためにはモノイダルモデル圏 $\mathbf{S}$ に対して基本的な例 $\mathbf{S} = SSets$ が満たすような条件をいくつか課さなければならない。そのための条件を定義する：

**Definition 3.20** (BOOK, Definition A.2.4.1.). モデル圏 $\mathcal{C}$ が <u>**left proper**</u> であるとは、$i$ が cofibration, $j$ が weak equivalence であるような、すべての pushout square

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & B \arrow[d, "j'"] \\ A' \arrow[r, "i'"'] & B' \end{tikzcd}$$

において、$j'$ もまた weak equivalence となるもののことをいう.

双対的に、モデル圏 $\mathcal{C}$ が <u>**right proper**</u> であるとは, $p$ が fibration, $q$ が weak equivalence であるような、すべての pullback square

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "q'"'] & Y' \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

において、$q'$ もまた weak equivalence となるもののことをいう.

**Proposition 3.21** (BOOK, Proposition A.2.4.2.). $\mathcal{C}$ をすべての対象が *cofibrant* であるようなモデル圏とすると、$\mathcal{C}$ は *left proper* となる.

さらに、一般の圏に関する主張の証明を小圏の場合に帰着するのに便利な概念を導入する。

一般の圏に関する主張の証明を小圏の場合に帰着したい....

**Definition 3.22** (BOOK, Definition A.1.1.1.). $\kappa$ を regular 基数とする。半順序集合 $I$ が <u>**$\kappa$-filtered**</u> とは、すべての部分集合 $\mathfrak{k}_0 \subseteq \mathfrak{k}$ で濃度が $< \kappa$ であるものに対し、$\mathfrak{k}_0$ の上界が $\mathfrak{k}$ に存在するときをいう.

$\mathcal{C}$ をすべての (small) colimits を持つ圏とし、$X$ を $\mathcal{C}$ の対象とする.
$\kappa$-filtered 半順序集合 $\mathfrak{i}$ と $\mathcal{C}$ において $\mathfrak{i}$ によって index された図式 $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{k}}$ に対し、$Y$ でこの図式の colimit を表す. するとこれから集合の間の写像が従う:

$$\psi : \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_\alpha) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y),$$

$\mathcal{C}$ の対象 $X$ は、すべての $\kappa$-filtered 半順序集合 $\mathfrak{i}$ と $\mathcal{C}$ において $\mathfrak{i}$ によって index された図式 $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{k}}$ に対し $\psi$ が全単射であるとき、<u>**$\kappa$-compact**</u> であると呼ばれる.
$\mathcal{C}$ の対象 $X$ は、ある (small) regular 基数 $\kappa$ に対して $\kappa$-compact となるとき、<u>**small**</u> と呼ばれる. この場合、すべての十二分に大きな regular 基数 $\kappa$ に対し、$X$ は $\kappa$-compact となる.

**Definition 3.23** (BOOK, Definition A.1.1.2.). 圏 $\mathcal{C}$ が <u>**presentable**</u> であるとは、次の条件が満たされるときを言う (詳細は [AdámekRosicky] を参照):

(1) 圏 $\mathcal{C}$ にはすべての (small) colimits が存在する.

(2) $\mathcal{C}$ の対象からなる (small) 集合 $S$ が存在して、<u>$\mathcal{C}$ を **colimits** で生成する</u> ものがある; 換言すれば、$\mathcal{C}$ のすべての対象は、$S$ に値を持つ (small) 図式の colimit として得られる.

(3) $\mathcal{C}$ のすべての対象は small. ((2) を仮定すると、これは $S$ に属するすべての対象が small であることに同値.)

**Definition 3.24** ((Smith), [BOOK, Definition A.2.6.1.]). モデル圏 $\mathbf{A}$ は以下が成立するとき <u>**combinatorial**</u> という:

1. 圏 $\mathbf{A}$ は presentable.
2. generating cofibrations の集合 $I$ が存在して、$\mathbf{A}$ における cofibrations の集まりが $I$ を含む最小の saturated [BOOK, Definition A.1.2.2] された集まりとなる.
3. generating trivial cofibrations の集合 $J$ が存在して、$\mathbf{A}$ における trivial cofibrations の集まりが $J$ を含む最小の saturated [BOOK, Definition A.1.2.2] された集まりとなる.

$\mathrm{Cat}_{\mathbf{S}}$ 上の left proper, combinatorial モデル構造

**Proposition 3.25** (BOOK, Proposition A.3.2.4.). モノイダルモデル圏 $\mathbf{S}$ に関して以下を仮定する:

- $\mathbf{S}$ は *combinatorial*
- $\mathbf{S}$ のすべての対象は *cofibrant*
- $\mathbf{S}$ の *weak equivalence* は *filtered colimits* にかんして *stable*

すると、$\mathrm{Cat}_{\mathbf{S}}$ 上には次で特徴づけられる *left proper, combinatorial* モデル構造が入る:

**(C)** *cofibration* のなすクラスは、上の射のなす集合 $C_0$ を飽和する最小のクラス

**(W)** *weak equivalence* は、豊穣関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ で、その誘導関手 $hF : h\mathcal{C} \to h\mathcal{C}_0$ が <u>**equivalence of $h\mathbf{S}$-enriched categories**</u> [BOOK, Definition A.3.2.1]. つまり、

*1.* (<u>**fully faithful**</u>) 各対象対 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し、誘導写像

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_0}(F(X), F(Y))$$

は $\mathbf{S}$ の *weak equivalence.*

*2.* (<u>**essencially surjective**</u>) 各対象 $Y \in \mathcal{C}_0$ は、ホモトピー圏 $h\mathcal{C}_0$ においてある $X \in \mathcal{C}$ に対応する $F(X)$ と同値.

**Definition 3.26** (BOOK, Definition A.3.2.7.). 普通の圏の間の関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は

<u>quasi-fibration</u>
:= $\forall X \in \mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ におけるすべての同型 $f: F(X) \to Y$ に対し, $\mathcal{C}$ における同型 $\overline{f}: X \to \overline{Y}$ が存在して $F(\overline{f}) = f$ となる.

**Remark** (BOOK, Remark A.3.2.8.). *Definition A.3.2.7* の関連性は以下の通り: 圏 Cat は *weak equivalences* が圏の *equivalences*, *fibrations* が *quasi-fibrations* となるようなモデル構造を持つ。これは、後述の [BOOK, Theorem A.3.2.24] の、$\mathbf{S} = Sets$ の *trivial model structure* ( [BOOK, Example A.2.1.2]) を与えた場合の、特別な場合である。

**Definition 3.27** (BOOK, Definition A.3.2.9.). **S** をモノイダルモデル圏、 $\mathcal{C}$ を **S**-豊穣圏とすると、

- 射 $f$ in $\mathcal{C}$ は <u>**equivalence**</u>
  := $f$ の homotopy class $[f]$ は $h\mathcal{C}$ で同型.
- $\mathcal{C}$ は <u>**locally fibrant**</u>
  := $\forall X, \forall Y \in \mathcal{C}$, 写像空間 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \mathbf{S}$ は fibrant object.
- **S**-豊穣関手 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ は <u>**local fibration**</u>
  := 次の条件が満たされる:
  1. $\forall X, \forall Y \in \mathcal{C}$, **S** での誘導写像 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_0}(FX, FY)$ は fibration
  2. 誘導関手 $h\mathcal{C} \to h\mathcal{C}_0$ は圏の quasi-fibration.

**Definition 3.28** (BOOK, Definition A.3.2.12 (Invertibility Hypothesis).). モノイダルモデル圏 **S** に関して以下を仮定する:

- **S** は combinatorial
- **S** のすべての対象は cofibrant
- **S** の weak equivalence は filtered colimits にかんして stable

さらに次の条件が満たされる時、**S** は <u>**invertibility hypothesis**</u> を満たすという:

(*) $i: [1]_{\mathbf{S}} \to \mathcal{C}$ を、ホモトピー圏 $h\mathcal{C}$ で可逆な $\mathcal{C}$ の射 $f$ に対応する **S**-豊穣圏の cofibration とし、pushout diagram を考える

$$\begin{tikzcd}
{[1]_{\mathbf{S}}} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d, "j"] \\
{[1]_{\tilde{\mathbf{S}}}} \arrow[r] & \mathcal{C}\langle f^{-1} \rangle
\end{tikzcd}$$

すると、$j$ は **S**-豊穣圏の equivalence となる.

換言すると、invertibility hypothesis は, $f$ がホモトピー可逆ならば、$f$ を **S**-豊穣圏 $\mathcal{C}$ で可逆にしても $\mathcal{C}$ のホモトピー型を変えないことを、主張する

**Definition 3.29** (BOOK, Definition A.3.2.16.). モデル圏 **S** が <u>**excellent**</u> であるとは、次の条件を満たす対称モノイダル構造が与えられているときをいう:

**(A1)** モデル圏 **S** は combinatorial.

**(A2)** **S** におけるすべての単射は cofibration で, cofibrations の集まりは products に関して stable

**(A3)** **S** における weak equivalences の集まりは filtered colimits に関して stable

**(A4)** **S** におけるモノイダル構造はモデル構造と compatible、つまり、テンソル積関手 $\otimes$ : $\mathbf{S} \times \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ は left Quillen bifunctor (それゆえ **S** は閉モノイダルとなる).

**(A5)** モノイダルモデル圏 **S** は invertibility hypothesis を満たす.

**Remark** (BOOK, Remark A.3.2.17.). [BOOK, Definition A.3.2.16] の公理 *(A2)* は、**S** のすべての対象が *cofibrant* トなることを意味する。特に、**S** は *left proper*.

**Example 3.30** (BOOK, Example A.3.2.18 (Dwyer, Kan).). 単体集合の圏 *SSets* は、Kan モデル構造と Cartesian 積を与えられたとき、excellent モデル圏となる。唯一の非自明な点は *SSets* が invertibility hypothesis を満たすことをしめすことだが、これが [DwyerKan] の主定理だった.

excellent model category に豊穣された圏の fibrant object

**Theorem 3.31** (BOOK, Theorem A.3.2.24.). $\mathbf{S}$ を *excellent model category* とすると、$\mathrm{Cat}_{\mathbf{S}}$ には [BOOK, Proposition A.3.2.4] のモデル構造が入る、

*1.* **S-豊穣圏** $\mathcal{C}$ は、

$$\underline{\mathrm{Cat}_{\mathbf{S}} \text{ の } \textit{fibrant object}} \Longleftrightarrow \textit{locally fibrant} \Longleftrightarrow$$
$$\forall X, Y \in \mathcal{C},\ \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \mathbf{S} \text{ は } \textit{fibrant}.$$

*2.* $\mathcal{D}$ が $\mathrm{Cat}_{\mathbf{S}}$ の *fibrant object* とすると、**S-豊穣関手** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は、

$$\mathrm{Cat}_{\mathbf{S}} \text{ の } \textit{fibrantion} \Longleftrightarrow \textit{local fibration} \Longleftrightarrow$$

1.$\forall X, \forall Y \in \mathcal{C}$, $\mathbf{S}$ での誘導写像 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_0}(FX, FY)$ は *fibration*

2.誘導関手 $h\mathcal{C} \to h\mathcal{C}_0$ は圏の *quasi-fibration*.

excellent モデル圏 $\mathbf{S}$ のすべての対象は cofibrant なので、$\mathbf{S}^f = \mathbf{S}^\circ$. よって次をを得る：

**Corollary 3.32.** *excellent* モデル圏 $\mathbf{S}$ に対し、

$$(\mathrm{Cat}_{\mathbf{S}})^f = \mathrm{Cat}_{\mathbf{S}^\circ}$$

$\mathbf{S} = \mathit{SSets}$ の場合、以上の議論から次を得る：

Bergner モデル構造

**Corollary 3.33.** $\mathrm{Cat}_\Delta := \mathrm{Cat}_{\mathit{SSets}}$ 上には次で特徴づけられる *left proper, combinatorial* モデル構造が入る：

**(C)** *cofibration* のなすクラスは、上の射のなす集合 $C_0$ を飽和する最小のクラス

**(F)'** $\mathcal{C} \mapsto \mathrm{Sing}\,|\mathcal{C}|$ は $\mathrm{Cat}_\Delta$ の *Bergner* モデル構造に関する *fibrant replacement*.

**(W)** (**Dwyer-Kan equivalence**) *weak equivalence* は、豊穣関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ で、その誘導関手
$hF : h\mathcal{C} \to h\mathcal{C}_0$ が **equivalence of** ***hSSets*****-enriched categories**. つまり、

*1.* (**fully faithful**) 各対象対 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し, 誘導写像

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_0}(F(X), F(Y))$$

は *SSets* の *weak equivalence*.

*2.* (**essencially surjective**) 各対象 $Y \in \mathcal{C}_0$ は、ホモトピー圏 $h\mathcal{C}_0$ においてある $X \in \mathcal{C}$ に対応する $F(X)$ と同値.

## 3.5 Joyal モデル構造

Joyal モデル構造

**Theorem 3.34** (Theorem 2.2.5.1.). *SSets* に、*left proper, combinatorial* なモデル構造 (**Joyal モデル構造** と呼ばれる) が、次の性質を持つように存在する：

**(C)** 単体写像 $p : S \to S'$ は *cofibration* $\Longleftrightarrow$ $p : S \to S'$ は単射.

**(W)** 単体写像 $p : S \to S'$ は *categorical equivalence*
$\Longleftrightarrow$ 誘導 *simplicial* 関手 $\mathfrak{C}[S] \to \mathfrak{C}[S']$ は *simplicial* 圏の *equivalence*.

**(F)** 単体写像 $p : S \to S'$ は **categorical fibration**
$\Longleftrightarrow$ $p$ はすべての *cofibration* かつ *categorical equivalence* であるような射に対し、*right lifting property* を持つ.

更に、随伴関手 $(\mathfrak{C}, \mathcal{N})$ は *SSets(Joyal* モデル構造*)* と $\mathrm{Cat}_\Delta$*(Bergner* モデル構造*)* の間の *Quillen equivalence* を定める：

$$\mathit{SSets} \underset{\mathcal{N}}{\overset{\mathfrak{C}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Cat}_\Delta.$$

ここで、$\mathrm{Cat}_\Delta = \mathrm{Cat}_{SSets}$ にモデル構造を導入するのに *SSets* の *Kan* モデル構造が用いられたにもかかわらず、$\mathrm{Cat}_\Delta = \mathrm{Cat}_{SSets}$ と *Quillen* 同値になるのは *SSets* の *Joyal* モデル構造である事に注意する。

Joyal モデル構造存在証明の途中で現れる次の 2 つの重要な結果は、共に quasi-category Yoneda's lemma の証明でも用いられる：

categorical equivalence と積構造

**Corollary 3.35** (BOOK, Corollary 2.2.5.4. を 2 度用いる).
(i) $f : A \to B, g : K \to L$ 共に単体集合の間の *categorical equivalence* とすると、

$$f \times g : A \times K \to B \times L$$

も単体集合の間の *categorical equivalence* となる。
(ii) $hSSets$ で *SSets* の *Joyal* モデル構造に関するホモトピー圏を表し、単体集合 $A$ の $hSSets$ における像を $[A]$ と表すと、(i) から直ちにすべての単体集合 $X, Y$ に対し、

$$[X \times Y] \simeq [X] \times [Y] \qquad (hSSets \text{ において})$$

$(\mathfrak{C}, \mathcal{N})$ の counit 写像の写像空間

**Theorem 3.36** (BOOK, Theorem 2.2.0.1.). $\mathcal{C}$ を *fibrant* な *simplicial category* (つまり、すべての写像空間 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x, y)$ が *Kan complex* となるような *simplicial category*), $x, y \in \mathcal{C}$ をその対象対とする。すると *counit* 写像

$$u : \mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\mathcal{N}(\mathcal{C})]}(x, y) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x, y)$$

は、単体集合の *weak homotopy equivalence* となる。.

*SSets* の Joyal モデル構造と Kan モデル構造を比べると、 cofibration はともに単体集合の単射であるが、fibration においては、方や categorical fibration、方や Kan fibration という相違がある。[BOOK] では様々な単体写像 $f : X \to S$ に関する "fibration" の概念が考察され

ているが、それらの相関関係は以下の図に要領よく纏められる [BOOK. Remark 2.0.0.5.]：

$$
\begin{tikzcd}
 & f\ \text{は trivial fibration} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & f\ \text{は Kan fibration} \arrow[dl, Rightarrow, dashed] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
f\ \text{は left fibration} \arrow[d, Rightarrow] & & f\ \text{は right fibration} \arrow[d, Rightarrow] \\
f\ \text{は coCartesian fibration} \arrow[dr, Rightarrow] & & f\ \text{は Cartesian fibration} \arrow[dl, Rightarrow, dashed] \\
 & f\ \text{は categorical fibration} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & f\ \text{は inner fibration} &
\end{tikzcd}
$$

本稿ではこれらの "fibration" をいちいち定義しないが、特に Kan fibration $\Longrightarrow$ categorical fibration に着目すると、次がわかる：

categorical equivalence $\Longrightarrow$ (Kan モデル構造に関する) weak equivalence

## 3.6 Quasi Category の特徴付け

quasi category の Joyal モデル構造での特徴付け

**Theorem 3.37** (BOOK. Theorem 2.4.6.1.). 単体集合 $\mathcal{C}$ に対し、

$$\mathcal{C}\ \text{は}\ \textit{Joyal}\ \text{モデル構造で}\ \textit{fibrant} \iff \mathcal{C}\ \text{は}\ \textit{quasi category}.$$

これを用いて次が示される：

quasi category がターゲットのときの *SSets* での「写像空間」

**Notation 3.38** (BOOK. Notation 1.2.7.2.). 単体集合 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に対し、$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ で $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への単体写像をパラメトライズする単体集合 $\mathrm{Map}_{SSets}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ とする。この記法は、$\mathcal{D}$ が **quasi category** のときだけ使う

$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ を $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への 関手のなす **quasi category** と呼び、quasi category $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ の morphisms を 関手の自然変換、equivalences を 自然同値 とよぶ。

**Proposition 3.39** (BOOK. Proposition 1.2.7.3.). $K$ を任意の単体集合とする。

*(1)* すべての *quasi-category* $\mathcal{C}$ に対し、単体集合 $\mathrm{Fun}(K, \mathcal{C})$ は *quasi-category* となる.

*(2)* $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が *quasi-category* の *categorical equivalence* ならば、誘導された射 $\mathrm{Fun}(K, \mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}(K, \mathcal{D})$ も *categorical equivalence* となる.

*(3)* $\mathcal{C}$ が *quasi-category* で $K \to K'$ が単体集合の間の *categorical equivalence* ならば、誘導された射 $\mathrm{Fun}(K', \mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}(K, \mathcal{C})$ も *categorical equivalence* となる.

# 4 Lurie の quasi-category Yoneda's Lemma

## 4.1 quasi-category Yoneda's Lemma の定式化

最初に単体集合の opposite を定義する：

**Definition 4.1** (BOOK, 1.2.1). 単体集合 $S$ の **opposite** $S^{\mathrm{op}}$ を次のように定義する: $S^{\mathrm{op}}_n = S_n$、ただし、$S^{\mathrm{op}}$ での face と degeneracy は次で与えられる：

$$(d_i : S^{\mathrm{op}}_n \to S^{\mathrm{op}}_{n-1}) = (d_{n-i} : S_n \to S_{n-1})$$
$$(s_i : S^{\mathrm{op}}_n \to S^{\mathrm{op}}_{n+1}) = (s_{n-i} : S_n \to S_{n+1}).$$

quasi-category Yoneda's embedding

**Definition 4.2** (BOOK, 5.1.3).

**Step 1** 単体集合 $K$ に対し、$\mathfrak{C}[K]$ は simplicial 圏だった：

$$SSets \underset{\mathcal{N}}{\overset{\mathfrak{C}}{\rightleftarrows}} Cat_\Delta,$$

**Step 2** simplicial 圏 $\mathfrak{C}[K]$ の写像空間 $\in SSets$ の Kan モデル構造に関する fibrant replacement を考える：

$$\mathfrak{C}[K^{\mathrm{op}} \times K] \to \mathfrak{C}[K]^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{C}[K] \to \mathcal{K}an$$
$$(X, Y) \mapsto \mathrm{Sing}\,|\,\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[K]}(X, Y)|$$

**Step 3** この随伴対 $(\mathfrak{C}, \mathcal{N})$ に関する随伴を考える：

$$K^{\mathrm{op}} \times K \to \mathcal{N}(\mathcal{K}an) =: \mathcal{S}$$

**Step 4** この (**small** とは限らない) $SSets$ における閉モノイダル構造にかんする随伴 $j$ を考える：

$$j : K \to \mathrm{Map}_{SSets}(K^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}) \overset{\mathcal{S}\text{ は quasi-category}}{=:} \mathrm{Fun}(K^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}) =: \mathcal{P}(K)$$

この $j : K \to \mathcal{P}(K)$ を **quasi-category Yoneda's embedding** と呼ぶ。

やっと今回のメインイベントに辿り着いた:

Quasi Category Yoneda's Lemma

**Proposition 4.3** (Proposition 5.1.3.1 ($\infty$-Categorical Yoneda Lemma)). 単体集合 $K$ に対し、*quasi-category Yoneda embedding* $j : K \to \mathcal{P}(K)$ は単体写像として **fully faithful**. すなわち、対応する *simplically* 豊穣関手

$$\mathfrak{C}[j] : \mathfrak{C}[K] \to \mathfrak{C}[\mathcal{P}(K)]$$

が *fully faithful. i.e.* 各対象対 $X, Y \in \mathcal{C}[K]$ に対し，誘導写像

$$\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[K]}(X, Y) \to \mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\mathcal{P}(K)]}(\mathfrak{C}[j](X), \mathfrak{C}[j](Y))$$

は *SSets* の *weak equivalence.*

この証明の概略を丸裸にして本稿を終えよう：

## 4.2 証明の概略

**証明の概略**

**Step 1:** $\mathfrak{C}[K]$ の fibrant replacement $\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|$ に対応する $SSets^{\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|}$ に、*projective model structure* (次ページ参照) を導入する.

**Step 2:** この fibrant replacement は写像空間のレベルで行われることに注意し、次の可換図式に注意する：

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}[K^{\mathrm{op}} \times K] \to \mathfrak{C}[K^{\mathrm{op}}] \times \mathfrak{C}[K] \arrow[r] \arrow[d] & SSets \arrow[r] & (SSets)^{\circ} = \mathcal{K}an \arrow[d, equal] \\
(\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}} \times (\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|) \arrow[rr] \arrow[d] & & (SSets)^{\circ} = \mathcal{K}an \arrow[d, equal] \\
(\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}} \times \left(SSets^{(\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}}}\right)^{\circ} \arrow[rr] & & (SSets)^{\circ} = \mathcal{K}an
\end{tikzcd}$$

**Step 3:** この随伴対 $(\mathfrak{C}, \mathcal{N})$ に関する随伴を取り、可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
K^{\mathrm{op}} \times K \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{N}((SSets)^{\circ}) = \mathcal{N}(\mathcal{K}an) = \mathcal{S} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}}) \times \mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{N}((SSets)^{\circ}) = \mathcal{N}(\mathcal{K}an) = \mathcal{S} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}}) \times \mathcal{N}\left(\left(SSets^{(\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}}}\right)^{\circ}\right) \arrow[r] & \mathcal{N}((SSets)^{\circ}) = \mathcal{N}(\mathcal{K}an) = \mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

**Step 4:** この閉モノイダル構造に関する随伴を取り、可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "j:\ \text{q.c. 米田埋め込み}"] \arrow[d, "j_1"] & \mathrm{Fun}(K^{\mathrm{op}}, \mathcal{N}((SSets)^{\circ})) = \mathrm{Fun}(K^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}) = \mathcal{P}(K) \\
\mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)) \arrow[r] \arrow[d, "j_2"] & \mathrm{Fun}(\mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}}), \mathcal{N}((SSets)^{\circ})) \arrow[u, "j_5"'] \arrow[d, equal] \\
\mathcal{N}\left(\left(SSets^{(\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}}}\right)^{\circ}\right) \arrow[r, "j_4 \circ j_3"] \arrow[d, "j_3"] & \mathrm{Fun}(\mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}}), \mathcal{N}((SSets)^{\circ})) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{N}\left(\left(SSets^{\mathfrak{C}[\mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}})]}\right)^{\circ}\right) \arrow[r, "j_4"] & \mathrm{Fun}(\mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}}), \mathcal{N}((SSets)^{\circ}))
\end{tikzcd}$$

**Step 5:** $j_1 : K \to \mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|))$ は categorical equivalence. よって fully faithful.

**Step 6:** $j_5 : \mathrm{Fun}(\mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}}), \mathcal{N}((SSets)^{\circ})) \to \mathrm{Fun}(K^{\mathrm{op}}, \mathcal{N}((SSets)^{\circ}))$ は categorical equivalence. よって fully faithful.

**Step 7:** (ここで古典的な豊穣版米田の補題 [Kelly, p.33 (2.31)] を用いる)

$j_2 : \mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)) \to \mathcal{N}\left(\left(SSets^{(\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}}}\right)^{\circ}\right)$ は fully faithful.

**Step 8:** $j_3 : \mathcal{N}\left(\left(SSets^{(\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}}}\right)^{\circ}\right) \to \mathcal{N}\left(\left(SSets^{\mathfrak{C}[\mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}})]}\right)^{\circ}\right)$ は categorical equivalence. よって fully faithful.

**Step 9:** (ここが証明の本質、combinatorial モデル圏の手法も用いる) 上の可換図式の底辺の射

$j_4 : \mathcal{N}\left(\left(SSets^{\mathfrak{C}[\mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}})]}\right)^{\circ}\right) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{N}((\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{C}[K]|)^{\mathrm{op}}), \mathcal{N}((SSets)^{\circ}))$

は categorical equivalence. よって fully faithful.

**Step 10:** 以上より、quasi-category 米田埋め込み

$$j = j_5 \circ j_4 \circ j_3 \circ j_2 \circ j_1 : K \to \mathrm{Fun}(K^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}) = \mathcal{P}(K)$$

も fully faithful となる.

参考：projective model structure と injdective model structure

**Notation 4.4** (BOOK, A.3.3).

$$\mathbf{S} := \text{excellent モデル圏}$$
$$\mathbf{A} := \text{combinatorial } \mathbf{S}\text{-豊穣モデル圏}$$
$$\mathcal{C} := \text{小 } \mathbf{S}\text{-豊穣圏}$$
$$\mathbf{A}^{\mathcal{C}} := \mathcal{C} \text{ から } \mathbf{A} \text{ への } \mathbf{S}\text{-豊穣関手のなす圏}$$

例：$\mathbf{S} = SSet, \mathcal{C} = \mathrm{Sing}\,|\mathfrak{d}[K]|$, $\mathbf{A} = SSets$ のとき、$\mathbf{A}^{\mathcal{C}} = SSets^{\mathrm{Sing}\,|\mathfrak{d}[K]|}$

**Definition 4.5** (BOOK, Definition A.3.3.1.). $\mathbf{A}^{\mathcal{C}}$ における自然変換 $\alpha : F \to G$ は：

- 各 $C \in \mathcal{C}$ に対して誘導射 $F(C) \to G(C)$ が $\mathbf{A}$ における cofibration となるとき、**injective cofibration** と呼ばれる。
- 各 $C \in \mathcal{C}$ に対して誘導射 $F(C) \to G(C)$ が $\mathbf{A}$ における fibration となるとき、**projective fibration** と呼ばれる。
- 各 $C \in \mathcal{C}$ に対して誘導射 $F(C) \to G(C)$ が $\mathbf{A}$ における weak equivalence となるとき、**weak equivalence** と呼ばれる。
- $\mathbf{A}^{\mathcal{C}}$ の weak equivalence かつ injective cofibration であるような各射 $\beta$ に対して right lifting property を持つとき、**injective fibration** と呼ばれる。
- $\mathbf{A}^{\mathcal{C}}$ の weak equivalence かつ projective fibration であるような各射 $\beta$ に対して left lifting property を持つとき、**projective cofibration** と呼ばれる。

**Remark** (BOOK, Remark A.3.3.5.). 各対象 $C \in \mathcal{C}, A \in \mathbf{A}$ にたいして，関手 $\mathcal{F}_A^C \in \mathbf{A}^{\mathcal{C}}$ を次で与える：

$$D \longmapsto A \otimes \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(C, D).$$

[BOOK, Proposition A.2.8.3] の証明のように，$\mathbf{A}^{\mathcal{C}}$ における *projective cofibrations* のクラスは、$\mathbf{A}$ の *cofibration* $A \to A'$ から得られる $j : \mathcal{F}_A^C \to \mathcal{F}_{A'}^C$ の形の *cofibrations* によって生成される。これより、すべての *projective cofibration* は *injective cofibration* となる。双対的に、すべての *injective fibration* は *projective fibration* となる。

**Proposition 4.6** (BOOK, Proposition A.3.3.2.). $\mathbf{A}^{\mathcal{C}}$ 上に 2 つの *combinatorial model structures* が存在する：

- *projective cofibrations, weak equivalences, projective fibrations* によって定まる **projective model structure**.
- *injective cofibrations, weak equivalences, injective fibrations* によって定まる **injective model structure**.

**Remark.** $\mathbf{A}^{\mathcal{C}}$ 上で *projective model structure* と *injective model structure* のどちらを考えても、[BOOK, A.3.3.5] より評価写像 $e : \mathbf{A}^{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{C} \to \mathbf{A}$ は次を誘導する：

$$e : (\mathbf{A}^{\mathcal{C}})^{\circ} \otimes \mathcal{C} \to \mathbf{A}^{\circ}$$

**Proposition 4.7** (BOOK, Proposition A.3.3.7.). $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を、小 $\mathbf{S}$-豊穣圏の間の $\mathbf{S}$-豊穣関手、$f^* : \mathbf{A}^{\mathcal{C}'} \to \mathbf{A}^{\mathcal{C}}$ を $f$ との合成によって定まるものとする。
すると、$f^*$ は右随伴 $f_*$ と左随伴 $f_!$ を持ち、さらに：

*(1)* 随伴対 $(f_!, f^*)$ は、$\mathbf{A}^{\mathcal{C}}$ と $\mathbf{A}^{\mathcal{C}'}$ の *projective model structures* に関する *Quillen* 随伴を定める。

*(2)* 随伴対 $(f^*, f_*)$ は、$\mathbf{A}^{\mathcal{C}}$ と $\mathbf{A}^{\mathcal{C}'}$ の *injective model structures* に関する *Quillen* 随伴を定める。

**Proposition 4.8** (BOOK, Proposition A.3.3.8.). $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を、小 $\mathbf{S}$-豊穣圏の間の $\mathbf{S}$-豊穣同値とすると、、

*(1)* *Quillen* 随伴対 $(f_!, f^*)$ は、$\mathbf{A}^{\mathcal{C}}$ と $\mathbf{A}^{\mathcal{C}'}$ の *projective model structures* に関する *Quillen* 同値を定める。

*(2)* *Quillen* 随伴対 $(f^*, f_*)$ は、$\mathbf{A}^{\mathcal{C}}$ と $\mathbf{A}^{\mathcal{C}'}$ の *injective model structures* に関する *Quillen* 同値を定める。

# 5 参考文献


[BOOK] Jacob Lurie. *Higher Topos Theory*. August 1, 2008, 735p.

[DAGI] Jacob Lurie. DAGI - Stable Infinity Categories. April 3, 2008, 81p.

[DAGII] Jacob Lurie. DAGII - Noncommutative Algebra. March 31, 2008, 171p.

[DAGIII] Jacob Lurie. DAGIII - Commutative Algebra. April 3, 2008, 83p.

[DAGIV] Jacob Lurie. DAGIV - Deformation Theory, March 31, 2008, 91p.

[DAGV] Jacob Lurie. DAGV - Structured Spaces. March 31, 2008, 164p;

[DAGVI] Lurie, J. Derived Algebraic Geometry VI: Spectral Schemes.

[AGMC] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi. Algebraic Geometry over model categories (a general approach to derived algebraic geometry), math.AG-0110109 , 51pages

[HAG1] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi. Homotopical Algebraic Geometry I: Topos theory, math.AG-0207028, 71pages

[HAG2] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi. Homotopical Algebraic Geometry II: Geometric stacks and applications. math.AG-0404373, 228pages.

[Joyal] A. Joyal. Quasi-categories and Kan complexes. Journal of Pure and Applied Algebra 175 (2002), 207-222.

[BoardmanVogt] J.M. Boardman and R.M. Vogt. Homotopy Invariant Structures on Topological Spaces. Lecture Notes in Mathematics 347. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1973.

[DwyerKan] W.G. Dwyer, and D.M. Kan, Simplicial localizations of categories. J. Pure Appl. Algebra 17, (1980), 267-284.

[Rezk] Charles Rezk, Toposes and Homotopy Toposes.
**http://www.math.uiuc.edu/ rezk/homotopy-topos-sketch.dvi**

[SchwedeShipley] Stefan Schwede and Brooke E. Shipley, Algebras and modules in monoidal model categories, Proc. London Math. Soc. 80 (2000), 491-511.

[Hovey] M. Hovey, Model Categories. American Mathematical Society, 1998.

[Hirshhorn] P. Hirschhorn. Model Categories and Their Localizations. Mathematical Surveys and Monographs Volume 99, American Mathematical Society, 2003.

[AdámekRosicky] Adámek and Rosicky. Locally Presentable and Accessible Categories. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Kelly] G. M. Kelly,. Basic Concepts of Enriched Category Theory, London Mathematical Society Lecture Note Series No.64 (C.U.P., 1982)
**http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10.pdf**

[南] 南範彦、Lurie さんの楕円コホモロジー、Proceedings of the 34th Symposium on Transformation Groups, Wing Col. Ltd. November 2007, p.107-p.116.
**http://www.wakayama-u.ac.jp/ kawa/math/34th/minami.pdf**