数理解析研究所講究録
第1612巻 2008年 154-157

実ボット多様体の剛性

大阪市立大学・大学院理学研究科　枡田幹也 (Mikiya Masuda)

Graduate School of Science

Osaka City University

1. 序

ここでは，トーリック多様体と言えば，コンパクトで非特異を仮定する．トーリック多様体の分類は扇の分類に帰着され，その事実を用いてトーリック多様体の分類がある条件下でなされている．(例えば，[9], [14], [15] を参照)．しかし，トーリック多様体の（微分）同相による分類についてはあまり分かっていないようである．当然のことながら，コホモロジー環は（微分）同相類の不変量であるが，最近筆者と D.Y.Suh 氏は，「コホモロジー環が同型であるトーリック多様体は微分同相かボット」との問題を提起した ([12])．実際，特殊な場合には肯定的な結果を得ている（[5], [11], [12]）．

$\mathbb{C}P^n$ はトーリック多様体の典型例であるが，その実点の集合（または複素共役をとる作用の不動点集合）として $\mathbb{R}P^n$ が得られる．一般のトーリック多様体 X に対しても実点の集合 $X(\mathbb{R})$ が定義され，この $X(\mathbb{R})$ を実トーリック多様体という．$X(\mathbb{R})$ は X の半分次元で

$$H^*(X(\mathbb{R});\mathbb{Z}/2)\cong H^{2*}(X;\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}/2.$$

が成り立つ．この事実に注目して，トーリック多様体に対する問題の類似として次の問題を考える．

実トーリック多様体に対するコホモロジー的剛性問題. $\mathbb{Z}/2$ 係数コホモロジー環が同型である実トーリック多様体は微分同相か.

トーリック多様体は単連結であるが，実トーリック多様体は単連結ではない．したがって，コホモロジー環，しかも，$\mathbb{Z}/2$ 係数のコホモロジー環が多様体の微分同相類を決定していまうとは信じがたいが，反例は知られていない．本稿では，上記の問題を支持する結果，および，それに纏わる結果を報告する．

2. 主結果

次の $\mathbb{R}P^1$ 束の系列を考える．

$$M_n \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_{n-1} \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} \cdots \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_1 \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_0 = \{\ 1\text{点}\ \} \tag{2.1}$$

ここで，$M_i \to M_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ は，M_{i-1} 上の２つの直線束の Whitney 和の射影化である．２つの直線束の一方を自明なものとしても一般性は失われない．Grossberg-Karshon ([7]) は，複素の場合の上の系列を考えており，その系列を高さ n のボット塔 (Bott tower) とよんでいる．それに倣って，上の系列を高さ n の実ボット塔 (real Bott tower) とよぶことにする．また，系列のトップの多様体 M_n を実ボット多様体 (real Bott manifold) とよぶ．実ボット多様体は，実トーリック多様体である．

Theorem 2.1 ([8]). $\mathbb{Z}/2$ 係数コホモロジー環が同型である実ボット多様体は微分同相である．

<u>証明の方針</u>. (1) 実ボット多様体は，平坦リーマン計量をもつ多様体であることに注意する．したがって，Bieberbach の定理より，基本群の同型が微分同相を意味する．

(2) ２つの実ボット多様体 M, M' の $\mathbb{Z}/2$ 係数コホモロジー環が同型であるとし，

$$f\colon H^*(M;\mathbb{Z}/2) \to H^*(M';\mathbb{Z}/2)$$

を同型写像とする．実ボット多様体の $\mathbb{Z}/2$ 係数コホモロジー環は，次数 1 の元で生成されているから，f の H^1 への制限をみれば十分である．この制限写像を行列で表して，$(0,1)$ 正方行列 F を得る．

(3) 行列 F を用いて，基本群の間の準同型

$$\rho\colon \pi_1(M') \to \pi_1(M)$$

を構成する．F を整数行列と思って $\det F = \pm 1$ ならば ρ は同型であるが，一般に $\det F$ は奇数である．このことから，ρ はいつも単射で $\pi_1(M)/\rho(\pi_1(M'))$ の元の数は奇数であることが分かる．

(4) 群の短完全系列

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to \pi_1(M') \to (\mathbb{Z}/2)^n \to 0$$

がある．$\pi_1(M)$ に対しても同様．(3) で構成した ρ がこれら２つの短完全系列の間の写像を導く．ρ の存在を用いて，群 $(\mathbb{Z}/2)^n$ の群 $\mathbb{Z}^n$ による拡大を考察して（ρ は同型写像とは限らないが）$\pi_1(M)$ と $\pi_1(M')$ が同型であることをみる．その際，$\pi_1(M)/\rho(\pi_1(M'))$ の元の数は奇数であることが効く． □

3. 関連する結果

$H^1(M_k;\mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)^k$ であるから，系列 (2.1) にある M_k 上には 2^k 個の直線束がある．したがって，高さ n の実ボット塔の数は $2^{n(n-1)/2}$ である．一方，n 次元実ボット多様体の微分同相類の数を H_n とすると，小さい n に対しては，

$$H_1 = 1,\ H_2 = 2,\ H_3 = 4,\ H_4 = 12,\ H_5 = 54$$

と分かっているが，一般の n に対しては不明である．ただし，任意の n に対して $H_n > 2^{(n-2)(n-3)/2}$ であることは分かる．

２つの実ボット多様体の直積は再び実ボット多様体である．そこで，実ボット多様体の直積分解を考える．実ボット多様体が２つの実ボット多様体の直積に表せない時，分解できないということにする．定理 2.1 を使って次が示せる．

Theorem 3.1 ([10]). 実ボット多様体を分解できない実ボット多様体の直積に分解する仕方は，直積因子の順番を除けば一意である．

Corollary 3.2. 実ボット多様体 M, M' に対して，$S^1 \times M$ と $S^1 \times M'$ が微分同相ならば，M と M' は微分同相である．

実ボット多様体は平坦リーマン計量をもつ多様体であるが，平坦リーマン計量をもつ一般の多様体に対しては，上記の系は成立しないことが知られている ([2])．したがって上記の定理または系は，実ボット多様体のもう一つの剛性と言える．一般のトーリック多様体に対して上記の定理または系が成立するかどうかは，興味ある問題である．

n 次元実トーリック多様体は $(\mathbb{Z}/2)^n$ 作用をもつ．実ボット多様体は平坦リーマン計量を許すが，実際には $(\mathbb{Z}/2)^n$ 作用で不変な平坦リーマン計量を許す．次の定理は，この逆が成立することを主張している．

Theorem 3.3 ([8]). $(\mathbb{Z}/2)^n$ 作用で不変な平坦リーマン計量を許す n 次元実トーリック多様体は，実ボット多様体である．

References

[1] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*, University Lecture Series, vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.

[2] L. S. Charlap, *Compact flat Riemannian manifolds: I*, Ann. of Math. 81 (1965). 15–30.

[3] S. Choi, *The number of small covers over cubes*, arXiv:0802.1982.

[4] S. Choi, M. Masuda and D. Y. Suh, *Quasitoric manifolds over a product of simplices*, arXiv:0803.2749.

[5] S. Choi, M. Masuda and D. Y. Suh, *Topological classification of generalized Bott towers*, arXiv:0807.4334.

[6] W. Fulton, *An Introduction to Toric Varieties*, Ann. of Math. Studies, vol. 113, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.
[7] M. Grossberg and Y. Karshon, *Bott towers, complete integrability, and the extended character of representations*, Duke Math. J 76 (1994), 23–58.
[8] Y. Kamishima and M. Masuda, *Cohomological rigidity of real Bott manifolds*, arXiv:0807.4263.
[9] P. Kleinschmidt, *A classification of toric varieties with few generators*, Aequationes Mathematicae **35** (1988), 254–266.
[10] M. Masuda, *Classification of real Bott manifolds*, preprint.
[11] M. Masuda and T. Panov, *Semifree circle actions, Bott towers, and quasitoric manifolds*, Sbornik Math. (to appear), arXiv math.AT/0607094.
[12] M. Masuda and D. Y. Suh, *Classification problems of toric manifolds via topology*, Proc. of Toric Topology, Contemp. Math. 460 (2008), 273–286, arXiv:0709.4579.
[13] A. Nazra, *Real Bott tower*, Tokyo Metropolitan University, Master Thesis 2008.
[14] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
[15] H. Sato, *Smooth toric Fano five-folds of index two*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 82 (2006), 106–110.

Department of Mathematics, Osaka City University, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan.
E-mail address: masuda@sci.osaka-cu.ac.jp