数理解析研究所講究録
第 1615 巻 2008 年 57-66

準非拡大写像族の共通不動点への弱収束定理とその応用

(Weak convergence theorems for finding common fixed points of finite families of generalized nonexpansive mappings and their applications)

茨木貴徳 (Takanori Ibaraki)
名古屋大学情報連携統括本部
(Information and Communications Headquarters, Nagoya University)
高橋渉 (Wataru Takahashi)
東京工業大学大学院情報理工学研究科
(Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology)

2000 Mathematics Subject Classification : Primary 47H09, Secondary 47H10, 41A36

Keywords : 準非拡大写像, サニー準非拡大射影, W-写像, ブロック写像, 不動点, 画像復元問題

1 はじめに

H を実ヒルベルト空間とし, $\{C_i\}_{i=1}^r$ を H の空でない閉凸集合の族で $C_0 = \cap_{i=1}^r C_i$ が空集合でないとする. このとき, 画像復元問題 (problem of image recovery) とは H から C_i の上への距離射影 (metric projection) P_{C_i} $(i = 1, 2, \ldots, r)$ のみを用いた点列近似法で C_0 の元 z を求める問題である. ここで, H から C_i の上への距離射影 P_{C_i} とは, 任意の $x \in H$ に 対して次で定義される.

$$P_{C_i}(x) = \operatorname*{argmin}_{y \in C_i} \|x - y\|.$$

この距離射影は次の重要な性質を持っている. すなわち $x \in H$ と $z \in C_i$ に対して, $z = P_{C_i}x$ であることの必要十分条件は, 任意の C_i の元 y に対して

$$\langle x - z, z - y \rangle \geq 0 \tag{1.1}$$

が成り立つことである. この性質を用いると P_{C_i} は非拡大射影 (nonexpansive retraction), すなわち任意の $x, y \in H$ に対して

$$\|P_{C_i}x - P_{C_i}y\| \leq \|x - y\|$$

かつ, 任意の C_i の元 z に対して $P_{C_i}z = z$ であることがわかる. すなわち, $F(P_{C_i}) = C_i$ が成り立つ. ここで, $F(P_{C_i})$ は P_{C_i} の不動点全体の集合を表す. つまり, 有限次元ユークリッド空間やヒルベルト空間における画像復元問題は非拡大写像族の共通不動点を求める問題に帰着できる.

距離射影の概念はバナッハ空間の場合にも拡張される. バナッハ空間での距離射影 (metric projection) とサニー非拡大射影 (sunny nonexpansive retraction) の 2 つの射影は古くから知られていた. 1996 年に Alber [2] は第 3 の射影である準距離射影 (generalized projection) の概念を導入した. さらに近年, 茨木-高橋 [9, 11] は第 4 の射影であるサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) の概念を導入した. これらの射影はヒルベルト空間上の距離射影の自然な拡張になっている. それはこれらの射影の

性質を比較してみるとよくわかる．比較しやすいよう E を滑らか，狭義凸，回帰的なバナッハ空間とする．C を E の閉凸集合とし，P_C, Π_C, Q_C, R_C をそれぞれ E から C の上への 距離射影，準距離射影，サニー非拡大射影，サニー準非拡大射影とする．このとき，$x \in E$，$x_0 \in C$ に対して，

$$\begin{aligned} x_0 = P_C x &\iff \langle J(x - x_0), x_0 - y\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ x_0 = \Pi_C x &\iff \langle Jx - Jx_0, x_0 - y\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ x_0 = Q_C x &\iff \langle x - x_0, J(x_0 - y)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ x_0 = R_C x &\iff \langle x - x_0, Jx_0 - Jy\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \end{aligned}$$

である．ヒルベルト空間上での距離射影の重要な性質 (1.1) を考慮すると，これら 4 つの非線形射影はバナッハ空間への拡張と考えたとき自然な拡張であると言えよう．実際，この 4 つの射影をヒルベルト空間で考えると全て同じ射影となることは容易にわかる．なぜなら，ヒルベルト空間では双対写像 J は恒等写像 I となり，この 4 つの性質は (1.1) と一致するからである ([9,11] を参照).

一方，バナッハ空間の非拡大写像族の共通不動点を求める手法には，高橋-下地 [28,31] によって研究された非拡大写像族から生成される W-写像 (W-mapping) とよばれる非線形写像を用いる手法や，Aharoni-Censor [1]，吉川-高橋 [18] によって研究された非拡大写像族から生成されるブロック写像 (block mapping) とよばれる非線形写像を用いる手法がある．彼らはこれらの非線形写像を用いて点列を構成し，ある条件下で共通不動点への弱収束定理を得た．また，ヒルベルト空間の非拡大写像の概念のバナッハ空間への拡張には松下-高橋 [24,25] が導入した擬非拡大写像 (relatively nonexpansive mapping) や，茨木-高橋 [9,11] が導入した準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) の概念がある．これらバナッハ空間の非拡大型写像は，先に述べた非線形射影と密接な関係を持っている．すなわち，以下のような関係がある．

Π_C: 準距離射影	$\Rightarrow$	Π_C: 擬非拡大写像
Q_C: サニー非拡大射影	$\Rightarrow$	Q_C: 非拡大写像
R_C: サニー準非拡大射影	$\Rightarrow$	R_C: 準非拡大写像

ここでは距離射影に関する非拡大性が示されていないが，実はバナッハ空間の距離射影に関する非拡大性は他の射影のようには研究されていないのである．距離射影の非拡大性の研究も大変興味深いものであるが，筆者達はここ数年サニー準非拡大射影について着目して研究を進めており ([9–15] を参照)，本論文でもサニー準非拡大射影に着目して議論を行う．

本論文ではバナッハ空間上の有限個の準非拡大写像族に対する共通不動点問題を議論する．まず始めに，高橋-下地が研究した W-写像を用いて準非拡大写像族の共通不動点を求める点列近似法を議論する．次に，吉川-高橋が研究したブロック写像を用いて準非拡大写像族の共通不動点を求める点列近似法を議論する．最後に，これらの結果を用いて画像復元問題の解への点列近似法も議論する．

2 準備

E を実バナッハ空間とし，E^* をその共役空間とする．E が狭義凸 (strictly convex) であるとは，$\|x\| = \|y\| = 1$ となる E の元 x, y $(x \neq y)$ に対して，つねに $\|x + y\| < 2$ が成り立つことである．同様に，一様凸 (uniformly convex) であるとは，$\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ となる E の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して，つねに $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ となることである．

バナッハ空間 E の元 x に対して，E^* の部分集合

$$Jx := \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J のことを，E の双対写像 (duality mapping) と呼ぶ．

この双対写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. いま $S(E) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, $x, y \in S(E)$ に対して, 次の極限を考える.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

バナッハ空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能 (Gâteaux differentiable) であるとは, $S(E)$ の元 x, y に対して, つねに (2.1) が存在するときをいう. このとき, 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう. 任意の $y \in S(E)$ に対して, (2.1) が $x \in S(E)$ に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能 (uniformly Gâteaux differentiable) であるという. 任意の $x \in S(E)$ に対して, (2.1) が $y \in S(E)$ に関して一様に収束するとき, E のノルムが Fréchet 微分可能 (Fréchet differentiable) であるという. (2.1) が $S(E)$ の元 x, y に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Fréchet 微分可能 (uniformly Fréchet differentiable) であるという. このとき, 空間 E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるともいう.

バナッハ空間 E での双対写像 J とノルムの微分可能性に関しては次の性質が知られている ([29,30] を参照).

1. $x \in E$ に対して, Jx は空でない有界な閉凸集合である;
2. $x, y \in E$ と $x^* \in Jx$, $y^* \in Jy$ に対して, $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ である;
3. E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が 1 対 1 となることである.
   すなわち, $x \neq y \ \Rightarrow \ Jx \cap Jy = \emptyset$;
4. E が狭義凸であるための必要十分条件は,
   $x^* \in Jx$, $y^* \in Jy$, $x \neq y \Rightarrow \langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0$ である;
5. E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射となることである;
6. E が滑らかにであるための必要十分条件は, J が一価になることである.

3 準非拡大写像とサニー準非拡大射影

E を滑らかなバナッハ空間とし, J を E から E^* への双対写像とする. このとき, E の元 x, y に対して,

$$V(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する. この関数 V に関しては次のような性質が知られている ([2,17,25] を参照).

1. $x, y \in E$ に対して, $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq V(x, y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ である;
2. $x, y, z \in E$ に対して, $V(x, y) = V(x, z) + V(z, y) + 2\langle x - z, Jz - Jy \rangle$ である;
3. E が狭義凸ならば, $x, y \in E$ に対して $V(x, y) = 0$ であるための必要十分条件は $x = y$ である.

C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, 写像 $T : C \to C$ が準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(T)$ が空集合でなく, かつ任意の $x \in C$ と $y \in F(T)$ に対して,

$$V(Tx, y) \leq V(x, y)$$

がつねに成り立つことと定義する ([9,11] を参照). ただし, $F(T)$ は写像 T の不動点の集合である. C の元 p が T の 漸近的不動点 (asymptotic fixed point) であるとは, p に弱収束し, $\lim_{n \to \infty}(x_n - Tx_n) = 0$ を満たす点列 $\{x_n\} \subset C$ が存在することと定義する. このとき, T の漸近的不動点 の集合を $\hat{F}(T)$ で表す. 準非拡大写像と漸近的不動点に関しては次の補助定理が知られている.

補助定理 3.1 ([14,24]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, C から C への写像 T を非拡大写像で $F(T)$ が空集合でないとする. このとき, T は準非拡大写像かつ $F(T) = \hat{F}(T)$ となる.

E をバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき, E から D への写像 R がサニー (sunny) であるとは, 任意の $x \in E$ と $t \geq 0$ に対して

$$R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$$

が成り立つことである. 同様に, E から D への写像 R が射影 (retraction) であるとは, 任意の D の元 x に対して, $Rx = x$ が成り立つことである. これらの写像に関して次の補助定理が知られている.

補助定理 3.2 ([9,11]). E を滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. また R_D を E から D の上への射影とする. このとき, R_D がサニーかつ準非拡大写像になる必要十分条件は, 任意の $x \in E$ と $y \in D$ に対して,

$$\langle x - R_D x, JR_D x - Jy \rangle \geq 0$$

となることである. ただし, J は E から E^* への双対写像である.

E が滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を空でない集合とする. このとき, E から D の上へのサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) は一意に決まる. そこで, 滑らかで狭義凸なバナッハ空間の場合に, E から D の上へのサニー準非拡大射影を R_D で表すことにする. D を E の空でない集合とする. このとき, D が E のサニー準非拡大レトラクト (sunny generalized nonexpansive retract) であるとは, E から D の上へのサニー準非拡大射影が存在するときと定義する. サニー準非拡大射影の不動点集合はもちろん D である ([9,11] を参照).

サニー準非拡大射影とサニー準非拡大レトラクトに関しては次の性質が知られている.

定理 3.3 ([22]). E を滑らかで, 回帰的な狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき次の条件は同値になる.

1. D はサニー準非拡大レトラクトである;
2. JD は閉凸集合である.

補助定理 3.4 ([10]). E を滑らかで, 回帰的な狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でない弱閉なサニー準非拡大レトラクトとする. また R_D を E から D の上へのサニー準非拡大射影とする. このとき, $\hat{F}(R) = F(R) = D$ が成り立つ.

4 W-写像を用いた共通不動点への弱収束定理

本節では, W-写像を用いた点列近似法で準非拡大写像族の共通不動点への弱収束定理を議論する. 1997 年に高橋 [28] は有限個の非拡大写像の共通不動点を求めるために有限個の写像の凸結合からなる W-写像 (W-mapping) という写像を導入した; C をバナッハ空間 E の空でない凸集合とし, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を C から C への r 個の写像とし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を r 個の実数で $0 \leq \alpha_i \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ を満たすものとする. このとき, C から C への写像 W を

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1 T_1 + (1 - \alpha_1) I, \\ U_2 &= \alpha_2 T_2 U_1 + (1 - \alpha_2) I, \\ &\vdots \\ U_{r-1} &= \alpha_{r-1} T_{r-1} U_{r-2} + (1 - \alpha_{r-1}) I, \\ W = U_r &= \alpha_r T_r U_{r-1} + (1 - \alpha_r) I \end{aligned} \tag{4.1}$$

で定義する ([31] を参照). このような写像 W は, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W-写像と呼ばれている. 準非拡大写像族によって生成される W-写像の不動点に関して次の補助定理が得られている.

補助定理 4.1 ([10]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でない C から C への r 個の準非拡大写像とし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, $0 < \alpha_r \leq 1$ となる r 個の実数とする. また, W を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W-写像とする. このとき,

$$F(W) = \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$$

である.

W-写像を用いて有限個の準非拡大写像族の共通不動点を求める次の弱収束定理を示すことができる.

定理 4.2 ([15]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でなく, かつ $F(T_i) = \hat{F}(T_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる C から C への r 個の準非拡大写像とする. $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r\}$ を $(0, 1]$ の集合で, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_{n,i}(1-\alpha_{n,i}) > 0$ を満たすものとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,r}$ によって生成される W-写像とする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = W_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ の元 z に弱収束する.

この定理と補助定理 3.1 の直接的な結果としてヒルベルト空間の次の結果を得ることができる.

定理 4.3 ([15]). H をヒルベルト空間とし, C を H の空でない閉凸集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でない C から C への r 個の非拡大写像とする. $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r\}$ を $(0, 1]$ の集合で, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_{n,i}(1 - \alpha_{n,i}) > 0$ を満たすものとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,r}$ によって生成される W-写像とする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = W_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ の元 z に弱収束する.

また, 定理 4.2 で特に $r = 1$ とした場合, 次の Mann 型の不動点近似法の結果を得ることができる. この結果は, [10, 23, 24, 26] に関連している.

系 4.4 ([15]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. T を $F(T) = \hat{F}(T)$ となる C から C への準非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を $(0, 1]$ の点列で, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) > 0$ を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ の元 z に弱収束する.

さらに, 定理 4.2 で $r = 2$ とした場合, 次の結果も得ることができる. この結果は [7, 16, 32, 33] に関連している.

系 4.5 ([15]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. T, S を $F(T) \cap F(S)$ が空でなく, かつ $F(T) = \hat{F}(T)$ 及び $F(S) = \hat{F}(S)$ となる C から C への 2つの準非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ を $(0,1]$ の点列で, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ 及び $\liminf_{n\to\infty} \beta_n(1-\beta_n) > 0$ を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n S[\beta_n T x_n + (1-\beta_n)x_n] + (1-\alpha_n)x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(T) \cap F(S)$ の元 z に弱収束する.

5 ブロック写像を用いた共通不動点への弱収束定理

本節では, ブロック写像を用いた点列近似法で準非拡大写像族の共通不動点への弱収束定理を議論する. C をバナッハ空間 E の空でない凸集合とし, $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を C から C への r 個の写像とし, $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ と $\{\omega(i)\}_{i=1}^r$ を $[0,1]$ の部分集合とし, $\sum_{i=1}^r \omega(i) = 1$ を満たすものとする. このとき, C から C への写像 B を

$$B = \sum_{i=1}^r \omega(i)\Big(\alpha_i I + (1-\alpha_i)T_i\Big)$$

で定義する ([1,18] を参照). このような写像 B は, $T_1, T_2, \ldots, T_r$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 及び $\omega(1), \omega(2), \ldots, \omega(r)$ によって生成されるブロック写像と呼ばれる. 準非拡大写像族によって生成されたブロック写像の不動点に関しては次の補助定理が得られている.

補助定理 5.1 ([14]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. $T_1, T_2, \ldots,$ T_r を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でない C から C への r 個の準非拡大写像とする. $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ を $[0,1)$ の r 個の実数とし, $\{\omega(i)\}_{i=1}^r$ を $(0,1]$ の $\sum_{i=1}^r \omega(i) = 1$ を満たす r 個の実数とする. B を $T_1, T_2, \ldots, T_r$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 及び $\omega(1), \omega(2), \ldots, \omega(r)$ によって生成されるブロック写像とする. このとき,

$$F(B) = \bigcap_{i=1}^r F(T_i)$$

である.

ブロック写像を用いて有限個の準非拡大写像族の共通不動点を求める次の弱収束定理を示すことができる.

定理 5.2 ([14]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でなく, かつ $F(T_i) = \hat{F}(T_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる C から C への r 個の準非拡大写像とする. $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le r\}$ と $\{\omega_n(i) : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le r\}$ を $[0,1]$ の集合で, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_{n,i}(1-\alpha_{n,i}) > 0$ 及び $\liminf_{n\to\infty} \omega_n(i) > 0$ を満たし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\sum_{i=1}^r \omega_n(i) = 1$ を満たすとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, B_n を $T_1, T_2, \ldots, T_r$, $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,r}$ 及び $\omega_n(1), \omega_n(2), \ldots, \omega_n(r)$ によって生成される ブロック写像とする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = B_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ の元 z に弱収束する.

この定理と補助定理 3.1 の直接的な結果としてヒルベルト空間の次の結果を得ることができる.

定理 5.3 ([14]). H をヒルベルト空間とし, C を H の空でない閉凸集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でない C から C への r 個の非拡大写像とする. $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le r\}$ と $\{\omega_n(i) : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le r\}$ を $[0,1]$ の集合で, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_{n,i}(1-\alpha_{n,i}) > 0$ 及び

$\liminf_{n\to\infty}\omega_n(i) > 0$ を満たし，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\sum_{i=1}^{r}\omega_n(i) = 1$ を満たすとする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，B_n を $T_1, T_2, \ldots, T_r$，$\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,r}$ 及び $\omega_n(1), \omega_n(2), \ldots, \omega_n(r)$ によって生成される ブロック写像とする．このとき，$x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = B_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^{r} F(T_i)$ の元 z に弱収束する．

また，定理 5.2 で特に $r = 1$ とした場合，次の Mann 型の不動点近似法の結果である茨木-高橋 [10] の結果を得ることができる．この結果は，[23, 24, 26] にも関連している．

系 5.4 ([10,14])**.** E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．T を $F(T) = \hat{F}(T)$ となる C から C への準非拡大写像とする．$\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の点列で，$\liminf_{n\to\infty}\alpha_n(1 - \alpha_n) > 0$ を満たすとする．このとき，$x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Tx_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(T)$ の元 z に弱収束する．

6 画像復元問題

本節では，第 4 節及び第 5 節で得た結果を用いて画像復元問題を議論する．まず始めに，ヒルベルト空間の距離射影の概念のバナッハ空間への拡張であるサニー準非拡大射影を用いた画像復元問題の解への点列近似法を議論する．W-写像を用いた定理 4.2 と補助定理 3.4 の直接的な結果として，画像復元問題に関係する次の定理を得ることができる．

系 6.1 ([15])**.** E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし，$D_1, D_2, \ldots, D_r$ を $\cap_{i=1}^{r} D_i$ が空でない E の r 個の弱閉なサニー準非拡大レトラクトとする．$\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le r\}$ を $(0, 1]$ の集合で，各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して，$\liminf_{n\to\infty}\alpha_{n,i}(1 - \alpha_{n,i}) > 0$ を満たすものとする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，W_n を $R_1, R_2, \ldots, R_r$ と $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,r}$ によって生成される W-写像とする．ただし，各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して，R_i は E から D_i の上へのサニー準非拡大射影である．このとき，$x_1 = x \in E$,

$$x_{n+1} = W_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^{r} D_i$ の元 z に弱収束する．

さらに，ブロック写像を用いた定理 5.2 と補助定理 3.4 の直接的な結果として，画像復元問題に関係する次の定理を得ることができる．

系 6.2 ([14])**.** E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし，$D_1, D_2, \ldots, D_r$ を $\cap_{i=1}^{r} D_i$ が空でない E の r 個の弱閉なサニー準非拡大レトラクトとする．$\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le r\}$ と $\{\omega_n(i) : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le r\}$ を $[0, 1]$ の集合で，各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して，$\liminf_{n\to\infty}\alpha_{n,i}(1 - \alpha_{n,i}) > 0$ 及び $\liminf_{n\to\infty}\omega_n(i) > 0$ を満たし，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\sum_{i=1}^{r}\omega_n(i) = 1$ を満たすとする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，B_n を $R_1, R_2, \ldots, R_r$，$\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,r}$ 及び $\omega_n(1), \omega_n(2), \ldots, \omega_n(r)$ によって生成されるブロック写像とする．ただし，各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して，R_i は E から D_i の上へのサニー準非拡大射影である．このとき，$x_1 = x \in E$,

$$x_{n+1} = B_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^{r} D_i$ の元 z に弱収束する．

次に，ヒルベルト空間の画像復元問題を議論する．定理 4.3 の直接的な結果として次の結果を得ることができる．

系 6.3 ([15]). H をヒルベルト空間とし，$C_1, C_2, \ldots, C_r$ を $\cap_{i=1}^r C_i$ が空でない H の r 個の閉凸集合とする．$\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le r\}$ を $(0,1]$ の集合で，各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して，$\liminf_{n\to\infty} \alpha_{n,i}(1 - \alpha_{n,i}) > 0$ を満たすものとする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，W_n を $P_1, P_2, \ldots, P_r$ と $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,r}$ によって生成される W-写像とする．ただし，各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して，P_i は H から C_i の上への距離射影である．このとき，$x_1 = x \in H$,

$$x_{n+1} = W_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^r C_i$ の元 z に弱収束する．

最後に，定理 5.3 の直接的な結果として次の結果を得ることができる．

系 6.4 ([14]). H をヒルベルト空間とし，$C_1, C_2, \ldots, C_r$ を $\cap_{i=1}^r C_i$ が空でない H の r 個の閉凸集合とする．$\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le r\}$ と $\{\omega_n(i) : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le r\}$ を $[0,1]$ の集合で，各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して，$\liminf_{n\to\infty} \alpha_{n,i}(1 - \alpha_{n,i}) > 0$ 及び $\liminf_{n\to\infty} \omega_n(i) > 0$ を満たし，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\sum_{i=1}^r \omega_n(i) = 1$ を満たすとする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，B_n を $P_1, P_2, \ldots, P_r$, $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,r}$ 及び $\omega_n(1), \omega_n(2), \ldots, \omega_n(r)$ によって生成されるブロック写像とする．ただし，各 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して，P_i は H から C_i の上への距離射影である．このとき，$x_1 = x \in H$,

$$x_{n+1} = B_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^r C_i$ の元 z に弱収束する．

参考文献

[1] R. Aharoni and Y. Censor, *Block-iterative projection methods for parallel computation of solutions to convex feasibility problems*, Linear Algebra Appl. **120** (1989), 165–175.

[2] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[3] D. Butnariu and Y. Censor, *On the behavior of a block-iterative projection method for solving convex feasibility problems*, Int. J. Comput. Math. **34** (1990), 79–94.

[4] D. Butnariu and Y. Censor, *Strong convergence of almost simultaneous block-iterative projection methods in Hilbert spaces*, J. Comput. Appl. Math. **53** (1994), 33–42.

[5] N. Cohen and T. Kutscher, *On spherical convergence, convexity, and block iterative projection algorithms in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **226** (1998), 271–291.

[6] G. Crombez, *Image recovery by convex combinations of projections*, J. Math. Anal. Appl. **155** (1991), 413–419.

[7] G. Das and J. P. Debata, *Fixed points of quasinonexpansive mappings*, Indian J. Pure Appl. Math. **17** (1986), 1263–1269.

[8] S. D. Flåm and J. Zowe, *Relaxed outer projections, weighted averages and convex feasibility*, BIT **30** (1990), 289–300.

[9] 茨木貴徳・高橋渉, 「バナッハ空間における新しい射影に関する収束定理」京都大学数理解析研究所講究録 **1484** (2006), 150–160.

[10] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak convergence theorem for new nonexpansive mappings in Banach spaces and its applications*, Taiwanese J. Math. **11** (2007), 929–944.

[11] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[12] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak convergence theorems for finding common elements of finite sets in Banach spaces*, Sci. Math. Jpn. **66** (2007), 303–312.

[13] 茨木貴徳・高橋渉, 「準非拡大写像に関する弱収束定理と制約可能性問題」京都大学数理解析研究所講究録 **1585** (2008), 106–114.

[14] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Block iterative methods for a finite family of generalized nonexpansive mappings in Banach spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **29** (2008), 362–375.

[15] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak convergence theorems for a finite family of generalized nonexpansive mappings in Banach spaces and applications*, Indian J. Math. **50** (2008), 415–428.

[16] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 147–150.

[17] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[18] M. Kikkawa and W. Takahashi, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the block iterative method in Banach spaces*, Int. J. Comput. Numer. Anal. Appl. **5** (2004), 59–66.

[19] S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **2** (1993), 333–342.

[20] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence to common points of families of convex sets in Banach spaces*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka, eds.), Yokohama Publishers, 2007, 261–275.

[21] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Block iterative methods for a finite family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2007** (2007), Article ID 21972, 18 pp.

[22] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[23] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[24] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, Fixed Point Theory Appl. **2004** (2004), 37–47.

[25] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[26] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[27] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 178, Dekker, New York, 1996, 313–318.

[28] W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A **51** (1997), 277-292.

[29] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis - Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[30] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[31] W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems*, Math. Comput. Modeling **32** (2000), 1463–1471.

[32] W. Takahashi and T. Tamura, *Limit theorems of operators by convex combinations of nonexpansive retractions in Banach spaces*, J. Approx. Theory **91** (1997), 386–397.

[33] W. Takahashi and T. Tamura, *Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings*, J. Convex Anal. **5** (1998), 45–56.

[34] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127–1138.

[35] C. Zălinescu, *On uniformly convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 344–374.