数理解析研究所講究録
第 1615 巻 2008 年 153-156

自己共役作用素の間のある二項関係

岡安 隆照 (Takateru Okayasu)*
植田 靖典 (Yasunori Ueta)

問題と例

$\boldsymbol{H}$ を可分な Hilbert 空間とし, $A,\ B \in B(\boldsymbol{H})$ を自己共役とする (以下とも).
任意の Borel 集合 $\Delta \subset \boldsymbol{R}$ に対して

$$E_A(\Delta) \leq T^* E_B(\Delta) T$$

が成り立つとき, $A \ll_T B$ と表し, $A \ll_T B$ を満たす $T \in B(\boldsymbol{H})$ が存在するときに, $A \ll B$ と表す ($E_{(\ )}$ は ( ) のスペクトル測度である).

$A \geq O$ ならば, $A \ll_T B$ のとき $A \leq T^*BT$ である. 実際,

$$(A\xi, \xi) = \int \lambda d(E_A(\lambda)\xi, \xi) \leq \int \lambda d(E_B(\lambda)T\xi, T\xi) = (BT\xi, T\xi) = (T^*BT\xi, \xi).$$

しかし逆は成り立たない. 実際,

$$A = \begin{pmatrix} 1/2^3 & & & \\ & 1/3^3 & & \\ & & 1/4^3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1/3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

に対して

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1/2 & 0 & & \\ & & 1/3 & 0 & \\ & & & 1/4 & \ddots \end{pmatrix}$$

を考えれば, $A \leq T^*BT$ だが, $T^*E_B(\boldsymbol{R})T = T^*T$, $E_A(\boldsymbol{R}) = I$ であって, $T^*T \ngeq I$ である.

また $A \ll_T B$ ならば $A \leq_T B$ である, すなわち, 任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して, $E_A((-\infty, \lambda]) \geq T^*E_B((-\infty, \lambda])T$, Cf. [1]. しかし逆が成り立たないことは明らか.

さて, $B(\boldsymbol{H})$ の自己共役部分における二項関係 $\ll$ は自動的に, $B(\boldsymbol{H})$ の自己共役部分

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 47A63; Secondary 47A10, 47A30
Key words and phrases. Self-adjoint operators, spectral measures, unitary equivalence

* 山形大学名誉教授 (Prof. Emeritus, Yamagata Univ.)

のユニタリ同値類の間の二項関係を導く. この‘順序みたいな (order-like)’ 二項関係は果たして順序であろうか, Cf. [2]. この講の目的はこの問いに答えることである.

命題 1. $A \ll B$ ならば,
(1) $\sigma(A) \subset \sigma(B)$.
(2) 任意の Borel 集合 Δ に対して, $\mathrm{rank} E_A(\Delta) \leq \mathrm{rank}\, E_B(\Delta)$.

なぜなら, $E_A(\sigma(B)^c) \leq T^* E_B(\sigma(B)^c) T = O$ から $E_A(\sigma(B)^c) = O$. ゆえに $\sigma(B)^c \subset (\mathrm{supp}\, E_A)^c = \sigma(A)^c$, ゆえに $\sigma(A) \subset \sigma(B)$. ゆえに (1). また, 仮定から $E_A(\Delta)\boldsymbol{H} \subset T^* E_B(\Delta)\boldsymbol{H}$. よって, $\mathrm{rank}\, E_A(\Delta) \leq \mathrm{rank}(T^* E_A(\Delta)) \leq \mathrm{rank}\, E_B(\Delta)$. ゆえに (2).

$A \ll B$ かつ $B \ll A$ のとき, A, B のどちらかがコンパクトならば A, B は共にコンパクトで, 任意の $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) (= \sigma_{\mathrm{p}}(B))$ に対して $\mathrm{rank}\, E_A(\{\lambda\}) = \mathrm{rank}\, E_B(\{\lambda\})$, したがってまた, $\mathrm{rank}\, E_A(\{0\}) = \mathrm{rank}\, E_B(\{0\})$. よって次の命題が得られる:

命題 2. A または B がコンパクトならば, $A \ll B$ かつ $B \ll A$ のとき, A, B はユニタリ同値である.

この命題は上記の問いに対する回答が肯定的であることを示唆する.

主定理

定理 3. 次の 4 つの条件は同値である:
(1) $A \ll B$.
(2) 全射の縮小作要素 V が存在して $VB = AV$ を満たす.
(3) 等距離作用素 W が存在して $A = W^* BW$ を満たし, $WW^*\boldsymbol{H}$ は B を約す.
(4) 等距離作用素 W が存在して任意の Δ に対して $E_A(\Delta) = W^* E_B(\Delta) W$ を満たし, $WW^*\boldsymbol{H}$ は B を約す.

証明の概略を記そう. (1) $\Longrightarrow$ (2): 任意の Δ に対して $E_A(\Delta) \leq T^* E_B(\Delta) T$ であるとする. 任意に Borel 集合の有限族 $\{\Delta_k\}_{k=1}^n$ をとる. それに対して $\bigcup_{j=1}^N \Delta'_j = \bigcup_{k=1}^n \Delta_k$ を満たす互いに交わらない Borel 集合の有限族 $\{\Delta'_j\}_{j=1}^N$ をとる. ただし, 任意の Δ_k は $N_k \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ によって $\bigcup_{j \in N_k} \Delta'_j$ と書くことが出来るとする. 更に任意にベクトルの有限列 $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ をとる. このとき仮定から

$$\left\| \sum_{j=1}^N E_A(\Delta'_j) \left(\sum_{k=1}^n \chi_{N_k}(j) \xi_k \right) \right\|^2 \leq \sum_{j=1}^N \left\| E_B(\Delta'_j) T \sum_{k=1}^n \chi_{N_k}(j) \xi_k \right\|^2$$

($\chi_{(\ )}$ は ( ) の特性関数). しかし左辺は $\left\| \sum_{k=1}^n E_A(\Delta_k) \xi_k \right\|^2$ に等しい. 一方右辺は

$$\left\| \sum_{k=1}^n E_B(\Delta_k) T \xi_k \right\|^2 = \sum_{j=1}^N \left(E_B(\Delta'_j) T \left(\sum_{k=1}^n \chi_{N_k}(j) \xi_k \right), \sum_{l=1}^n \chi_{N_l}(j) \xi_l \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{n}\chi_{N_k\cap N_l}(j)(E_B(\Delta'_j)T\xi_k, T\xi_l)$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n}\left(E_B\left(\bigcup_{j\in N_k\cap N_l}\Delta'_j\right)T\xi_k\, T\xi_l\right) = \sum_{k,l=1}^{n}(E_B(\Delta_k\cap\Delta_l)T\xi_k, T\xi_l)$$
$$= \left\|\sum_{k=1}^{n}E_B(\Delta_k)T\xi_k\right\|^2$$

に等しい. よって,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}E_A(\Delta_k)\xi_k\right\| \le \left\|\sum_{k=1}^{n}E_B(\Delta_k)T\xi_k\right\|$$

が成り立つ. V_0 を $V_0(E_B(\Delta)T\xi) = E_A(\Delta)\xi,\ \xi\in \boldsymbol{H},$ によって定義し, V を $V(\xi\oplus\eta) = V_0\xi\oplus 0,\ \xi\in\boldsymbol{M}, \eta\in\boldsymbol{M}^{\perp}$ によって定義する ($\boldsymbol{M} = \overline{W^*(B)T\boldsymbol{H}}$, $W^*(\ )$ は ( ) によって生成された von Neumann 環). V が条件を満たすことが確かめられる.

(2) $\Longrightarrow$ (3): $V = U|V|$ を極分解とする. このとき $UU^* = I$ である. $V^*VB = V^*AV = BV^*V$ であるから $|V|B = B|V|$. したがって $U^*U\boldsymbol{H} = \overline{|V|\boldsymbol{H}}$ は B を約す. 任意の $\xi\in\boldsymbol{H}$ に対して $UB|V|\xi = U|V|B\xi = VB\xi = AV\xi = AU|V|\xi$. よって $\overline{|V|\boldsymbol{H}}$ 上 $UB = AU$. よって $UBU^*\xi = AUU^*U\eta = AU\eta$, $\xi = U\eta$, $\eta\in\boldsymbol{H}$. よって, $UBU^* = A$. よって $W = U^*$ が条件を満たす.

(3) $\Longrightarrow$ (4): 帰納的に $A^n = W^*B^nW$ $(n = 1, 2, \cdots)$ である.

(4) $\Longrightarrow$ (1) は自明である.

定理 3 によって次の定理が得られる:

定理 4. $A \ll B$ かつ $B \ll A$ ならば, A, B はユニタリ同値である.

証明の概略: $A \ll B$ であるから, 等距離作用素 W が存在して $A = W^*BW$ を満たし. $WW^*\boldsymbol{H}$ は B を約す. 有界な Borel 関数 ϕ に対して $\pi(\phi(B)) = \phi(A)$ とおいて得られる写像 π は $W^*(B)$ から $W^*(A)$ への * 準同型である. 一方, $B \ll A$ であるから対称的に, $W^*(A)$ から $W^*(B)$ への * 準同型 ψ も得られる. これらの写像 ϕ, ψ は共に, 各斉次部分 (homogeneous part) を同じ重複度の斉次部分に写す. ところで一般に, 極大可換環から極大可換環への * 準同型は前者のスペクトルから後者のスペクトルの中への Borel 同型によって実現されるから, 次の事実が認められれば私たちの目的は達せられることになる: X から Y の中への Borel 同型と, Y から X の中への Borel 同型が存在すれば, X から Y の上への Borel 同型が存在する. しかしこれは正しい. その証明は集合論におけるベルンシュタインの定理の証明と同様である.

二, 三の注意

T が可逆ならば定理 3 における V に対して $VB = AV$ が成り立ち, A, B はユニタリ同値になる. したがって次の命題が成り立つ:

命題 5. $\dim \boldsymbol{H} < \infty$ のとき, または $T \in B(\boldsymbol{H})$ が稠密な値域をもつとき, $A \ll_T B$ ならば A, B はユニタリ同値である.

なお, A または B が巡回的で, $A \ll B$ かつ $B \ll A$ ならば, 命題 1 によって $\sigma(A) = \sigma(B)$ である. また, A, B は共に巡回的である. 次の命題が成り立つからである:

命題 6. $A \ll B$ のとき, B が巡回的ならば A も巡回的である.

実際, A が等距離作用素 W によって $A = W^*BW$ と書かれ, W^*W が B と可換であるとし, $\overline{W^*(B)\xi} = \boldsymbol{H}$, $\eta \perp \overline{W^*(B)\xi}$ とするとき, 任意の有界な Borel 関数 ϕ に対して $(\phi(B)\xi, W\eta) = (\phi(B)W^*W\xi, W\eta) = (W^*\phi(B)WW^*\xi, \eta)) = (\phi(A)W^*\xi, \eta) = 0$. よって, $W\eta = 0$. よって, $\eta = 0$. よって $W^*\xi$ は巡回的ベクトルである.

よって次の命題が成り立つことがわかる. それはいうまでもなく定理 4 に含まれる (定理 4 の証明の一端を示すともみられる):

命題 7. A または B が巡回的で, $A \ll B$ かつ $B \ll A$ ならば, A, B はユニタリ同値である.

文献

[1] M. P. Olsen, The selfadjoint operators of a von Neumann algebra from a conditionally complete lattice, Proc. Amer. Math. Soc. **28** (1971), 537-544.

[2] T. Okayasu and Y. Ueta, A condition under which $B = A = U^*AU$ follows from $B \leq A \leq U^*BU$, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1399-1403.