数理解析研究所講究録
第 1621 巻 2009 年 104-111

非正則分布における分布の台の端点の逐次推測について

筑波大学・数理物質科学研究科　小池　健一 (Ken-ichi Koike)
School of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

1　はじめに

非正則な確率分布の典型例として，一様分布に対する逐次推定問題については，多くの研究がある．例えば，尺度母数をもつ一様分布，すなわち $(0,\theta)$ $(\theta\in\mathbb{R})$ 上の一様分布 $U(0,\theta)$ については，Graybill and Connell (1964), Cooke (1971), Govindarajulu (1997) 等がある．また，位置母数をもつ一様分布 $U(\theta-(1/2),\theta+(1/2))$ については，Wald (1950), Akahira and Takeuchi (2003) などがある．一方，一般の非正則分布に関する逐次推測問題を扱った文献は多くはない．Mukhopadhyay et al. (1983) は，power family distribution において，逐次点推定問題を考えている (Mukhopadhyay (1987), Mukhopadhyay and Cicconetti (2002) も参照).

最近，Koike (2007a,b) で，有界な台をもつ位置尺度母数分布族について，その位置母数の逐次区間推定方式および逐次点推定方式方式が得られ，その漸近有効性が示されている．これは，非正則な場合を広く扱ったものであり，特に具体的に分布の形状を特定しなくても良いという利点がある．本論文では，有界な台をもつ確率分布族について，その台の端点の逐次区間推定方式および逐次点推定方式方式について考える．このような推定方式は，切断分布族に対する推測に応用できる．例えば，網による魚の捕獲に対する網目選択性の問題 (Gulland (1983) の 4.4 節, Millar (1992), Millar and Fryer (1999) などを参照) に適用可能である．

2　逐次区間推定方式

$X_1,X_2,\dots$ を，互いに独立にいずれも (ルベーグ測度に関する) 確率密度関数 $f_\theta(x)$ $(\theta\in\mathbb{R}^1)$ をもつ確率分布に従う確率変数列とする．ただし，$f_\theta(x)$ は台 (θ_1,θ_2) をもつ，すなわち

(A0)
$$f_\theta(x)\begin{cases}>0 & (\theta_1<x<\theta_2),\\ =0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

であって，台の内部で $(\theta_1,\theta_2$ を除いて$)\theta_1,\theta_2$ の近傍で C^2 級で次を満たすとする．

(A1)
$$\lim_{x\to\theta_1+0}(x-\theta_1)^{-\gamma_1}f_\theta(x)=g_1(\theta_2-\theta_1),\qquad \lim_{x\to\theta_2-0}(\theta_2-x)^{-\gamma_2}f_\theta(x)=g_2(\theta_2-\theta_1).$$

ただし，$\gamma_i>-1$ $(i=1,2)$，$g_1(\theta_2-\theta_1)$ と $g_2(\theta_2-\theta_1)$ は，$\theta_2-\theta_1$ の狭義単調減少，連続正値関数とする．

注意. (1) 仮定 (A0) は，Akahira (1975a, b), Akahira and Takeuchi (1981, p.31; 1995, pp.81, 148), Koike (2007a, b) のものと同様.
(2) (A1) は，例えば $U(\theta_1,\theta_2)$ で満たされる．実際，このとき $\gamma_1=\gamma_2=0$ であり，$g_1(\theta_2-\theta_1)=g_2(\theta_2-\theta_1)=1/(\theta_2-\theta_1)$ となる．

$X_{(1:n)}:=\min_{1\le i\le n}X_i$, $X_{(n:n)}:=\max_{1\le i\le n}X_i$, $U:=n^{1/(\gamma_1+1)}(X_{(1:n)}-\theta_1)$, $V:=n^{1/(\gamma_2+1)}(X_{(n:n)}-\theta_2)$ とおく．このとき，(U,V) の同時密度 $f_{U,V}^{(n)}(u,v)$ は，$n\to\infty$ のとき

$$f_{U,V}^{(n)}(u,v)\to\begin{cases} g_1g_2u^{\gamma_1}(-v)^{\gamma_2}\exp\left\{-\frac{g_2}{\gamma_2+1}(-v)^{\gamma_2+1}-\frac{g_1}{\gamma_1+1}u^{\gamma_1+1}\right\} & (v<0<u),\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

となる (Koike(2007a, b))．ただし，$g_1=g_1(\theta_2-\theta_1)$, $g_2=g_2(\theta_2-\theta_1)$ とする．従って，U と $-V$ は，漸近的に互いに独立に Weibull 分布に従うことが分かる．

まず，θ_1 を信頼区間 $[X_{(1:n)}-d, X_{(1:n)}]$ で区間推定することを考える．$\theta_2-\theta_1$ が既知のとき

$$\begin{aligned} P\{X_{(1:n)}-d\le\theta_1\le X_{(1:n)}\}=&P\left\{0\le n^{1/(\gamma_1+1)}(X_{(1:n)}-\theta_1)\le n^{1/(\gamma_1+1)}d\right\}\\ \approx&\int_0^{n^{1/(\gamma_1+1)}d}f_U(u)du\\ =&1-\exp\left\{-\frac{g_1(\theta_2-\theta_1)}{\gamma_1+1}nd^{\gamma_1+1}\right\},\quad (n\in\mathbb{N})\end{aligned}$$

となる．ただし，"$\approx$" は $n^{1/(\gamma_1+1)}(X_{(1:n)}-\theta_1)$ の漸近分布による近似を表し，

$$f_U(u)=g_1(\theta_2-\theta_1)u^{\gamma_1}\exp\left\{-\frac{g_1(\theta_2-\theta_1)}{\gamma_1+1}u^{\gamma_1+1}\right\}\quad (u>0)$$

による積分を意味する．従って，$0<\alpha<1$ に対して，$n\ge n^*:=-\frac{(\gamma_1+1)\log\alpha}{g_1(\theta_2-\theta_1)d^{\gamma_1+1}}$ であれば

$$1-\exp\left\{-\frac{g_1(\theta_2-\theta_1)}{\gamma_1+1}nd^{\gamma_1+1}\right\}\ge 1-\alpha$$

となる．よって，n^* は，$\theta_2-\theta_1$ が既知のとき，漸近的に最適な標本数となる．ところが，$\theta_2-\theta_1$ は未知であるので，これをレンジ $R_n:=X_{(n:n)}-X_{(1:n)}$ で置き換えた停止則

$$\tau_1:=\inf\left\{n\ge n_0\ \middle|\ n\ge-\frac{(\gamma_1+1)\log\alpha}{g_1(R_n)d^{\gamma_1+1}}\right\}$$

を考える．ただし，$n_0(\ge 2)$ は初期標本数とする．このとき次が成り立つ．
定理 1. (A0) と (A1) の下で次が成り立つ．
(i) $\lim_{d\to 0+}P\{X_{(1:\tau_1)}-d\le\theta_1\le X_{(1:\tau_1)}\}=1-\alpha$ (漸近一致性).
(ii) $\tau_1/n^*\overset{\text{a.s.}}{\to}1$ $(d\to 0+)$.
(iii) $E(\tau_1)/n^*\to 1$ $(d\to 0+)$ (漸近有効性).

また，以下のように，二段階法を用いた θ_1 の区間推定を考えることもできる．停止則を

$$N_1:=\max\left\{m,\left[-\frac{(\gamma_1+1)\log\alpha}{g_1(R_m)d^{\gamma_1+1}}\right]^*+1\right\}$$

とおく．ただし，$[x]^*$ は x を超えない最大の整数とし，初期標本数 m は，$m = o(d^{-(\gamma_1+1)})$ $(0 < l < \gamma_1 + 1)$ を満たすものとする．このとき次が成り立つ．

定理 2. (A0) と (A1) の下で次が成り立つ．

(i) $\lim_{d \to 0+} P\{X_{(1:N_1)} - d \le \theta_1 \le X_{(1:N_1)}\} = 1 - \alpha$ （漸近一致性）．

(ii) $N_1/n^* \overset{\text{a.s.}}{\to} 1$ $(d \to 0+)$．

(iii) $E(N_1)/n^* \to 1$ $(d \to 0+)$ （漸近有効性）．

注意. 定理 1,2 から，いずれの場合にも漸近有効性が示されることが分かるが，両者の大きな違いは初期標本数にある．前者は d に依存しないように取れるが，後者はそうではない．すなわち，区間幅 d が小さいようなときには，ある程度大きな初期標本数を必要とする．

次に，θ_2 の逐次区間推定方式について考える．θ_2 を信頼区間 $[X_{(n:n)}, X_{(n:n)} + d]$ で区間推定すると，$\theta_2 - \theta_1$ が既知のとき，

$$
\begin{aligned}
P\{X_{(n:n)} \le \theta_2 \le X_{(n:n)} + d\} =& P\left\{-n^{1/(\gamma_2+1)} d \le n^{1/(\gamma_2+1)}(X_{(n:n)} - \theta_2) \le 0\right\} \\
\approx& \int_{-n^{1/(\gamma_2+1)}d}^{0} f_V(v)dv \\
=& 1 - \exp\left\{-\frac{g_2(\theta_2 - \theta_1)}{\gamma_2 + 1} n d^{\gamma_2+1}\right\} \quad (n \in \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

となる．ただし，“$\approx$” は，$n^{1/(\gamma_2+1)}(X_{(n:n)} - \theta_2)$ の漸近分布による近似を表し，

$$
f_V(v) = g_2(\theta_2 - \theta_1)(-v)^{\gamma_2} \exp\left\{-\frac{g_2(\theta_2 - \theta_1)}{\gamma_2 + 1}(-v)^{\gamma_2+1}\right\} \quad (v < 0)
$$

による積分を意味する．従って，$0 < \alpha < 1$ に対して，$n \ge n^{**} := -\frac{(\gamma_2+1)\log\alpha}{g_2(\theta_2-\theta_1)d^{\gamma_2+1}}$ であれば

$$
1 - \exp\left\{-\frac{g_2(\theta_2 - \theta_1)}{\gamma_2 + 1} n d^{\gamma_2+1}\right\} \ge 1 - \alpha
$$

となる．よって，n^{**} は，$\theta_2 - \theta_1$ が既知のとき，漸近的に最適な標本数となる．ところが，$\theta_2 - \theta_1$ は未知であるので，これをレンジ R_n で置き換えた停止則

$$
\tau_2 := \inf\left\{n \ge n_0 \;\middle|\; n \ge -\frac{(\gamma_2 + 1)\log\alpha}{g_2(R_n)d^{\gamma_2+1}}\right\}
$$

を考える．ただし，$n_0(\ge 2)$ は初期標本数とする． このとき次が成り立つ．

定理 3. (A0) と (A1) の下で次が成り立つ．

(i) $\lim_{d \to 0+} P\{X_{(\tau_2:\tau_2)} \le \theta_2 \le X_{(\tau_2:\tau_2)} + d\} = 1 - \alpha$ （漸近一致性）．

(ii) $\tau_2/n^{**} \overset{\text{a.s.}}{\to} 1$ $(d \to 0+)$．

(iii) $E(\tau_2)/n^{**} \to 1$ $(d \to 0+)$ （漸近有効性）．

例 1. $X_1, X_2, \ldots$ を，互いに独立にいずれも一様分布 $U(\theta_1, \theta_2)$ に従う確率変数列とする $(\theta_1 < \theta_2)$．このとき，$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $g_1(\theta_2 - \theta_1) = g_2(\theta_2 - \theta_1) = 1/(\theta_2 - \theta_1)$ となる．定理 1 の停止則は

$$
\tau_1 := \inf\left\{n \ge n_0 \;\middle|\; n \ge -\frac{R_n \log\alpha}{d}\right\} \approx n^* = -\{(\theta_2 - \theta_1)\log\alpha\}/d \quad (d \to 0+)
$$

となる．この停止則は，Chaturvedi et al. (2001) で与えられたものと同一となる (ただし，想定されている確率分布は $U(0,\theta)$).

例 **2.** $X_1, X_2, \ldots$ を，互いに独立にいずれも確率密度関数

$$f_0(x)=\begin{cases}\delta(x-\theta_1)^{\delta-1}(\theta_2-\theta_1)^{-\delta} & (\theta_1<x<\theta_2),\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

をもつ power family distribution に従う確率変数列とする (Mukhopadhyay et al. (1983) を参照). ただし，$\delta>0$ は既知，$\theta_1,\theta_2(\theta_1<\theta_2)$ は未知とする．このとき，$(x-\theta_1)^{-\delta+1}f_0(x)\to\delta(\theta_2-\theta_1)^{-\delta}$ $(x\to\theta_1+0)$, $(\theta_2-x)^0 f_0(x)\to\delta(\theta_2-\theta_1)^{-1}$ $(x\to\theta_2-0)$ となるので，(A0) において $\gamma_1=\delta-1, \gamma_2=0$, (A1) において $g_1=\delta(\theta_2-\theta_1)^{-\delta}$, $g_2=\delta(\theta_2-\theta_1)^{-1}$ となる．従って，定理 1 の停止則について

$$\tau_1=\inf\left\{n\ge n_0 \;\middle|\; n\ge -\frac{R_n^\delta \log\alpha}{d^\delta}\right\}\approx n^*=-\frac{(\theta_2-\theta_1)^\delta\log\alpha}{d^\delta}$$

となる．

3　逐次点推定方式

ここでは標本抽出に対する費用も考慮した上で，未知母数の点推定方式について考える．まず，θ_1 の逐次点推定方式を考慮の対象とする．ここでは，θ_1 を $X_{(1:n)}$ で点推定するものとする．$U:=n^{1/(\gamma_1+1)}(X_{(1:n)}-\theta_1)$ の漸近密度は

$$f_U(u)=g_1(\theta_2-\theta_1)u^{\gamma_1}\exp\left\{-\frac{g_1(\theta_2-\theta_1)}{\gamma_1+1}u^{\gamma_1+1}\right\}$$

より，U^2 の漸近期待値は

$$E(U^2)\approx\int_0^\infty g_1u^{\gamma_1+2}\exp\left\{-\frac{g_1}{\gamma_1+1}u^{\gamma_1+1}\right\}du=\left(\frac{\gamma_1+1}{g_1}\right)^{2/(\gamma_1+1)}\Gamma\left(\frac{\gamma_1+3}{\gamma_1+1}\right)$$

となる．ただし，$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数とする．このとき，Koike (2007b) の Lemma 2.1 と同様に，

$$E(U^2)\to C \quad (n\to\infty)$$

となることが示せる．ここでは，さらに次を仮定する．

(B1) $$E(U^2)\to h_1(\theta_2-\theta_1) \quad (n\to\infty).$$

となり，$h_1(\theta_2-\theta_1)$ は $\theta_2-\theta_1$ の正値増加連続関数となる．

注意. (B1) は，一様分布 $U(\theta_1,\theta_2)$ で満たされる．実際，$\gamma_1=\gamma_2=0$ で，

$$E(U^2)=\frac{2n^2(\theta_2-\theta_1)^2}{\{(n+1)(n+2)\}}\to 2(\theta_2-\theta_1)^2 \ (n\to\infty)$$

となる．

θ_1 を $X_{(1:n)}$ で推定したときのリスクを

$$r_n^{(1)} := E(X_{(1:n)} - \theta_1)^2 + dn,$$

とする．ただし，$d(>0)$ は観測ごとのコストとする．このとき，$U = n^{1/(\gamma_1+1)}(X_{(1:n)} - \theta_1)$ より，$r_n^{(1)} \approx h_1(\theta_2 - \theta_1)n^{-2/(\gamma_1+1)} + dn$ と近似される．これを n を変数とする関数とみなすと，$n = n^{***} := \left\{\frac{2h_1(\theta_2-\theta_1)}{(\gamma_1+1)d}\right\}^{(\gamma_1+1)/(\gamma_1+3)}$ で最小値 $r_{n^{***}}^{(1)*} := h_1(\theta_2 - \theta_1)\left\{\frac{d(\gamma_1+1)}{2h_1(\theta_2-\theta_1)}\right\}^{2/(\gamma_1+3)}\left(\frac{\gamma_1+3}{\gamma_1+1}\right)$ をとる．ところが，$\theta_2 - \theta_1$ は未知であるので，これをレンジ R_n で置き換えた停止則

$$\tau_3 := \left\{ n \geq m_d^{(1)} \;\middle|\; n \geq \left\{\frac{2h_1(R_n)}{(\gamma_1+1)d}\right\}^{(\gamma_1+1)/(\gamma_1+3)} \right\}$$

を考える．ただし，$m_d^{(1)}$ は初期標本数で $d^{-l} \leq m_d^{(1)} = o(d^{-(\gamma_1+1)/(\gamma_1+3)})$ $(0 < l < (\gamma_1+1)/(\gamma_1+3))$ を満たすとする．このとき次が成り立つ．

定理 4. (A0) と (B1) の下で次が成り立つ．

(i) $\tau_3/n^{***} \overset{\text{a.s.}}{\to} 1$ $(d \to 0+)$. (ii) $E(\tau_3)/n^{***} \to 1$ $(d \to 0+)$. (iii) $r_{\tau_3}^{(1)}/r_{n^{***}}^{(1)*} \to 1$ $(d \to 0+)$.

また，以下のように，二段階法を用いた θ_1 の点推定を考えることもできる．停止則を

$$N_2 := \max\left\{ m, \left[\left\{\frac{2h_1(R_m)}{d(\gamma_1+1)}\right\}^{(\gamma_1+1)/(\gamma_1+3)}\right]^* + 1 \right\}$$

とおく．ただし，$[x]^*$ は x を超えない最大の整数とし，初期標本数 m は $d^{-l} \leq m = o(d^{-(\gamma_1+1)/(\gamma_1+3)})$ $(0 < l < (\gamma_1+1)/(\gamma_1+3))$ を満たすものとする．このとき，次が成り立つ．

定理 5. (A0) と (B1) の下で次が成り立つ．

(i) $N_2/n^{***} \overset{\text{a.s.}}{\to} 1$, (ii) $E(N_2)/n^{***} \to 1$, (iii) $r_{N_2}^{(1)}/r_{n^{***}}^{(1)} \to 1$ $(d \to 0+)$.

次に θ_2 の逐次点推定方式について考える．(B1) の代わりに，次の (B2) を課す．

(B2) $$E(V^2) \to h_2(\theta_2 - \theta_1) \quad (n \to \infty).$$

ただし，$V = n^{1/(\gamma_2+1)}(X_{(n:n)} - \theta_2)$ で，$h_2(\theta_2 - \theta_1)$ は $\theta_2 - \theta_1$ の正値増加連続関数となる．

θ_2 を $X_{(n:n)}$ で推定したときのリスクを

$$r_n^{(2)} := E(X_{(n:n)} - \theta_2)^2 + dn,$$

とおく．ただし，$d(>0)$ は観測ごとのコストとする．このとき，$V = n^{1/(\gamma_2+1)}(X_{(n:n)} - \theta_2)$ より，$r_n^{(2)} \approx h_2(\theta_2 - \theta_1)n^{-2/(\gamma_2+1)} + dn$ と近似される．これを n を変数とする関数とみなすと，$n = n^{****} := \left\{\frac{2h_2(\theta_2-\theta_1)}{(\gamma_2+1)d}\right\}^{(\gamma_2+1)/(\gamma_2+3)}$ で最小値 $r_{n^{****}}^{(2)*} := h_2(\theta_2 - \theta_1)\left\{\frac{d(\gamma_2+1)}{2h_2(\theta_2-\theta_1)}\right\}^{2/(\gamma_2+3)}\left(\frac{\gamma_2+3}{\gamma_2+1}\right)$ をとる．ところが，$\theta_2 - \theta_1$ は未知であるので，これをレンジ R_n で置き換えた停止則

$$\tau_4 := \left\{ n \geq m_d^{(2)} \;\middle|\; n \geq \left\{\frac{2h_2(R_n)}{(\gamma_1+1)d}\right\}^{(\gamma_2+1)/(\gamma_2+3)} \right\}$$

を考える．ただし，$m_d^{(2)}$ は初期標本数で $d^{-l} \leq m_d^{(2)} = o(d^{-(\gamma_2+1)/(\gamma_2+3)})$ $(0 < l < (\gamma_2+1)/(\gamma_2+3))$ を満たすとする．このとき，次が成り立つ．

定理 6. (A0) と (B2) の下で次が成り立つ.
(i) $\tau_4/n^{****} \overset{\text{a.s.}}{\to} 1$ $(d \to 0+)$. (iii) $E(\tau_4)/n^{****} \to 1$ $(d \to 0+)$. (iii) $r^{(2)}_{\tau_4}/r^{(2)*}_{n^{****}} \to 1$ $(d \to 0+)$.

例 3. $X_1, X_2, \ldots$ を，互いに独立にいずれも一様分布 $U(\theta_1, \theta_2)$ に従う確率変数とする．$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $h_1(\theta_2 - \theta_1) = 2(\theta_2 - \theta_1)^2$ より，定理 4 の停止則について

$$\tau_3 \approx n^{***} = \{4(\theta_2 - \theta_1)^2/d\}^{1/3}, r_{\tau_3} \approx r_{n^{***}} = 2^{-1/3}\{d(\theta_2 - \theta_1)\}^{2/3}(d \to 0+).$$

が成り立つ.

例 4. $X_1, X_2, \ldots$ を，互いに独立にいずれも確率密度関数

$$f_0(x) = \begin{cases} \delta(x - \theta_1)^{\delta - 1}(\theta_2 - \theta_1)^{-\delta} & (\theta_1 < x < \theta_2), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

をもつ power family distribution に従う確率変数列とする．ただし，$\delta > 0$ は既知, $\theta_1, \theta_2 (\theta_1 < \theta_2)$ は未知とする．このとき

$$\begin{aligned} E\left\{n^{2/\delta}(X_{(1:n)} - \theta_1)^2\right\} =& (\theta_2 - \theta_1)^2 n^{(2/\delta)+1}\Gamma\left(\frac{2}{\delta} + 1\right)\Gamma(n) \bigg/ \Gamma\left(\frac{2}{\delta} + n + 1\right) \\ \to& (\theta_2 - \theta_1)^2\Gamma\left(\frac{2}{\delta} + 1\right)\exp\{-(\delta/2) - 1\} \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

となって，(B1) が満たされる．このとき，定理 4 の停止則は

$$\tau_3 = \left\{ n \geq m_d^{(1)} \;\middle|\; n \geq \left\{ \frac{2R_n^2\Gamma\left(\frac{2}{\delta} + 1\right)\exp\{-(\delta/2) - 1\}}{\delta d} \right\}^{\delta/(\delta+2)} \right\}$$

となる．ただし，$m_d^{(1)}$: $d^{-l} \leq m_d^{(1)} = o(d^{-\delta/(\delta+2)})$ $(0 < l < \delta/(\delta + 2))$ とする．よって，定理 4 より

$$\tau_3 \approx n^{***} = \left\{ \frac{2(\theta_2 - \theta_1)^2\Gamma\left(\frac{2}{\delta} + 1\right)\exp\{-(\delta/2) - 1\}}{\delta d} \right\}^{\delta/(\delta+2)} \qquad (d \to 0+)$$

となる.

同様の方法を用いて，$\theta_2 - \theta_1$ の区間推定，点推定も可能である (R_n で $\theta_2 - \theta_1$ を推測)．また，θ_2 の点推定についても，定理 5 と全く同様に二段階法を考えることが可能である.

4 数値例

定理 1 の $(\tau_1, [X_{(1:\tau_1)} - d, X_{(1:\tau_1)}])$ の被覆確率について，数値例を示す．10000 回繰り返し $U(\theta_1, \theta_2)$ $(\theta_1 < \theta_2)$ から疑似乱数を 10000 回発生させて，θ_1 が区間 $(\tau_1, [X_{(1:\tau_1)} - d, X_{(1:\tau_1)}])$ に入る割合を求める．ここでは一般性を失わずに $\theta_1 = 0$ としてよい．$\alpha = 0.05$, $d = 0.01(0.01)0.05$, $\theta_2 = 1(1)5$, $n_0 = 5$ とした被覆確率，平均標本数が下記の表 1,2 である.

表 1. $[X_{(1:T_1)} - d, X_{(1:T_1)}]$ の被覆確率

$\theta_2 \setminus d$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
1	0.9485	0.9488	0.9452	0.9470	0.9484
2	0.9486	0.9457	0.9461	0.9462	0.9475
3	0.9473	0.9515	0.9470	0.9480	0.9477
4	0.9483	0.9472	0.9441	0.9510	0.9455
5	0.9505	0.9449	0.9453	0.9422	0.9493

表 2. $[X_{(1:T_1)} - d, X_{(1:T_1)}]$ の平均標本数

$\theta_2 \setminus d$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
1	299.786	150.285	100.453	75.5243	60.58
2	598.378	299.757	200.02	150.168	120.211
3	896.152	449.261	299.342	224.829	180.331
4	1194.86	598.556	398.941	299.875	239.867
5	1493.92	747.616	499.066	374.182	299.727

参考文献

Akahira, M. (1975a). Asymptotic theory for estimation of location in non-regular cases, I: order of convergence of consistent estimators. *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE* **22**, 8–26.

Akahira, M. (1975b). Asymptotic theory for estimation of location in non-regular cases, II: bounds of asymptotic distributions of consistent estimators. *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE* **22**, 99–115.

Akahira, M. and Koike, K. (2005). Sequential interval estimation of a location parameter with the fixed width in the uniform distribution with an unknown scale parameter. *Sequential Analysis* **24**, 63–75.

Akahira, M. and Takeuchi, K. (1981). *Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators: Concepts and Higher Order Asymptotic Efficiency.* Lecture Notes in Statistics *7*, Springer, New York.

Akahira, M. and Takeuchi, K. (1995). *Non-Regular Statistical Estimation.* Lecture Notes in Statistics *107*, Springer, NewYork.

Akahira, M. and Takeuchi, K. (2003). The information inequality in sequential estimation for the uniform case. *Sequential Analysis* **22**, 223–232.

Chaturvedi, A., Surinder, K., and Sanjeev, K. (2001). Multi-stage estimation procedures for the "range" of two-parameter uniform distribution. *Metron* **59**, 179–186.

Cooke, P. J. (1971). Sequential estimation in the uniform density. *J. Amer. Stat. Assoc.*, **66**, 614–617.

Govindarajulu, Z. (1997). A note on two-stage and sequential fixed-width intervals for the parameter in the uniform density. *Statist.& Prob. Letters* **36**, 179–188. Erratum: *Statist.& Prob. Letters*, **42**, (1999): 213–215.

Graybill, F. A. and Connell, T. L. (1964). Sample size required to estimate the parameter in the uniform density within d units of the true value. *J. Amer. Stat. Assoc.*, **59**, 550–560.

Gulland, J. A. (1983). *Fish Stock Assessment. A Manual of Basic Methods.* New York, Wiley.

Koike, K. (2007a). Sequential interval estimation of a location parameter with the fixed width in the non-regular case. *Sequential Analysis*, **26**, 63–70.

Koike, K. (2007b). Sequential point estimation of location parameter in location-scale family of non-regular distributions. *Sequential Analysis*, **26**, 383–393.

Millar, R. B. (1992). Estimating the size-selectivity of fishing gear by conditioning on the total catch. *J. Amer. Stat. Assoc.*, **87**, 962–968.

Millar, R. B. and Fryer, R. J. (1999). Estimating the size-selection curves of towed gears, traps, nets and hooks. *Reviews in Fish Biology and Fisheries*, **9**, 89–116.

Mukhopadhyay, N. (1980). A consistent and asymptotically efficient two-stage procedure to construct fixed-width confidence interval for the mean. *Metrika*, **27**, 281–284.

Mukhopadhyay, N. (1987). A note on estimating the range of a uniform distribution. *South African Statist. J.*, **21**, 27–38.

Mukhopadhyay, N. and Cicconetti, G. (2002). Large second-order properties of a two-stage point estimation procedure for the range in a power family distribution. *Cal. Statist. Assoc. Bul.*, **52**, 205–208.

Mukhopadhyay, N., Ghosh, M., Hamdy, H. I., and Wackerly, D. D. (1983). Sequential and two-stage point estimation for the range in a power family distribution. *Sequential Analysis*, **2**, 259–288.

Wald, A. (1950). *Statistical Decision Function*, Wiley, New York.