

### 3次元双曲型空間における平坦曲面のエンドの漸近挙動

– Asymptotic behavior of ends of flat surfaces in hyperbolic 3-space –

東京電機大学・工学部 國分雅敏 (Masatoshi Kokubu)

Tokyo Denki University

## 1 序

3次元 Euclid 空間  $\mathbb{E}^3$  や 3次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3$  中の曲面に関する微分幾何の大域的  
研究において、その曲面のエンド (果て) がどのような形状に漸近するかを調べることは、  
多くの研究者が興味を抱くところである。

ここ数年、梅原雅顕氏・山田光太郎氏・Wayne Rossman 氏と筆者は共同で  $\mathbb{H}^3$  の Gauss  
曲率一定値 0 の曲面 (平坦曲面) について研究し ([KRUY] など)、とくに最近はそのエ  
ンドの漸近挙動を重点的に調べた ([KRUY2])。そこで得られたいくつかの結果について、  
その概要を紹介することが本稿の目的である。

大域的研究というキーワードを使ったが、S. Sasaki および Volkov-Vladimirova によ  
り、 $\mathbb{H}^3$  にはめ込まれた完備平坦曲面についてはその分類が既になされている。

**事実 1.1** ([S], [VV]).  $\mathbb{H}^3$  にはめ込まれた完備な平坦曲面は、ホロ球 (horosphere) か双  
曲円柱 (i.e. 一本の測地線からの等距離点集合) (cylinder) に限る。

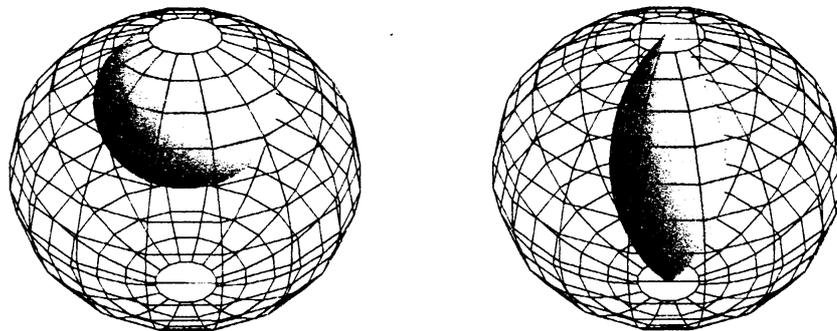


図 1 ホロ球と双曲円柱 (Poincaré ball モデル内で)

我々は、はめ込みという条件を少し弱めて、もう少し広いクラス **波面 (wave front, front)** で平坦曲面論を展開する。このクラスには大域的な例が豊富に存在し、とても興味深い。

## 2 基本事項

### 2.1 波面

まず、一般の 3 次元 Riemann 多様体  $N^3$  の波面 (front) を定義しよう。2 次元多様体  $M^2$  から  $N^3$  への滑らかな写像  $f: M^2 \rightarrow N^3$  を考える。  $T^1N^3$  にて  $N^3$  の単位接バンドル,  $f^*(T^1N^3)$  にて  $f$  による  $T^1N^3$  の引き戻しバンドルを表す。

$f^*(T^1N^3)$  に global section  $n: M^2 \rightarrow f^*(T^1N^3)$  が存在し、それから引き起こされる写像

$$L: M^2 \ni p \mapsto (f(p), n_p) \in (T_{f(p)}^1N^3 \subset T^1N^3)$$

が Legendre はめ込みであるとき、i.e.,  $L$  が  $\langle df, n \rangle = 0$  を満たすはめ込みであるとき、元の  $f$  は **波面 (wave front)**, もしくは単に **front** であるという。(  $f$  から見て)  $L$  を  $f$  の **Legendre 持ち上げ (lift)** と呼ぶ。

$T^1N^3$  上には Sasaki 計量と呼ばれる標準的な計量がある。これに関する  $L$  による引き戻し計量を  $d\sigma^2$  と書くことにして次の定義を用意しておく：

**定義 2.1.** front  $f: M^2 \rightarrow N^3$  が

- **弱完備**であるとは、 $d\sigma^2$  が完備 Riemann 計量であることを意味する。また、
- **有限型**であるとは、 $d\sigma^2$  の全曲率が有限であることを意味する。

### 2.2 $\mathbb{H}^3$ の波面

以下、3 次元 Riemann 多様体  $N^3$  が双曲型空間  $H^3$  の場合に限定して話を続ける。この節では、 $\mathbb{H}^3$  は  $L^4$  内の双曲面と見る。

$L^4$  を Minkowski 空間とし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$  でその Lorentz 内積を表わす。すなわち  $x = (x^\alpha), y = (y^\alpha) \in L^4$  に対し、 $\langle x, y \rangle_L = -x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$  である。よく知られるように、

$$\mathbb{H}^3 := \{x \in L^4; \langle x, x \rangle_L = -1, x^0 > 0\}$$

は、単連結完備で曲率  $-1$  をもつ。これを 3 次元双曲型空間と呼ぶ。

$T^1\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{H}^3 \times S_1^3 \subset L^4 \times L^4$  (ここで  $S_1^3 = \{x \in L^4; \langle x, x \rangle_L = 1\}$ ) であるから、 $N^3 = \mathbb{H}^3$  の場合は front の定義を次のように述べてよい：

**定義 2.2.**  $L: M^2 \rightarrow T^1\mathbb{H}^3$  を Legendre はめ込みとする。すなわち、 $L = (f, n): M^2 \rightarrow L^4 \times L^4$  で次の条件

- (i)  $\langle f, f \rangle_L = -1, \langle f, n \rangle_L = 0, \langle n, n \rangle_L = 1$
- (ii)  $L$  は はめ込みである
- (iii)  $L^*(\text{contact form}) = 0$ , i.e.,  $\langle df, n \rangle_L = 0$

を満たすものとする。この Legendre はめ込み  $L = (f, n)$  の  $\mathbb{H}^3$  への射影  $f (= \pi \circ L)$  を front と呼ぶ。

**注意 2.3.**  $M^2$  から  $T^1\mathbb{H}^3$  への写像  $(f, n)$  が、はめ込みであるか、すなわち条件 (ii) を満たすかどうかは  $T^1\mathbb{H}^3$  上の Sasaki 計量の  $(f, n)$  による引き戻し  $\langle df, df \rangle_L + \langle dn, dn \rangle_L$  が正定値であるなしで判定できる。

次に、 $\mathbb{H}^3$  の曲面論において重要な役割を演ずる双曲型 Gauss 写像の定義を述べておく。

front  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  に対して、 $f \pm n$  はそれぞれ lightlike vector となる。 $f \pm n$  の定める理想境界  $\partial\mathbb{H}^3$  の元を  $[f \pm n]$  と書く。 $\partial\mathbb{H}^3$  は共形構造をもつ球面  $S^2$  と同一視できるので、 $[f \pm n]: M^2 \rightarrow S^2$  と見なすことができる。これを双曲型 Gauss 写像と呼ぶ。

また、 $S^2$  に向きも決めて Riemann 球と見なし、更に立体射影で  $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  と同一視するときは  $[f \pm n]$  の代わりに  $G_{\pm}$  と書くこととする。記号  $G_{\pm}$  が紛らわしいときは、 $G_+, G_-$  をそれぞれ  $G, G_*$  と書く。

## 2.3 $\mathbb{H}^3$ の平坦波面

更に我々は、波面の中でも平坦なものについて研究したい。

**定義 2.4.** front  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  が平坦 (flat) であるとは、特異点を除いた部分では Gauss 曲率が 0 であることを指す。

**注意 2.5.**  $\mathbb{H}^3$  にはめ込まれた平坦な曲面に対し、その平行曲面もまた (正則な点においては) 平坦である。

一方, 平坦波面 (flat front) は第二基本形式 II に同調する複素構造をもつ. 以下, flat front はこの複素構造で Riemann 面と見なす.

次の二つの命題は基本的である. (証明はそれぞれ [GMM], [KRUY] を見ていただきたい.)

**命題 2.6.** flat front  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  の双曲型 Gauss 写像  $G, G_*$  は共に正則 (holomorphic) 写像である.

**命題 2.7.**  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  が弱完備, 有限型, 平坦波面ならば,  $M^2$  はコンパクト Riemann 面  $\bar{M}$  から有限個の点を除いたもの  $\bar{M} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  に双正則同値である.

我々は  $f$  を  $p_j$  の穴あき近傍に制限したものを**エンド (end)** と呼ぶ. また, 除外点  $p_j$  自身をエンドと呼ぶこともよくある.

### 3 正則な WCF エンド

エンドの型を何らかの尺度で分類できないかと考えるのは自然であろう. この節では, ひとつのエンドに着目して議論していく. そこで, はじめから flat front は  $f: D^*(= \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < \epsilon\}) \rightarrow \mathbb{H}^3$  で与えられているとし, 更にそれは弱完備かつ有限型であるとする. このような  $f$  を省略して **WCF-end** と呼ぶ.

**定義 3.1.** WCF-end  $f: D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  が**正則 (regular)** であるとは, 双曲型 Gauss 写像  $G, G_*$  が  $0 \in \bar{D}^*$  まで込めて有理型関数に拡張されることを意味する.

正則な WCF-end  $f: D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  に対し,  $G(0) = G_*(0) = \exists q \in S^2 \cong \partial\mathbb{H}^3$  が成り立つ. このときの  $\partial\mathbb{H}^3$  上の点  $q$  を  $f(0)$  と記すこととする.

**定義 3.2.** 正則な WCF-end  $0$  に対して

- その**重複度  $m$**  を

$$m := \min\{r_0(G), r_0(G_*)\}$$

で定める. ここで  $r_0(G)$  は  $G$  の  $0$  における (正則写像としての) 分岐指数である.

- 

$$\alpha := \frac{dG}{dG_*}(0), \frac{dG_*}{dG}(0) \text{ の一方 (ただし } |\alpha| \leq 1 \text{ となるように)}$$

と定義する. このとき  $\alpha \in [-1, 1) \subset \mathbb{R}$  であることが示される. この値  $\alpha$  を **Gauss 写像の比** と呼ぶ.

**定義 3.3.** 正則な WCF-end は, その Gauss 写像の比の値に応じて

- $\alpha = -1$  のとき, **cylinder 型**,
- $-1 < \alpha < 0$  のとき, **hourglass 型**,
- $\alpha = 1$  のとき, **horosphere 型**,
- $0 < \alpha < 1$  のとき, **snowman 型**

であると呼ばれる。(この定義は cylinder, horosphere, hourglass, snowman 自身の  $\alpha$  の値に起因している。)

## 4 正則な WCF エンドの漸近挙動

### 4.1 indentation 数, 主軸

$f: D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  を正則な WCF-end とする。  $\Gamma_f$  にて  $f(0) \in \partial\mathbb{H}^3$  に行き着く有向測地線 (有向双曲直線) 全体を表すこととする。すなわち,

$$\Gamma_f := \{\gamma \in \text{Geod}_0(\mathbb{H}^3) \mid \gamma(+\infty) = f(0)\}.$$

$\Gamma_f$  の 2 つの元  $\gamma, \gamma'$  に対して, アフィンパラメータのみの違いは同値とすることにより, 同値関係  $\gamma \sim \gamma'$  が入る。同値類は  $[\gamma]$  で表す。

**補題 4.1.** 任意の  $\gamma \in \Gamma_f$  に対し,  $u \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  が存在して,  $(\iota_u \circ \gamma)(+\infty) = 0$  と  $(\iota_u \circ \gamma)(-\infty) = \infty$  が成り立つ。このときの  $u$  には幾分の ambiguity があるがそれは高々  $u \mapsto \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} u$  の違いだけである。

**注意 4.2.**  $\mathbb{H}^3$  の等長変換群は  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  に同型である。  $u \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  に対応する等長変換を  $\iota_u$  と書いた。また,  $\iota_u \circ f$  の双曲型 Gauss 写像は  $u \star G_{\pm} = \frac{u_{11}G_{\pm} + u_{12}}{u_{21}G_{\pm} + u_{22}}$  となることも, 後で使う。

補題 4.1 の  $u$  は  $\gamma \in \Gamma_f$  を選ぶことによって決まるので  $u(\gamma)$  と書こう。

さて, 次に  $d(u \star G_*)/d(u \star G)$  を考える。これは  $u$  の ambiguity によらずに決まる有理型関数である。つまり  $\gamma$  で決まる。また, Gauss 写像の比  $\alpha$  は  $((dG/dG_*)(0))$  ではなく  $\alpha = (dG_*/dG)(0)$  である設定して, 一般性を失わない。

$$A_{\gamma} := \frac{d(u(\gamma) \star G_*)}{d(u(\gamma) \star G)}$$

と書こう。

**定義 4.3.**  $\gamma \in \Gamma_f$  に対し, その **indentation 数**  $l_\gamma$  を

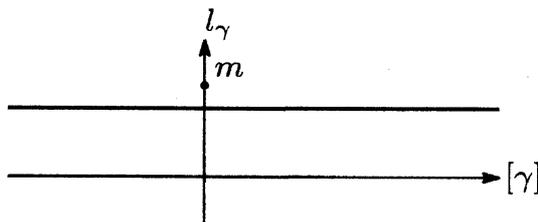
$$l_\gamma := \begin{cases} r_0(A_\gamma) & (A_\gamma \text{ 定数関数ではないとき}) \\ \infty & (A_\gamma \text{ が定数関数のとき}) \end{cases}$$

と定義する.

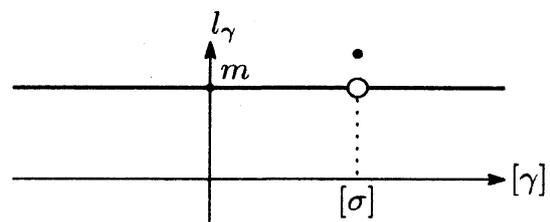
**補題 4.4** ([KRUY2], Lemma 2.8).  $f: D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  を重複度  $m$  の正則な WCF-end とするとき, 次が成り立つ.

- (1)  $f$  が horosphere 型ならば indentation 数  $l_\gamma$  は  $\gamma \in \Gamma_f$  の選び方によらない.
- (2)  $f$  が horosphere 型でないならば, 次のいずれか一方が起こる.
  - (a) indentation 数  $l_\gamma$  は  $\gamma \in \Gamma_f$  の選び方によらず,  $l_\gamma < m$ .
  - (b) ある  $[\sigma] \in \Gamma_f/\sim$  が一意に存在して

$$l_\gamma = \begin{cases} l_\sigma (> m) & \text{if } \gamma \sim \sigma \\ m & \text{if } \gamma \not\sim \sigma. \end{cases}$$



(2)-(a)



(2)-(b)

図 2

補題 4.4 により, 次の定義が意味をもつ.

**定義 4.5.**  $f: D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  を正則な WCF-end とする.

indentation 数が  $\gamma \in \Gamma_f$  に依存しないとき, (つまり, Lemma 4.4 の (1) か (2)-(a) のとき)  $f$  は **centerless** であるという.

一方, ある  $[\sigma] \in \Gamma_f/\sim$  が一意に存在して,  $\sigma$  に関する indentation 数のみが突出しているとき, (つまり, 補題 4.4 の (2)-(b) のとき)  $f$  は **centered** であるという. このときの  $\sigma$  を  $f$  の**主軸 (principal axis)** という.

centerless, centered いずれの場合に対しても,  $n := \max\{l_\gamma; \gamma \in \Gamma_f\}$  と置いて, これを  $f$  の**最大 indentation 数** と呼ぶ.

## 4.2 非 cylinder 型か cylinder 型か

まず, 記号を準備しよう:

$\gamma$  を  $\mathbb{H}^3$  の有向測地線とし,  $\gamma$  上に一点  $o \in \gamma$  を固定しておく.  $\gamma$  の弧長パラメータ  $s$  を  $\gamma(0) = o$  となるようにしておく. 各  $s \in \mathbb{R}$  に対し, horosphere  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\gamma(o, s)$  を,

- (i)  $\mathcal{H}$  は点  $\gamma(s)$  で  $\gamma$  に直交し,
- (ii)  $\mathcal{H}$  は理想境界  $\partial\mathbb{H}^3$  に  $\gamma(-\infty)$  でぶつかる

ものとして, 定める. このような  $\mathcal{H}$  は一意に決まる.  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\gamma(o, s)$  は Euclid 平面  $\mathbb{E}^2$  に等長的であるから, そのように見なすときは,  $\gamma(s)$  が  $\mathbb{E}^2$  の原点であるものと約束する.

次に  $\mathbb{H}^3$  を上半空間モデル  $\mathbb{R}_+^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+ = \{(\zeta, h); \zeta \in \mathbb{C}, h \in \mathbb{R}_+\}$  に写したいのだが, このとき,  $\gamma \subset \mathbb{H}^3$  が下向きの  $h$  軸に写り, かつ,  $o \in \gamma \subset \mathbb{H}^3$  が  $(0, 1) \in \mathbb{R}_+^3$  へ写るようにすることはいつでもできる. こうすると,  $\mathcal{H}_\gamma(o, s)$  は  $\mathbb{R}_+^3$  の中で, 方程式  $h = e^{-s}$  で実現される. すなわち,

$$\mathcal{H}_\gamma(o, s) = \{(\zeta, e^{-s}) \mid \zeta \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{R}_+^3$$

となり,  $\zeta$  がそのまま  $\mathcal{H}_\gamma(o, s)$  の座標に使える.

$\mathbb{H}^3$  から誘導される計量は  $|d\zeta|^2/e^{-2s}$  であるから, 計量まで込めて  $\mathbb{E}^2$  と同一視するためには

$$\hat{\pi}: \mathcal{H}_\gamma(o, s) \ni (\zeta, e^{-s}) \mapsto e^s \zeta \in \mathbb{C} \cong \mathbb{E}^2$$

で写してやる必要がある.

**定理 4.6** ([KRUY2], Theorem 3.1).  $f: D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  を非 cylinder 型で正則な WCF-end とし, その重複度は  $m$  とする. そして, 回転面ではないとする.

$\gamma \in \Gamma_f$  に対し, その上に唯一点  $o \in \gamma$  が定まって,

各  $s \in \mathbb{R}$  を固定するごとに,  $f(D^*) \cap \mathcal{H}_\gamma(o, s)$  は ( $\hat{\pi}$  により) 次の形の  $\mathbb{E}^2$  の曲線となる:

$$t \mapsto e^{imt} h^p (1 + R_\gamma(h, t)) \in \mathbb{C} \cong \mathbb{E}^2$$

ここで  $h = e^{-s}$ ,  $p = -(1+\alpha)/2 \in (-1, 0)$ , そして  $R_\gamma$  は複素数値関数で  $\lim_{h \rightarrow +0} R_\gamma = 0$  を満たすものである.

$R_\gamma$  のより詳細な形は次の通りである:

まず,  $l, m \in \mathbb{Z}_+$  と  $p \in (-1, 0)$  に対し, 次の記号

$$N_{p,l,m}(h, t) := \{2(p+1) \cos lt\} h^\beta \text{ where } \beta = \beta_{p,l,m} = \frac{l(1+p)}{m} (> 0)$$

$$S_p(h) := -\frac{1}{4(p+1)} h^{-2p}$$

を用意しておく.

(i) Centerless の場合  $\gamma \in \Gamma_f$  がいかなるものであったとしても

$$R_\gamma(h, t) = \begin{cases} b_1 N_{p,n,m}(h, t) + o(h^\beta) & (\text{if } n(1+p) < -2pm), \\ b_2 N_{p,n,m}(h, t) + S_p(h) + o(h^\beta) & (\text{if } n(1+p) = -2pm), \\ S_p(h) + o(h^{-2p}) & (\text{if } n(1+p) > -2pm), \end{cases} \quad (4.1)$$

ここで  $b_1, b_2 > 0$  はある正定数,  $n$  は最大 indentation 数,  $\beta = \beta_{p,n,m}$ .

(ii) Centered の場合  $\gamma \in \Gamma_f$  が principal axis  $\sigma$  ならば,  $R_\gamma$  の形は (4.1) と同じ.

一方,  $\gamma \in \Gamma_f$  が principal axis でないならば (i.e.,  $\gamma \neq \sigma$  ならば),

$$R_\gamma(h, t) = b_\gamma N_{p,m,m}(h, t) + o(h^{-2p}) \text{ if } n(1+p) \leq -2pm.$$

そうでないとき, すなわち  $n(1+p) > -2pm$  のときは

$$R_\gamma(h, t) = \begin{cases} b_\gamma N_{p,m,m}(h, t) + o(h^{1+p}) & (\text{if } -1 < p < -1/3), \\ b_\gamma N_{-1/3,m,m}(h, t) + S_{-1/3}(h) + o(h^{2/3}) & (\text{if } p = -1/3), \\ S_p(h) + o(h^{-2p}) & (\text{if } -1/3 < p < 0). \end{cases}$$

次に  $f$  が cylinder 型であるときの定理を述べるが, そのための記号を用意しておく.

正の整数  $l, m$  と正の数  $c$  に対して

$$V_{m,l,c}(t) = \left( \frac{4c^2 + m^2}{4cm} \right)^{l/m} \left[ 2 \left( c + \frac{m^2}{4c} \right) \cos lt - i \frac{ml}{c} \sin lt \right],$$

$$C_{m,l}(t) = \frac{e^{imt}}{m} V_{m,l,\frac{m}{2}}(t) = \frac{1}{m} \left( (m+l) e^{i(m-l)t} + (m-l) e^{i(m+l)t} \right).$$

とおく. ここで,  $C_{m,l}$  はサイクロイドを描くことに注意しておこう.

**定理 4.7** ([KRUY2] Theorem 3.2).  $f: D^* \rightarrow H^3$  を cylinder 型で正則な WCF-end とし, その重複度は  $m$  とする. その最大 indentation 数を  $n$  とする. そして, 回転面ではないとする.

$\gamma \in \Gamma_f$  をひとつとっておく.

(i) **Centerless の場合**  $o \in \gamma$  が一意に存在して  $\hat{\pi}(f(D^*) \cap \mathcal{H}_\gamma(o, s))$  は,  $\mathbb{C} = \mathbb{E}^2$  内の  $t$  でパラメータ付けされた曲線

$$\frac{1}{m} e^{imt} \left( \left( c - \frac{m^2}{4c} \right) + V_{m,n,c}(t) h^\beta + o(h^\beta) \right), \quad (h = e^{-s})$$

where  $c > 0, \beta = \frac{n}{m}$

と表せる.

とくに  $f$  が完備でなくなるのは  $\hat{\pi}(f(D^*) \cap \mathcal{H}_\gamma(o, s))$  が

$$C_{m,n}(t) h^\beta + o(h^\beta) \quad (h = e^{-s}) \quad \text{where } \beta = \frac{n}{m}$$

のとき, かつそのときに限る.

(ii) **Centered の場合**

(ii)-(1)  $\gamma$  が principal axis ならば 上に述べた centerless の場合 (i) に全く同じ.

(ii)-(2)  $\gamma$  が principal axis でないならば  $o \in \gamma$  が一意に存在して  $\hat{\pi}(f(D^*) \cap \mathcal{H}_\gamma(o, s))$  は,  $\mathbb{C} = \mathbb{E}^2$  内の  $t$  でパラメータ付けされた曲線

$$\frac{1}{m} e^{imt} \left( \left( c - \frac{m^2}{4c} \right) + V_{m,m,c}(t) h + o(h) \right) \quad (h = e^{-s})$$

と表せる.

とくに  $f$  が完備でなくなるのは  $\hat{\pi}(f(D^*) \cap \mathcal{H}_\gamma(o, s))$  が

$$C_{m,m}(t) h + o(h) = 2h + o(h) \quad (h = e^{-s})$$

のとき, かつそのときに限る.

### 4.3 complete か incomplete か

前節の定理からわかることを述べる:

**定理 4.8** ([GMM], [KRUY2]). (cylinder 型, hourglass 型, horosphere 型, snowman 型) 完備, 正則 WCF-end は, それぞれ (hyperbolic cylinder, hourglass, horosphere, snowman) そのものの有限被覆に漸近する. 実際,  $\pi \circ f: D^* \rightarrow \mathbb{R}_+^3$  は曲面

$$(c e^{imt} h^{1+p} + o(h^{1+p}), h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+ \cong \mathbb{H}^3 \text{ where } p = -(1 + \alpha)/2 \in (-1, 0]$$

に合同となる. ここで,  $m$  はエンドの重複度,  $\alpha$  は Gauss 写像の比である.

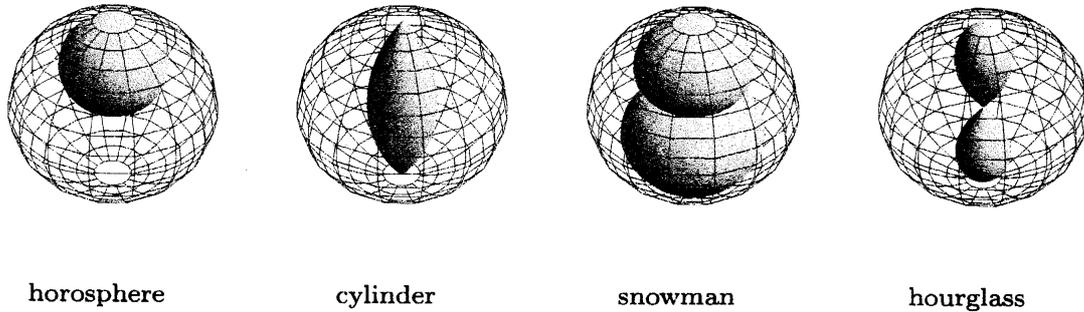


図 3

定理中の定数  $p$  を **ピッチ (pitch)** と呼ぶ.

**定理 4.9** ([KRUY2], Theorem B). 完備ではない正則 WCF-end は次の波面  $f_{m,n}$  (もしくはそれに合同な波面) に漸近する.

$$f_{m,n}: [0, 2\pi) \times (0, \epsilon) \ni (t, h) \mapsto (h^{1+\frac{n}{m}}C_{m,n}(t), h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{H}^3$$

$$\text{where } C_{m,n}(t) = \frac{1}{m} \left( (m+n)e^{i(m-n)t} + (m-n)e^{i(m+n)t} \right)$$

ここで,  $m$  はエンドの重複度,  $2n$  はエンドに集積する cuspidal edge の本数である.

完備ではない正則 WCF-end  $f: D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  が定理 4.9 の状況にあるとき,  $f$  を  $C_{m,n}$  型と呼ぼう. そして, 定数  $n/m$  もまた **ピッチ (pitch)** と呼ぶ.

(内もしくは外) サイクロイド  $C_{m,n}$  はそれ自身は閉曲線だが,  $2n$  個の  $(3/2)$ -cusp をもち, 一周する間に unit normal は  $\pm m$  回転する.

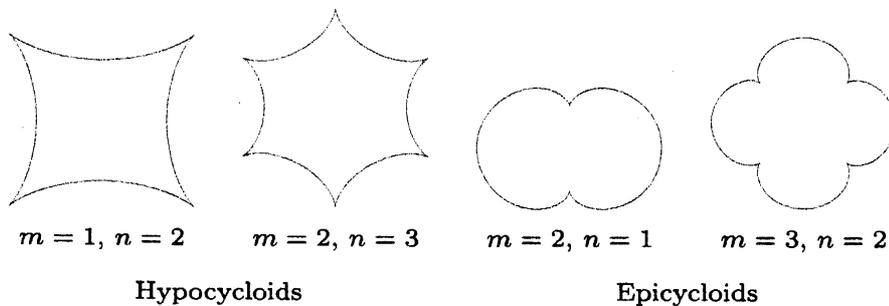


図 4

**注意 4.10.** (1) 完備な正則 WCF-end は ( $\epsilon$  を十分小さくとれば) 特異点を持たない. それに対し, 非完備な正則 WCF-end は決して特異点から逃れることはできない. つまり, 特異点集合がエンド 0 に集積するのである.

(2) 定理 4.9 中の front  $f_{m,n}$  自体は flat ではなく *asymptotically flat* である.

定理 4.8 と定理 4.9 によれば, 正則な WCF-end は, 完備であるなしにせよ  $(t, h) \mapsto (c(t)h^{1+p}, h)$  という形の波面に漸近する. このときの実数  $p$  をピッチと呼ぶ. ピッチはエンドの増大度を記述していると言える. 実際,  $\gamma = \gamma(s)$  を軸とし,  $d = d(s)$  をエンドの径とすると

$$d(s) \sim \begin{cases} d(0) \exp\left(-\frac{p}{p+1}s\right) & \text{if } -1 < p < 0 \\ d(0) & \text{if } p = 0 \\ d(0) \exp(-ps) & \text{if } p > 0 \end{cases}$$

また, ピッチは次の意味でエンドの型について支配的であると言えよう.

**系 4.11.** 正則 WCF-end のピッチ  $p$  は  $(-1, 0] \cup \mathbb{Q}_+ \setminus \{1\}$  に値をとる. (実際, 任意の値  $p \in (-1, 0] \cup \mathbb{Q}_+ \setminus \{1\}$  に対し,  $p$  がピッチであるような正則 WCF-end が存在する.)

更に, 正則な WCF-end はピッチのみで (Gauss 写像を知らなくとも) その型が判定できる:

- snowman 型  $\iff -1 < p < -1/2$ ,
- horosphere 型  $\iff p = -1/2$ ,
- hourglass 型  $\iff -1/2 < p < 0$ ,
- 完備かつ cylinder 型  $\iff p = 0$ ,
- epicycloid  $C_{m,n}$  型  $\iff p = n/m \in (0, 1)$ ,
- hypocycloid  $C_{m,n}$  型  $\iff p = n/m \in (1, \infty)$ .

#### 4.4 フラックス

この節では,  $L^4$  を  $\text{Herm}(2) = \{2 \times 2 \text{ Hermitian matrices}\}$  と同一視する:

$$L^4 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \text{Herm}(2)$$

この同一視のもとで  $\mathbb{H}^3$  は次のように見なせる:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^3 &= \{X \in \text{Herm}(2); \det X = 1, \text{tr} X > 0\} \\ &= \{aa^*; a \in \text{SL}(2, \mathbb{C})\} = \text{SL}(2, \mathbb{C})/\text{SU}(2). \end{aligned}$$

$f: D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  を flat front のエンドとする.  $\mathbb{H}^3 \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$  と見て,

$$\Phi_f := \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma} (\partial f) f^{-1} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

と定める. ここで,  $\gamma$  は正の向きに原点の周りを一周する loop である. この  $\Phi_f$  を **フラックス行列 (flux matrix)** または単に **flux** と呼ぶ.

$\Phi_f$  の定義式の積分の中身  $(\partial f) f^{-1}$  は

$$(\partial f) f^{-1} = \frac{1}{(G - G_*)^2} \begin{pmatrix} -G_* dG - G dG_* & G_*^2 dG + G^2 dG_* \\ -dG - dG_* & G_* dG + G dG_* \end{pmatrix}$$

である. ([KRUY2] 参照.)

次の大域的な定理が成り立つ.

**定理 4.12** (バランス公式).  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  を弱完備, 有限型 flat front とする. このとき, 各エンドでの flux に対し, それらの総和をとると必ず 0 (行列) となる.

再び, ひとつのエンドに着目した話題に戻る.

$f: D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  を正則 WCF-end とし, その重複度を  $m$  とする. このとき, flux matrix  $\Phi_f$  の固有値は

$$\pm \frac{2m\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

と求まる. (ここで  $\alpha$  は Gauss 写像の比.) したがって,

- (i) horosphere 型ならば 0 固有値のみをもつ.
- (ii) horosphere 型ではないならば, 相異なる固有値のみをもつので対角化可能である.

以下,  $f$  は horosphere 型ではないと仮定する. このとき固有値が異なるのだから, それぞれの固有ベクトル  $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$  は一次独立である. そして, そのうちの一方は  $\mathbb{C}^2/\sim \cong \mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \partial\mathbb{H}^3$  と見て, エンドの方向を向いている. つまり, (そちらの固有ベクトルを  $v_1$  とすれば)  $[v_1] = f(0) = G(0) = G_*(0)$  である. もう一方の  $[v_2]$  は  $\partial\mathbb{H}^3$  の別の点を定める. したがって, これらを “端点” とする hyperbolic line が定まる. これを  $\overline{v_1, v_2}$  と書いて,  $f$  の **flux axis** と呼ぶこととする.

**定理 4.13** ([KRUY2]). centered, regular WCF-end の principal axis は flux axis に一致する.

## 5 例

**例 5.1** ( $n$ -noid).  $n \geq 3$  なる整数  $n$  に対し, 二つの有理型関数  $G = z, G_* = 1/z^{n-1}$  を考えると, これらを Gauss 写像にもつような弱完備, 有限型の flat front

$$f: (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{z; z^n = 1\} \rightarrow \mathbb{H}^3$$

が定まる. 各エンド  $e \in \{z; z^n = 1\}$  に対し, Gauss 写像の比はすべて同じ値  $-1/(n-1)$  であることが分かる. したがって, エンドは皆 hourglass 型である.

**例 5.2** ( $(2+n)$ -noid).  $n \geq 1$  なる整数  $n$  に対し, 二つの有理型関数  $G = z, G_* = z^{n+1}$  を考えると, これらを Gauss 写像にもつような弱完備, 有限型の flat front

$$f: (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{0, \infty, z^n = 1\} \rightarrow \mathbb{H}^3$$

が定まる. エンド  $0, \infty$  に対しては  $\alpha = 0$  すなわち horosphere 型である. 他のエンド  $e \in \{z; z^n = 1\}$  に対しては  $\alpha = 1/(n+1)$  と求まるので, snowman 型である.

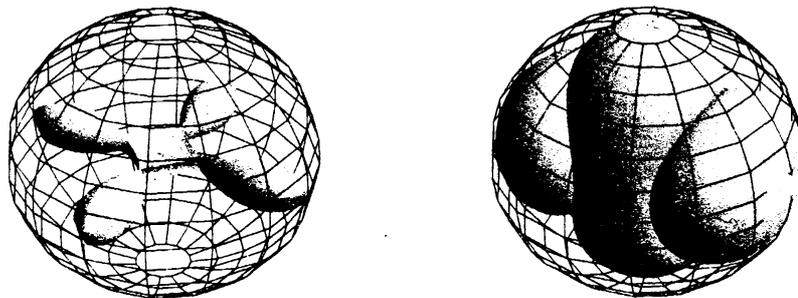


図5 4-noid と (2+2)-noid (Poincaré ball モデル内で)

flat front に対し, そのコースティック (caustic) は再び flat (p-)front となる. caustic のエンドは, 元の flat front のエンドと臍点から生じる. (詳しくは [KRUY] を参照していただきたい.)

例 5.3 ( $n$ -noid のコースティック). 例 5.1 の flat front の caustic は,  $\{z^n = 1\} \cup \{0, \infty\}$  にエンドをもつ. それらは非完備な正則 WCF-end であり, そのピッチ  $p$  は次である:

$$p = \begin{cases} 2 & \text{if } z \in \{z^n = 1\} \\ n/(n-2) & \text{if } z = 0 \text{ or } \infty. \end{cases}$$

例 5.4 ( $(2+n)$ -noid のコースティック). 例 5.2 の flat front に対する caustic は,  $\{0, \infty, z^n = 1\}$  にエンドをもつ.  $z = 0, \infty$  は非完備な正則 WCF-end であり, そのピッチは  $p = n/(n+2) (< 1)$  である.

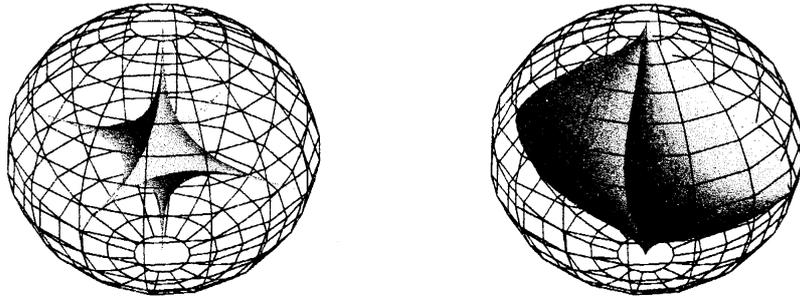


図 6 4-noid と  $(2+2)$ -noid の caustic (Poincaré ball モデル内で)

## 参考文献

- [GMM] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, *Flat surfaces in hyperbolic 3-space*, Math. Ann., **316** (2000), 419–435.
- [KRUY] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics*, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), no. 1, 265–299.
- [KRUY2] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Asymptotic behavior of flat surfaces in hyperbolic 3-space*, preprint
- [S] S. Sasaki, *On complete flat surfaces in hyperbolic 3-space*, Kōdai Math. Sem. Rep. **25** (1973), 449–457.
- [VV] Y. A. Volkov and S. M. Vladimirova, *Isometric immersions of the Euclidean plane in Lobačevskiĭ space* (Russian), Mat. Zametki **10** (1971), 327–332.