

## p-Hyponormal 作用素の構造定理について

長 宗雄 Muneo Chō 古谷 正 Tadaki Huruya	神奈川大学・工 Kanagawa University 新潟大学・教育 Niigata University
--	---

1. 初めに.  $T = U|T|$  を Hilbert 空間上の (有界) 作用素で,

$$|T| - U|T|U^* \geq 0$$

が成立するとき,  $T$  を semi-hyponormal と呼ぶ. このとき,

$$\|T\|I \geq U^{*n}|T|U^n \geq \dots \geq U^*|T|U \geq |T| \geq U|T|U^* \geq \dots \geq U^n|T|U^{*n} \geq 0$$

より

$$S_U^\pm(|T|) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \pm\infty} U^{*n}|T|U^n$$

が存在し, これらの作用素  $S_U^\pm(|T|)$  は  $U$  に関する  $|T|$  の polar symbol と呼ぶ. ここでは,  $|T|_+ = S_U^+(|T|)$ ,  $|T|_- = S_U^-(|T|)$  で略記す. また,  $T_+ = S_U^+(T)$ ,  $T_- = S_U^-(T)$  と置くと,  $T_+ = U|T|_+$ ,  $T_- = U|T|_-$  である.  $T = U|T|$  を Hilbert 空間上の作用素で,  $p > 0$  であり,

$$|T|^{2p} - (U|T|U^*)^{2p} \geq 0$$

が成立するとき,  $T$  を  $p$ -hyponormal と呼ぶ. 1-hyponormal 作用素を hyponormal, 1/2-hyponormal 作用素を semi-hyponormal と呼ばれる.  $p > q > 0$  のとき,  $p$ -hyponormal 作用素は  $q$ -hyponormal である. ここでは,  $1/2 \geq p > 0$  の  $p$ -hyponormal 作用素を扱う.

$T$  が  $p$ -hyponormal で unitary 作用素  $U$  を使って  $T = U|T|$  と表されるとき,  $T \in p\text{-HU}$ , 特に semi-hyponormal の場合は,  $T \in \text{SHU}$  で表す.

2. 構造定理.  $p$ -hyponormal 作用素の構造定理を述べるための準備からはじめる.  $\mathbb{T} = \{e^{i\theta} | 0 \leq \theta < 2\pi\}$  とし,  $\mathcal{F}$  を  $\mathbb{T}$  の Borel 集合全体, Lebesgue 測度  $m$ , すなわち,  $dm(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}d(e^{i\theta})$  とし,  $\nu$  はその特異測度で  $\mu = m + \nu$  の形の測度とし,  $\Omega = (\mathbb{T}, \mathcal{F}, \mu)$  を測度空間とする. このとき,  $\mu$  に関して可分な Hilbert 空間  $\mathcal{D}$  に値を持つ強可測な関数で  $\int_{\mathbb{T}} \|f(e^{i\theta})\|^2 d\mu < \infty$  を満たす関数  $f$  全体に内積  $(f, g) = \int_{\mathbb{T}} (f(e^{i\theta}), g(e^{i\theta}))_{\mathcal{D}} d\mu$  を入れた Hilbert 空間を  $L^2(\Omega, \mathcal{D})$  で表す. 特に,  $\mu$  が Lebesgue 測度  $m$  のとき,  $L^2(\Omega, \mathcal{D})$  を  $L^2(\mathcal{D})$  と略記する. projection を値にとる可測関数  $R(\cdot)$  に対して,  $\{f \in L^2(\Omega, \mathcal{D}) | R(e^{i\theta})f(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})\}$  を  $L^2(\Omega, \mathcal{D}, R(\cdot))$  で表す.

ここで,  $\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$  は, 作用素を値とする強可測な関数で, 共に  $\alpha(e^{i\theta}) \geq 0, \beta(e^{i\theta}) \geq 0$  で  $\sup\{\|\alpha(e^{i\theta})\|\}, \sup\{\|\beta(e^{i\theta})\|\} < \infty$  であり,  $R(e^{i\theta})$  は projection で,

$$R(e^{i\theta})\alpha(e^{i\theta}) = \alpha(e^{i\theta})R(e^{i\theta}) = \alpha(e^{i\theta}), \quad R(e^{i\theta})\beta(e^{i\theta}) = \beta(e^{i\theta})R(e^{i\theta}) = \beta(e^{i\theta})$$

とする.  $\mathcal{P}$  は  $L^2(\Omega, \mathcal{D}, R(\cdot))$  から, Hardy 空間  $H^2(\mathcal{D}, R(\cdot))$  への projection, すなわち,

$$(\mathcal{P}(f))(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z)(z - re^{i\theta})^{-1} dz$$

である. ここで,

$$(\alpha f)(e^{i\theta}) = \alpha(e^{i\theta})f(e^{i\theta}), \quad (\beta f)(e^{i\theta}) = \beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta}),$$

$$(\hat{U}f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta}f(e^{i\theta})$$

とおく. このとき,

$$\hat{T} = \hat{U}(\alpha\mathcal{P}\alpha + \beta)$$

とすると,  $\hat{U}$  は unitary で  $\alpha\mathcal{P}\alpha + \beta \geq 0$  であるので  $|\hat{T}| = \alpha\mathcal{P}\alpha + \beta$  と置けば,  $\hat{T} = \hat{U}|\hat{T}|$  は  $\hat{T}$  の polar 分解である. そして

$$(|\hat{T}|f, f) - (\hat{U}|\hat{T}|\hat{U}^*f, f) = (\mathcal{P}\alpha f, \alpha f) - (\hat{U}\mathcal{P}\hat{U}^*\alpha f, \alpha f) \geq 0$$

すなわち,  $\hat{T}$  は semi-hyponormal である. ここで  $R(\cdot)$  は可分な Hilbert 空間の unitary 作用素の関係から必要なものである.

この逆も成立することを主張するのが, 次の構造定理である.

**定理 A** ([12, Chapter 3, Theorem 3.1]).  $T$  は可分な Hilbert 空間上の作用素で,  $T = U|T| \in \text{SHU}$ , すなわち,  $U$  は unitary で  $T$  は semi-hyponormal 作用素とする. このとき,  $L^2(\Omega, \mathcal{D}, R(\cdot)), \alpha(\cdot), \beta(\cdot)$  が存在し,  $\mathcal{P}$  が定義され

$$(\hat{T}f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta} \left( \alpha(e^{i\theta})[\mathcal{P}(\alpha f)](e^{i\theta}) + \beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta}) \right), \quad (f \in L^2(\Omega, \mathcal{D}, R(\cdot)))$$

$$(\hat{U}f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta}f(e^{i\theta})$$

によって定義された  $\hat{T}$  に  $T, U$  は  $\hat{U}$  に unitary 同値である.

$T$  が  $p$ -hyponormal のとき,

$$\tilde{T} = U|T|^{2p}$$

は semi-hyponormal となるので定理 A より,  $p$ -hyponormal の次の構造定理が得られる.

**定理 B** ([3, Theorem 1]).  $T$  は可分な Hilbert 空間上の作用素で  $T = U|T| \in p$ -HU とする. 定理 A と同様な記号を使って,  $L^2(\Omega, \mathcal{D}, R(\cdot)), \alpha(\cdot), \beta(\cdot)$  が存在し,  $\mathcal{P}$  が定義され, さらに

$$(\hat{T}f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta}(Af)(e^{i\theta}) \quad \text{かつ} \quad (\hat{U}f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta}f(e^{i\theta})$$

によって定義された  $\hat{T}$  と  $\hat{U}$  は, それぞれ  $T$  と  $U$  に unitary 同値である. ただし,

$$(A^{2p}f)(e^{i\theta}) = \alpha(e^{i\theta})[\mathcal{P}(\alpha f)](e^{i\theta}) + \beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta})$$

である.

この  $\hat{T}$  を  $p$ -hyponormal 作用素  $T$  の singular integral モデルと呼ぶ.

**3. characteristic 関数の性質.** この節では,  $T = U|T| \in p$ -HU で, 記号  $\alpha(e^{i\theta}) \geq 0, \beta(e^{i\theta}) \geq 0$ , Hardy 空間  $H^2(\mathcal{D}, R(\cdot))$  は, 定理 A, B の  $T$  の singular integral モデルの作用素からのもとする. ただし, 以下では  $R(\cdot)$  は直接現われないので,  $H^2(\mathcal{D}) = H^2(\mathcal{D}, R(\cdot))$  で略記する. 作用素  $S$  に対して,  $\rho(S), \sigma(S), \sigma_a(S)$  および  $\sigma_p(S)$  は the resolvent 集合, スペクトル, 近似点スペクトル および 点スペクトルを表す. スペクトルについては次の結果が基礎となる.

**定理 C** ([13, Chapter 2, Theorem 1.5]).  $p$ -hyponormal 作用素  $T$  に対して,

$$\sigma(U|T|_{\pm}^{2p}) \subset \sigma(U|T|^{2p}) \quad \text{かつ} \quad \sigma_a(U|T|_{\pm}^{2p}) \subset \sigma_a(U|T|^{2p})$$

が成立する.  $T = U|T| \in p$ -HU なら,

$$\sigma(U|T|_{\pm}) \subset \sigma(U|T|) \quad \text{かつ} \quad \sigma_a(U|T|_{\pm}) \subset \sigma_a(U|T|)$$

である. また, singular integral モデルを使って,

$$(|T|_+^{2p}f)(e^{i\theta}) = (\alpha(e^{i\theta})^2 + \beta(e^{i\theta}))f(e^{i\theta}) \quad \text{and} \quad (|T|_-^{2p}f)(e^{i\theta}) = \beta(e^{i\theta})f(e^{i\theta}).$$

その結果,

$$\alpha^2 = |T|_+^{2p} - |T|_-^{2p}$$

である. そして,  $T$  の characteristic 関数  $W_\ell(e^{i\theta})$  を定義する.

**定義 1.**  $\ell = |\ell|e^{i\theta} \in \rho(U|T|_-^{2p})$  に対して,  $W_\ell(e^{i\theta})$  を次のように定義する:

$$W_\ell(e^{i\theta}) = I + \alpha(e^{i\theta})(\beta(e^{i\theta}) - \ell e^{-i\theta})^{-1}\alpha(e^{i\theta}).$$

作用素  $W_\ell(e^{i\theta})$  は  $T$  の characteristic 関数と呼ばれる. もし  $\ell \in \rho(U|T|^{2p})$  であるなら,  $\ell e^{-i\theta} \in \rho(\beta(e^{i\theta}))$ . また, Hardy 空間  $H^2(\mathcal{D})$  の作用素  $\widetilde{W}_\ell$  を次のように定義する:

$$(\widetilde{W}_\ell f)(\cdot) = \mathcal{P}(W_\ell(\cdot)f(\cdot)).$$

$\widetilde{W}_\ell$  を  $W_\ell$  の Toeplitz 作用素と呼ぶ.  $U|T|^{2p} \in \text{SHU}$  であるので, 次の結果が成立する.

**定理 1.**  $T = U|T| \in p\text{-HU}$ ,  $\ell \in \rho(U|T|^{2p})$  とする. このとき,

$$\ell \in \sigma_p(U|T|^{2p}) \iff 0 \in \sigma_p(\widetilde{W}_\ell) \quad \text{かつ} \quad \bar{\ell} \in \sigma_p((U|T|^{2p})^*) \iff 0 \in \sigma_p((\widetilde{W}_\ell)^*).$$

写像  $L_\ell : h \rightarrow (\ell e^{-i\theta} - \beta)^{-1} \alpha h$  は  $\ker(\widetilde{W}_\ell)$  から  $\ker(U|T|^{2p} - \ell)$  への 1:1 写像で, 逆写像は  $f \rightarrow \mathcal{P}(\alpha f)$ .

写像  $*L_\ell : h \rightarrow (\bar{\ell} e^{i\theta} - \beta)^{-1} \alpha h$  は  $\ker((\widetilde{W}_\ell)^*)$  から  $\ker((U|T|^{2p})^* - \bar{\ell})$  への 1:1 写像で, 逆写像は  $f \rightarrow (\mathcal{P}\alpha U^*)(f)$ .

$\ell \in \sigma_p(U|T|^{2p})$  のとき,  $\ell$  の重複度は  $\widetilde{W}_\ell$  の固有値 0 の重複度に等しい.

また,  $\bar{\ell} \in \sigma_p((U|T|^{2p})^*)$  のとき,  $\bar{\ell}$  の重複度は  $(\widetilde{W}_\ell)^*$  の固有値 0 の重複度に等しい.

Berberian の方法によって,  $\mathcal{R} \supset \mathcal{H}$  を作り, 自然な写像  $B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{R})$  を  $\pi$  で書く.  $\mathcal{H}$  上の作用素  $S$  に対して,  $\sigma_a(S) = \sigma_p(\pi(S))$  が成立する.  $\ker(\pi(T - \ell))$  の次元を  $\ell$  の近似重複度と呼ぶ. そして, 次の結果を得る.

**定理 2.**  $T = U|T| \in p\text{-HU}$  で,  $\ell \in \rho(U|T|^{2p})$  とする. このとき,

$$\ell \in \sigma_a(U|T|^{2p}) \iff 0 \in \sigma_a(\widetilde{W}_\ell) \quad \text{かつ} \quad \bar{\ell} \in \sigma_a((U|T|^{2p})^*) \iff 0 \in \sigma_a((\widetilde{W}_\ell)^*).$$

写像  $\pi(L_\ell)$  は  $\ker(\pi(\widetilde{W}_\ell))$  から  $\ker(\pi(U|T|^{2p} - \ell))$  への有界で 1:1 であり, 逆写像も有界である. 写像  $\pi(M_\ell)$  は  $\ker(\pi((\widetilde{W}_\ell)^*))$  から  $\ker(\pi((U|T|^{2p})^* - \bar{\ell}))$  への有界で 1:1 であり, 逆写像も有界である.  $\ell \in \sigma_a(U|T|^{2p})$  のとき,  $\ell$  の近似重複度は,  $\widetilde{W}_\ell$  の 0 の近似重複度に等しい.

$\bar{\ell} \in \sigma_a((U|T|^{2p})^*)$  のとき,  $\bar{\ell}$  の近似重複度は,  $(\widetilde{W}_\ell)^*$  の 0 の近似重複度に等しい. 定理 3, 4 のために, 次の結果がキーとなる.

**定理 D ([2, Theorem 4]).**  $T = U|T|$  を  $p$ -hyponormal とする. もし  $(T - re^{i\theta})f_n \rightarrow 0$  のとき,  $(|T| - r)f_n \rightarrow 0$  かつ  $(U - e^{i\theta})f_n \rightarrow 0$  が成立する.

**定理 3.**  $T = U|T| \in p$ -HU とし,  $\ell = |\ell|e^{i\omega}$  とする.

(1)  $\ell \in \rho(U|T|^{2p})$  とし,  $\{h_n\}$  は  $H^2(\mathcal{D})$  の単位ベクトルから成り立ち,  $\widetilde{W}_\ell h_n \rightarrow 0$  とする. このとき,  $|\ell|^{\frac{1}{2p}}e^{i\omega} \in \sigma_a(T)$  かつ  $\|(T - |\ell|^{\frac{1}{2p}}e^{i\omega})f_n\| \rightarrow 0$  となる. ここで, 十分大きな  $n$  に対して,  $f_n = \frac{L_\ell h_n}{\|L_\ell h_n\|}$  とする.

(2) もし  $\ell \in \sigma_a(T)$ ,  $\ell_p \in \rho(U|T|^{2p})$  で  $\{f_n\}$  は  $H^2(\mathcal{D})$  の単位ベクトルの列で  $\|(T - \ell)f_n\| \rightarrow 0$  が成り立つとき,  $\widetilde{W}_{\ell_p} h_n \rightarrow 0$  かつ  $\|f_n - \frac{L_{\ell_p} h_n}{\|L_{\ell_p} h_n\|}\| \rightarrow 0$  を満たす  $H^2(\mathcal{D})$  の単位ベクトルの列が存在する. ここで,  $\ell_p = |\ell|^{2p}e^{i\omega}$ .

**定理 4.**  $T = U|T| \in p$ -HU とし,  $\ell = |\ell|e^{i\omega}$  で表し,  $\ell_p = |\ell|^{2p}e^{i\omega} \in \rho(U|T|^{2p})$  とする. このとき,

$$\ell \in \sigma(T) \iff 0 \in \sigma(\widetilde{W}_{\ell_p}) \quad \text{かつ} \quad \bar{\ell} \in \sigma(T^*) \iff 0 \in \sigma((\widetilde{W}_{\ell_p})^*).$$

**4. 作用素の行列式と積分公式.** 作用素の行列式と積分公式のために, 次の定理を準備する.

**定理 E** ([13, Chapter 3, Theorem 2.5]).  $T \in$ -SHU とする. このとき, 2変数の  $L(\mathcal{D})$  に値を取る mosaic と呼ばれる次の性質を持つ可測関数  $B_T(e^{i\theta}, \rho)$  が存在する.

$$(1) 0 \leq B_T(e^{i\theta}, \rho) \leq I,$$

$$(2) I + \alpha(e^{i\theta})(\beta(e^{i\theta}) - \ell)^{-1}\alpha(e^{i\theta}) = \exp\left(\int_0^\infty \frac{B_T(e^{i\theta}, \rho)}{\rho - \ell} d\rho\right),$$

$$(3) \int_0^\infty \psi(\rho)B_T(e^{i\theta}, \rho)d\rho = \alpha(e^{i\theta}) \int_0^1 \psi(\beta(e^{i\theta}) + k\alpha(e^{i\theta})^2)dk \cdot \alpha(e^{i\theta})$$

ここで  $\psi$  は有界な任意の Baire 関数である.

この mosaic を用いて Pincus principal 関数を次のように定義する.

**定義 2.**  $T = U|T| \in p$ -HU に対して,  $T_p = U|T|^{2p}$  と置く.  $T_p \in$  SHU なので, Pincus principal 関数  $g_T(\cdot, \cdot)$  を

$$g_T(e^{i\theta}, r) = \text{Tr}(B_{T_p}(e^{i\theta}, r^{2p})),$$

によって定義する. ただし,  $\text{Tr}(\cdot)$  は  $L(\mathcal{D})$  のトレースを表す.

$\text{Tr}(|T|) < \infty$  を満たす  $T \in L(\mathcal{D})$  全体, すなわち, トレース・クラスを  $\mathcal{C}_1$  で表す.

**定義 3.** unitary 作用素  $U$  で  $T = U|T|$  と表され,  $[U, |T|^{2p}] = U|T|^{2p} - |T|^{2p}U \in \mathcal{C}_1$  のとき,  $T$  を  $p$ -nearly normal と呼ぶ.

**定義 4.**  $K \in \mathcal{C}_1$  に対して,  $(I - K)$  の行列式  $\det(I - K)$  を

$$\det(I - K) = \prod_{j=1}^{\nu(K)} (1 - \lambda_j(K)),$$

によって定義する. ただし,  $\{\lambda_j(K)\}_{j=1}^{\nu(K)}$  は  $K$  のゼロでない固有値を重複度分數える ([9, p.157]).

もし  $K^{-1}$  が存在するときは,  $\det(I - K)$  は, Xia のそれに一致する ([13, p.175]).  $ABA^{-1}B^{-1}$  を  $\{A, B\}$  と書き, multiplicative commutator と呼ぶ.  $\{e^A, e^B\}$  について, 次の結果が知られている.

**Theorem F** ([13, Chapter 7, Lemma 4.1]).  $A, B \in B(\mathcal{D})$  かつ  $[A, B] \in \mathcal{C}_1$  のとき,  $\{e^A, e^B\} \in \mathcal{C}_1$  で,

$$\det(\{e^A, e^B\}) = \exp(\text{Tr}[A, B]).$$

$T = U|T| \in \text{SHU}$  とする. このとき,  $\text{Im } \ell > 0$  である  $\ell$  に対して, ほとんど全ての  $e^{i\theta} \in \mathbf{T}$  で,

$$I + \alpha(e^{i\theta})(\beta(e^{i\theta}) - \ell)^{-1} \alpha(e^{i\theta}) = \exp\left(\int_{\sigma(|T|)} \frac{B_{T_p}(e^{i\theta}, \rho)}{\rho - \ell} d\rho\right).$$

上記の作用素の determinant は次の定理で与えられる.

**定理 5.**  $T \in p\text{-HU}$  で  $p$ -nearly normal のとき, ほとんど全ての  $e^{i\theta} \in \mathbf{T}$  で,

$$\det\left(I + \alpha(e^{i\theta})(\beta(e^{i\theta}) - \ell)^{-1} \alpha(e^{i\theta})\right) = \exp\left(2p \int_{\sigma(|T|)} \frac{r^{2p-1} \cdot g_T(e^{i\theta}, r)}{r^{2p} - \ell} dr\right).$$

次に,  $\mathcal{A}_2$  は 2 変数  $r, z$  の Laurent 多項式環であり  $p(r, z) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=-N}^N a_{jk} \cdot r^j z^k$  とする. ここで  $N$  は正の整数で  $a_{jk}$  は定数である.  $X, Y$  は作用素で, 特に  $Y$  は  $Y^{-1}$  を持つとする.  $p(r, z) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=-N}^N a_{jk} \cdot r^j z^k \in \mathcal{A}_2$  に対して,

$$p(X, Y) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=-N}^N a_{jk} \cdot X^j Y^k$$

と定義する.  $p, q \in \mathcal{A}_2$  の Jacobian は  $J(p, q)$  とする. すなわち,

$$J(p, q)(r, e^{i\theta}) = \frac{\partial p}{\partial r}(r, e^{i\theta}) \cdot \frac{\partial q}{\partial z}(r, e^{i\theta}) - \frac{\partial p}{\partial z}(r, e^{i\theta}) \cdot \frac{\partial q}{\partial r}(r, e^{i\theta}).$$

このとき次の結果が成立する.

**定理 G** ([3, Theorem 10]).  $n$  を正の整数,  $T = U|T| \in \frac{1}{2n}$ -HU とする.  $T$  が  $\frac{1}{2n}$ -nearly normal のとき,  $p, q \in \mathcal{A}_2$  対して,

$$\mathrm{Tr}([p(|T|, U), q(|T|, U)]) = \int \int_{\sigma(T)} J(p, q)(r, e^{i\theta}) e^{i\theta} g_T(e^{i\theta}, r) dr dm(\theta)$$

が成立する.

最後に, 次の結果が得られる.

**定理 6.**  $n$  を正の整数,  $T = U|T| \in \frac{1}{2n}$ -HU とする.  $T$  が  $\frac{1}{2n}$ -nearly normal のとき,  $p, q \in \mathcal{A}_2$  対して,

$$\begin{aligned} \det(\{\exp(p(|T|, U)), \exp(q(|T|, U))\}) &= \exp(\mathrm{Tr}([p(|T|, U), q(|T|, q)])) \\ &= \exp\left(\int \int_{\sigma(T)} J(p, q)(r, e^{i\theta}) e^{i\theta} g_T(e^{i\theta}, r) dr dm(\theta)\right) \end{aligned}$$

が成立する.

## References

- [1] A. Aluthge, On  $p$ -hyponormal operator for  $0 < p < 1$ , *Integr. Equat. Oper. Th.* **13**(1990), 307-315.
- [2] M. Chō and T. Huruya,  $p$ -hyponormal operators for  $0 < p < 1/2$ , *Commentationes Math.* **33**(1993), 23-29.
- [3] M. Chō and T. Huruya, Trace formulae of  $p$ -hyponormal operators, *Studia Math.* **161**(2004), 1-18.
- [4] M. Chō, T. Huruya, Determinants of characteristic functions of  $p$ -hyponormal operators, to appear in *Math. Proc. Royal Irish Acad.*
- [5] M. Chō, T. Huruya and M. Itoh, Singular integral models for  $p$ -hyponormal operators and the Riemann-Hilbert problem, *Studia Math.* **130**(1998), 213-221.

- [6] M. Chō, T. Huruya and M. Itoh, Riemann-Hilbert problem for characteristic functions of  $p$ -hyponormal operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **64**(1998), 271-279.
- [7] M. Chō, T. Huruya and C. Li, Trace formulae associated with the polar decomposition of operators, *Math. Proc. Royal Irish Acad.* **105**(2005), 57-69.
- [8] M. Chō and M. Itoh, On spectra of  $p$ -hyponormal operators, *Integr. Equat. Oper. Th.* **23**(1995), 287-293.
- [9] I.C. Gøberg and M.G. Krein, Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, *Transl. Math. Monographs*, **18**, Amer. Math. Soc., Providence (1969).
- [10] M. Martin and M. Putinar, *Lectures on Hyponormal operators*, Birkhäuser Verlag, Basel (1989).
- [11] J.D. Pincus and D. Xia, Mosaic and principal function of hyponormal and semi-hyponormal operators, *Integr. Equat. Oper. Th.* **4**(1981), 134-150.
- [12] D. Xia, On the non-normal operators – semi-hyponormal operators, *Sci. Sinica* **23**(1980), 700-713.
- [13] D. Xia, *Spectral theory of hyponormal operators*, Birkhäuser Verlag, Basel (1983).