

Renormalization Group Method and its Application to Coupled Oscillators

千葉逸人 (Hayato CHIBA) ^{*1}

京都大学情報学研究科

October 20 2008

Abstract

従来、ベクトル場の標準形は多項式ベクトル場に対して定義されていたが、これを一般の C^∞ ベクトル場へと拡張する。標準形、および元のベクトル場を標準形に変換するための座標変換を計算するための具体的な公式はくりこみ群の方法を用いて導出される。得られた結果をある 2 次元の方程式に応用し、これが無限個の周期軌道を持つことを示す。

1 Introduction

Poincaré-Durac のベクトル場の標準形 (Poincaré-Durac normal forms) はベクトル場の不動点の近傍の流れを解析するための基本的な道具である [1,8,10]。これまでに多項式ベクトル場に対する標準形はよく研究されており、十分に理解されていると言ってよいだろう。ここで、多項式ベクトル場に対する標準形とは次のことを意味する：もし $\mathbf{R}^n$ 上の微分方程式 $dx/dt = \dot{x} = f(x)$ で f が原点を不動点に持つ (すなわち $f(0) = 0$) C^∞ 級のベクトル場ならば、まずこれを形式的べき級数に展開して

$$\dot{x} = Ax + P_2(x) + P_3(x) + \cdots, \quad (1.1)$$

とする。ここで A は定行列であり、 $P_k(x)$ は次数 k の同次多項式ベクトル場である。このとき、従来の標準形の理論は、多項式ベクトル場 $P_2, P_3, \dots$ たちを順番に標準形に変換していく。この記事では、この従来の手法を**多項式型標準形 (polynomial normal forms)**と呼ぶことにする。

元の方程式 $\dot{x} = f(x)$ を多項式型標準形に変換するための座標変換は **near identity transformation** と呼ばれ (適当な訳語がないため標準形変換と呼ぶことにする)、次の形をしている：

$$x = h(y) = y + h_2(y) + h_3(y) + \cdots, \quad (1.2)$$

^{*1} E mail address : chiba@amp.i.kyoto-u.ac.jp

ここで h_k は次数 k の同次多項式である。

従来の多項式型標準形の欠点は、標準形変換 (1.2) がべき級数、あるいは多項式であるため、 y が大きいところでは微分同相にならず、したがって原点のある小さな近傍でしか標準形が意味をなさないことである。

この記事では、 $\dot{x} = Ax + f(x)$ なる形をした与えられた方程式に対し、 C^∞ 型標準形 (C^∞ normal forms) を導入する。ここで f は原点を不動点に持つ C^∞ ベクトル場である。我々の方法は f をべき級数に展開することなく標準形を与える。例えばベクトル場 $f(x)$ が x に関して周期的であれば、その C^∞ 型標準形、およびこれを求めるための標準形変換もまた周期的になることが示せる。したがって原点の比較的大きな開近傍、あるいは時として相空間全体で標準形変換が微分同相になり、 C^∞ 型標準形は多項式型標準形よりもより大域的な情報を調べることを可能にする。

この記事は以下のように構成される：まず第 2 節では多項式型標準形の簡単な解説を行う。第 3.1 節では、 C^∞ 型標準形を与えるための準備として、 C^∞ ベクトル場全体がなす空間のある直和分解を与え、その性質を調べる。第 3.2 節では C^∞ 型標準形の定義を与える。 C^∞ 型標準形、および標準形変換を求めるための具体的な公式はくりこみ群の方法 (renormalization group method) により導出される。第 3.3 節では方程式の線形部分、すなわち上の行列 A が双曲型でない場合を扱う。このとき、標準形が持つ法双曲型不変多様体が元の方程式に遺伝することを示す。第 4 節ではこの定理を応用し、ある 2 次元の方程式が無数個の周期軌道を持つことを示す。

2 Review of the polynomial normal forms

この節では、次節で定義する C^∞ 型標準形との比較のため、多項式型標準形の簡単な解説をしよう。より詳しい議論については Chow, Li, Wang [8] や Murdock [10] などを参照せよ。

$P^k(\mathbf{R}^n)$ を $\mathbf{R}^n$ 上の次数 k の同次多項式ベクトル場の全体とする。次の形の $\mathbf{R}^n$ 上の常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax + \varepsilon g_2(x) + \varepsilon^2 g_3(x) + \cdots, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (2.1)$$

を考えよう。ここで A は $n \times n$ の行列であり、 $g_k \in P^k(\mathbf{R}^n)$, $k = 2, 3, \dots$ であるとする。また $\varepsilon \in \mathbf{R}$ は後で行う座標変換の反復のステップを見やすくするためのダミーのパラメータであり、 $\varepsilon = 1$ だと思っても構わない。しかし応用上の多くの摂動論の問題では実際に ε は微小パラメータであることを注意しておく。また、もし $\dot{x} = f(x)$ なる形の方程式で、 f

が原点を不動点に持つ C^∞ 級のベクトル場であるものが与えられれば, $x \mapsto \varepsilon x$ と座標変換して系 $\varepsilon \dot{x} = f(\varepsilon x)$ を ε についてべき級数展開すれば, (2.1) の形の方程式に帰着されることに注意しておく.

方程式 (2.1) を次の形の座標変換

$$x = y + \varepsilon h_2(y), \quad h_2 \in P^2(\mathbf{R}^n) \quad (2.2)$$

を用いてできるだけ簡単な形に変形することを試みよう. 式 (2.2) を式 (2.1) に代入することで

$$\left(id + \varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial y}(y) \right) \dot{y} = A(y + \varepsilon h_2(y)) + \varepsilon g_2(y + \varepsilon h_2(y)) + \varepsilon^2 g_3(y + \varepsilon h_2(y)) + \cdots \quad (2.3)$$

を得る. ε について展開して整理すれば次のような式を得る:

$$\dot{y} = Ay + \varepsilon \left(g_2(y) - \frac{\partial h_2}{\partial y}(y) Ay + Ah_2(y) \right) + \varepsilon^2 \bar{g}_3(y) + \cdots \quad (2.4)$$

ただし $\bar{g}_3 \in P^3(\mathbf{R}^n)$ である. ここで, 多項式ベクトル場の空間の上で定義された線形写像 $\mathcal{L}_A$ を

$$\mathcal{L}_A(f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x) Ax - Af(x) \quad (2.5)$$

により定義しよう. $\mathcal{L}_A$ は同次多項式の次数を保つ, すなわち $P^k(\mathbf{R}^n)$ から $P^k(\mathbf{R}^n)$ の中への写像になっている. したがって直和分解

$$P^k(\mathbf{R}^n) = \text{Im } \mathcal{L}_A|_{P^k(\mathbf{R}^n)} \oplus C_k \quad (2.6)$$

が成り立つ. ここで C_k は適当な $\text{Im } \mathcal{L}_A|_{P^k(\mathbf{R}^n)}$ の補空間である. 特に, C_k として $C_k = \text{Ker } \mathcal{L}_A|_{P^k(\mathbf{R}^n)}$ なるものが取れることが知られている. ここで A^* は行列 A の複素共役である:

$$P^k(\mathbf{R}^n) = \text{Im } \mathcal{L}_A|_{P^k(\mathbf{R}^n)} \oplus \text{Ker } \mathcal{L}_{A^*}|_{P^k(\mathbf{R}^n)}. \quad (2.7)$$

式 (2.4) は $\mathcal{L}_A$ を用いて

$$\dot{y} = Ay + \varepsilon(g_2(y) - \mathcal{L}_A(h_2)(y)) + \bar{g}_3(y) + \cdots, \quad (2.8)$$

のように書けるので, ある $h_2 \in P^2(\mathbf{R}^n)$ で $g_2 - \mathcal{L}_A(h_2) \in \text{Ker } \mathcal{L}_{A^*}|_{P^2(\mathbf{R}^n)}$ となるようなものが存在することが分かる.

次に

$$y = z + \varepsilon^2 h_3(z), \quad h_3 \in P^3(\mathbf{R}^n) \quad (2.9)$$

なる形の座標変換を用いて $\bar{g}_3 \in P^3(\mathbf{R}^n)$ をできるだけ簡単な式になるように変換することを試みる. 上の座標変換が 2 次の多項式部分 $g_2 - \mathcal{L}_A(h_2)$ を変えないことは容易に確認でき, 変換された方程式は

$$\dot{y} = Ay + \varepsilon(g_2(y) - \mathcal{L}_A(h_2)(y)) + \varepsilon^2(\bar{g}_3(y) - \mathcal{L}_A(h_3)(y)) + O(\varepsilon^3) \quad (2.10)$$

なる形をしていることが分かる. したがって先ほど同様に, $\bar{g}_3 - \mathcal{L}_A(h_3) \in \text{Ker } \mathcal{L}_A|_{P^3(\mathbf{R}^n)}$ が成り立つような h_3 をとることができる.

この操作を帰納的に繰り返すことで次の定理を得る.

Theorem 2.1.

ある形式的な C^∞ 級の座標変換 (標準形変換)

$$x = z + \varepsilon h_2(z) + \varepsilon^2 h_3(z) + \cdots \quad (2.11)$$

で $h_k \in P^k(\mathbf{R}^n)$ なるものが存在し, これは式 (2.1) を

$$\dot{z} = Az + \varepsilon R_2(z) + \varepsilon^2 R_3(z) + \cdots \quad (2.12)$$

なる方程式で全ての $k = 2, 3, \dots$ に対して $R_k \in \text{Ker } \mathcal{L}_A \cap P^k(\mathbf{R}^n)$ を満たすものに変換する. 右辺の無限級数を m 次で打ち切って得られる方程式

$$\dot{z} = Az + \varepsilon R_2(z) + \varepsilon^2 R_3(z) + \cdots + \varepsilon^m R_m(z) \quad (2.13)$$

を m 次の多項式型標準形と呼ぶ.

Remark 2.2.

第 1 節で注意したように, 標準形変換 (2.11) は一般には原点のある近傍でしか微分同相にならない. またたとえ式 (2.1) が収束級数であっても, 式 (2.11) と式 (2.12) は一般には発散級数である. 多項式型標準形が収束するための必要十分条件については Zung [12] を参照せよ. 標準形 (2.12) は一般に一意には定まらない. というのも, 例えば式 (2.10) において, 同一の $R_2 := g_2 - \mathcal{L}_A(h_2)$ を与える多くの h_2 が存在する ($\text{Ker } \mathcal{L}_A$ の次元の大きさの分だけ h_2 の選び方に任意性がある). しかし異なる h_2 の選び方は異なる $\bar{g}_3$ を与えるため, $R_3, R_4, \dots$ の関数形を変えるであろう. 無数にある標準形たちのうち, ある意味でもっとも簡単なものは hyper-normal form と呼ばれている [10,11].

行列 A が $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ なる対角行列のときは $\text{Im } \mathcal{L}_A$ と $\text{Ker } \mathcal{L}_A$ は次の式

$$\text{Im } \mathcal{L}_A \cap P^k(\mathbf{R}^n) = \text{span}\{x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_n^{q_n} e_i \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j q_j \neq \lambda_i, \sum_{j=1}^n q_j = k\}, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \text{Ker } \mathcal{L}_A \cap P^k(\mathbf{R}^n) &= \{f \in P^k(\mathbf{R}^n) \mid f(e^{At}x) = e^{At}f(x)\} \\ &= \text{span}\{x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_n^{q_n} e_i \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j q_j = \lambda_i, \sum_{j=1}^n q_j = k\}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

で与えられることが知られており、これらを用いて標準形を比較的簡単に求めることができる (Chow, Li, Wang [9]). ここで $e_1, \dots, e_n$ は $\mathbf{R}^n$ の標準基底である. 条件式 $\sum_{j=1}^n \lambda_j q_j = \lambda_i$ は**共鳴条件**と呼ばれる. ここで等式

$$\mathcal{L}_A(f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)Ax - Af(x) = 0 \quad (2.16)$$

は $f(e^{At}x) = e^{At}f(x)$ と同値であることに注意しておこう.

3 C^∞ normal forms theory

この節では C^∞ 型標準形の一般論を展開する. 第 3.1 節では直和分解 (2.7) を拡張し, C^∞ ベクトル場の空間の直和分解を与え, その性質を調べる. 第 3.2 節ではくりこみ群の方法を用いて C^∞ 型標準形を具体的に導出する. 第 3.3 節では行列 A の全ての固有値が虚軸上にある場合を考える. このときは標準形を求める簡便な計算法がある. また, 元の方程式の法双曲型不変多様体の存在が標準形のそれから導かれることを示す.

3.1 Decomposition of the space of C^∞ vector fields

$P_0(\mathbf{R}^n)$ を $\mathbf{R}^n$ 上の多項式ベクトル場で次数が 1 以上であるものの全体がなす空間とする. $P_0(\mathbf{R}^n)$ 上の線形写像 $\mathcal{L}_A$ を式 (2.5) で定義すると, 直和分解

$$P_0(\mathbf{R}^n) = \text{Im } \mathcal{L}_A \oplus \text{Ker } \mathcal{L}_A. \quad (3.1)$$

が成り立つことを前節で見た.

この分解は完備化により原点を不動点に持つ C^∞ ベクトル場の全体の空間へと拡張される.

Proposition 3.1.

$K \subset \mathbf{R}^n$ を原点を含むある開集合でその閉包 $\bar{K}$ がコンパクトであるようなものとする。 $X_0^\infty(K)$ を K 上の C^∞ 級のベクトル場 f で原点で消えるもの ($f(0) = 0$) の全体とし、線形写像 $\mathcal{L}_A : X_0^\infty(K) \rightarrow X_0^\infty(K)$ を式 (2.5) で定義する。このとき、直和分解

$$X_0^\infty(K) = V_I \oplus V_K \quad (3.2)$$

が成り立つ。ここで

$$V_I := \text{Im } \mathcal{L}_A, \quad (3.3)$$

$$V_K := \{f \in X_0^\infty(K) \mid f(e^{A^*t}x) = e^{A^*t}f(x)\}. \quad (3.4)$$

実際、この主張は多項式ベクトル場の全体が $X_0^\infty(K)$ の中で C^∞ 位相に関して稠密である (Hirsch [9]) こと、および射影 $\mathcal{P}_I : P_0(\mathbf{R}^n) \rightarrow \text{Im } \mathcal{L}_A$ と $\mathcal{P}_K : P_0(\mathbf{R}^n) \rightarrow \text{Ker } \mathcal{L}_A$ が連続であることからただちに従う。

上の分解に関する射影を $\mathcal{P}_I : X_0^\infty(K) \rightarrow V_I$ と $\mathcal{P}_K : X_0^\infty(K) \rightarrow V_K$ で定義しよう。 $g \in V_I$ に対し、あるベクトル場 $F \in X_0^\infty(K)$ で

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x)Ax - AF(x) = g(x) \quad (3.5)$$

を満たすものが存在する。そのような F は一意ではない。実際、もし F が上の等式を満たすならば、 $h \in V_K$ なる h に対して $F + h$ もまた上の等式を満たすからである。もし F が等式 (3.5) と $\mathcal{P}_K(F) = 0$ を満たすならば、これを $F = Q(g)$ と書くことにしよう。このとき Q は V_I から V_I への線形写像を定める。

後で標準形を求めるときに便利になるいくつかの公式を準備しよう。

Proposition 3.2.

任意の $g \in V_I$ に対して

$$(i) \mathcal{P}_K \circ Q(g) = 0, \quad (3.6)$$

$$(ii) Q(Dg \cdot Q(g) + DQ(g) \cdot g) = \mathcal{P}_I(DQ(g) \cdot Q(g)), \quad (3.7)$$

$$(iii) e^{-As}g(e^{As}x) = \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{-As}Q(g)(e^{As}x) \right), \quad s \in \mathbf{R}, \quad (3.8)$$

が成り立つ。ただし D は x についての微分を表す。

Proof. (i) は Q の定義から従う. (ii) を示すために $F = Q(g)$ と書く. 式 (3.5) を用いると, 等式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x) F(x) \right) Ax - A \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x) F(x) \right) = \frac{\partial g}{\partial x}(x) F(x) + \frac{\partial F}{\partial x}(x) g(x), \quad (3.9)$$

が成り立つことが容易に確認でき, (ii) が従う. (iii) は直接計算で示すことができる. ■

ベクトル場の Lie 括弧積 (交換子) $[\cdot, \cdot]$ を

$$[f, g](x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x) g(x) - \frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x). \quad (3.10)$$

で定義する. 次の主張は V_K が Lie 括弧積で閉じていることを意味する.

Proposition 3.3.

もし $g, h \in V_K$ ならば $Dg \cdot h \in V_K$ かつ $[g, h] \in V_K$.

Proof. 直接計算で示すことができる. ■

次の主張は $A = A^*$ のときにのみ成り立つことに注意せよ.

Proposition 3.4.

$A = A^*$ とする. 任意の $g \in V_I$, $h \in V_K$ に対し, 次が成り立つ.

$$(i) \quad \frac{\partial g}{\partial x} h \in V_I, \quad Q \left(\frac{\partial g}{\partial x} h \right) = \frac{\partial Q(g)}{\partial x} h, \quad (3.11)$$

$$(ii) \quad \frac{\partial h}{\partial x} g \in V_I, \quad Q \left(\frac{\partial h}{\partial x} g \right) = \frac{\partial h}{\partial x} Q(g), \quad (3.12)$$

$$(iii) \quad [g, h] \in V_I, \quad Q([g, h]) = [Q(g), h]. \quad (3.13)$$

Proof. $F = Q(g)$ とおく. g と h は等式 (3.5) および

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x) Ax - Ah(x) = 0 \quad (3.14)$$

を満たす. これらを用いると

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x) h(x) \right) Ax - A \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x) h(x) \right) = \frac{\partial g}{\partial x}(x) h(x), \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x) F(x) \right) Ax - A \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x) F(x) \right) = \frac{\partial h}{\partial x}(x) g(x), \quad (3.16)$$

なる等式を示すことができ, これらは $\partial g / \partial x \cdot h \in V_I$, および $\partial h / \partial x \cdot g \in V_I$ を意味する. 同様の計算により $\partial F / \partial x \cdot h \in V_I$, および $\partial h / \partial x \cdot F \in V_I$ が分かるので, (i) と (ii) が示さ

れた. (iii) は (i) と (ii) からただちに従う. ■

Remark 3.5. Prop.3.3 と 3.4 は $[V_K, V_K] \subset V_K$, $[V_I, V_K] \subset V_I$ なることを意味するが, 一般には $[V_I, V_I] \subset V_I$ は成り立たない. したがって V_I は Lie 括弧積に関してイデアルではなく, $[\mathcal{P}_K(g), \mathcal{P}_K(h)] \neq \mathcal{P}_K[g, h]$ となっている.

3.2 C^∞ normal forms

次の形の常微分方程式系

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x) + \cdots, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (3.17)$$

を考えよう. ここで A は $n \times n$ の定行列であり, $g_1(x), g_2(x), \dots \in \mathcal{X}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ は C^∞ ベクトル場で原点で消えるものとする. $\varepsilon \in \mathbf{R}$ はパラメータであり, 多くの応用では微小な量である. この記事では A は対角行列であるとする. A が対角化可能でない場合には標準形を計算するための公式の導出がかなり難しく, ここでは扱わない.

式 (3.17) に対する標準形を求めるためにくりこみ群の方法を用いる. 以下で行う形式的な議論は定理 3.7 の中で正当化される.

まず, (3.17) に対して素朴な摂動法 (regular perturbation method) により形式解を構成することを試みる.

$$x = \hat{x}(t) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots \quad (3.18)$$

とにおいてこれを式 (3.17) に代入すると

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \dot{x}_k = A \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_k \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j x_j \right). \quad (3.19)$$

これを ε に関して展開し各 ε^k の係数を比較することで次の常微分方程式の系を得る:

$$\dot{x}_0 = Ax_0, \quad (3.20)$$

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + G_1(x_0), \quad (3.21)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_i = Ax_i + G_i(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}), \quad (3.22)$$

$$\vdots$$

ここで関数 G_k は次の等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_k \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j x_j \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k G_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \quad (3.23)$$

を通して定義される. 例えば G_1, G_2, G_3 は

$$G_1(x_0) = g_1(x_0), \quad (3.24)$$

$$G_2(x_0, x_1) = \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0)x_1 + g_2(x_0), \quad (3.25)$$

$$G_3(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(x_0)x_1^2 + \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0)x_2 + \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0)x_1 + g_3(x_0), \quad (3.26)$$

である.

0 次の方程式 $\dot{x}_0 = Ax_0$ の解は $x_0(t) = e^{At}y$ で与えられる. ここで $y \in \mathbf{R}^n$ は初期値を表す. したがって 1 次の方程式は

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + g_1(e^{At}y) \quad (3.27)$$

と書け, $x_1(0) = h^{(1)}(y)$ を初期値とするその一般解は

$$x_1(t) = e^{At}h^{(1)}(y) + e^{At} \int_0^t e^{-As} g_1(e^{As}y) ds \quad (3.28)$$

で与えられることが分かる. さて, 未定の関数 $h^{(1)}$ をうまく選ぶことで, この $x_1(t)$ をできるだけ簡単な式にすることを試みよう. $\mathcal{P}_I(g_1) = g_{1I}$, $\mathcal{P}_K(g_1) = g_{1K}$ とおく. このとき Prop.3.2 (iii) より

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{At}h^{(1)}(y) + e^{At} \int_0^t e^{-As} g_{1I}(e^{As}y) ds + e^{At} \int_0^t e^{-As} g_{1K}(e^{As}y) ds \\ &= e^{At}h^{(1)}(y) + e^{At} \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} (e^{-As} Q(g_{1I})(e^{As}y)) ds + e^{At} \int_0^t g_{1K}(y) ds \\ &= e^{At}h^{(1)}(y) + Q(g_{1I})(e^{At}y) - e^{At}Q(g_{1I})(y) + e^{At}g_{1K}(y)t \end{aligned} \quad (3.29)$$

と計算できる. したがって $h^{(1)} = Q(g_{1I})$ とおけば

$$x_1(t) = Q(g_{1I})(e^{At}y) + g_{1K}(e^{At}y)t \quad (3.30)$$

を得る. ここで t に関して多項式で発散する項 $g_{1K}(e^{At}y)t$ は摂動論におけるいわゆる**永年項 (secular term)** であることに注意せよ.

次に x_2 を計算しよう. x_2 についての方程式の一般解は

$$x_2(t) = e^{At}h^{(2)}(y) + e^{At} \int_0^t e^{-As} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(e^{As}y)(Q(g_{1I})(e^{As}y) + g_{1K}(e^{As}y)s) + g_2(e^{As}y) \right) ds, \quad (3.31)$$

と書ける. ただし $h^{(2)}(y) = x_2(0)$ は初期値である. 上と同様に $h^{(2)}$ をうまく選ぶことで, 上式は

$$x_2(t) = Q\mathcal{P}_I(R_2)(e^{At}y) + \left(\mathcal{P}_K(R_2) + \frac{\partial Q(g_{1I})}{\partial y} g_{1K} \right) (e^{At}y)t + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{1K}}{\partial y}(e^{At}y) g_{1K}(e^{At}y)t^2, \quad (3.32)$$

と変形できることが示せる。ここで $QP_I = Q \circ P_I$ であり, R_2 は次式

$$\begin{aligned} R_2(y) &= G_2(y, Q(g_{1I})(y)) - \frac{\partial Q(g_{1I})}{\partial y}(y)g_{1K}(y) \\ &= \frac{\partial g_1}{\partial y}(y)Q(g_{1I})(y) + g_2(y) - \frac{\partial Q(g_{1I})}{\partial y}(y)g_{1K}(y) \end{aligned} \quad (3.33)$$

で定義される。これらの式の導出は Appendix に収めた。

同様の計算を続けることで, 次の主張を得る。

Proposition 3.6.

$\mathbf{R}^n$ 上の関数 $R_k, k = 1, 2, \dots$ を

$$R_1(y) = g_1(y), \quad (3.34)$$

および $k = 2, 3, \dots$ に対しては

$$\begin{aligned} R_k(y) &= G_k(y, QP_I(R_1)(y), QP_I(R_2)(y), \dots, QP_I(R_{k-1})(y)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial QP_I(R_j)}{\partial y}(y)P_K(R_{k-j})(y), \end{aligned} \quad (3.35)$$

で定義する。このとき, 方程式 (3.22) は次の形の解を持つ:

$$x_i = x_i(t, y) = QP_I(R_i)(e^{At}y) + p_1^{(i)}(t, e^{At}y)t + p_2^{(i)}(t, e^{At}y)t^2 + \dots + p_i^{(i)}(t, e^{At}y)t^i. \quad (3.36)$$

ただし関数 $p_j^{(i)}$ は

$$p_1^{(i)}(t, y) = P_K(R_i)(y) + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial QP_I(R_k)}{\partial y}(y)P_K(R_{i-k})(y), \quad (3.37)$$

$$p_j^{(i)}(t, y) = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial p_{j-1}^{(k)}}{\partial y}(t, y)P_K(R_{i-k})(y), \quad (j = 2, 3, \dots, i-1), \quad (3.38)$$

$$p_i^{(i)}(t, y) = \frac{1}{i} \frac{\partial p_{i-1}^{(i-1)}}{\partial y}(t, y)P_K(R_1)(y), \quad (3.39)$$

$$p_j^{(i)}(t, y) = 0, \quad (j > i) \quad (3.40)$$

のように定義されるものとする。

Chiba [5] の Prop.A.1 ではこの主張が, 行列 A の全ての固有値が虚軸上にある場合について示されている。そうでない場合も同様にして証明できる。

今、我々は次の形の (3.17) の形式解

$$\begin{aligned} x &= \hat{x}(t, y) = e^{At}y + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t, y) \\ &= e^{At}y + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(QP_I(R_k)(e^{At}y) + p_1^{(k)}(t, e^{At}y)t \right) + O(t^2) \end{aligned} \quad (3.41)$$

を導出した。これは t についての多項式 (永年項) を含むため、 $t \rightarrow \infty$ で発散する。くりこみ群の方法は場の量子論に起源を持ち、Chen, Goldenfeld, Oono [3,4] によって微分方程式の摂動問題に応用された方法である。彼らの手法はこの形式解から意味のある近似解を構成するために次のようにする。

まず、上式に含まれる多項式 t^k を $(t - \tau)^k$ に置き換える。ここで $\tau \in \mathbf{R}$ はダミーのパラメータである。次に、勝手に導入したパラメータ τ にもとの形式解が依存しないように $y = y(\tau)$ を τ についての関数だと思ふ：

$$\hat{x}(t, y) = e^{At}y(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(QP_I(R_k)(e^{At}y(\tau)) + p_1^{(k)}(t, e^{At}y(\tau))(t - \tau) \right) + O((t - \tau)^2). \quad (3.42)$$

形式解 $\hat{x}(t, y)$ はダミーパラメータ τ に依存しないのだから、次の条件が満たされることが要求されるであろう。

$$\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=t} \hat{x}(t, y) = 0. \quad (3.43)$$

この条件を計算すると

$$0 = e^{At} \frac{dy}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\frac{\partial QP_I(R_k)}{\partial y}(e^{At}y) e^{At} \frac{dy}{dt} - p_1^{(k)}(t, e^{At}y) \right). \quad (3.44)$$

さらに式 (3.37) を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= e^{At} \frac{dy}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\frac{\partial QP_I(R_k)}{\partial y}(e^{At}y) e^{At} \frac{dy}{dt} \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k P_K(R_k)(e^{At}y) - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial QP_I(R_j)}{\partial y}(e^{At}y) P_K(R_{k-j})(e^{At}y) \\ &= e^{At} \left(\frac{dy}{dt} - \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j P_K(R_j)(y) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial QP_I(R_k)}{\partial y}(e^{At}y) e^{At} \left(\frac{dy}{dt} - \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j P_K(R_j)(y) \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

となるので、 y についての常微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j P_K(R_j)(y), \quad (3.46)$$

が得られた。これはくりこみ群方程式 (RG equation) と呼ばれる。式 (3.42) は τ に依存しないのだったから $\tau = t$ とおくことで

$$\hat{x}(t, y(t)) = e^{At} y(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j QP_I(R_j)(e^{At} y(t)), \quad (3.47)$$

なる式を得る。ここで $y(t)$ はくりこみ群方程式 (3.46) の解である。この $\hat{x}(t, y(t))$ は、無限級数を ε について有限な次数で打ち切れば、方程式 (3.17) の近似解を与えることが知られている (Chiba [5])。 $\mathcal{P}_K(R_j)$ は $\mathcal{P}_K(R_j)(e^{At} y) = e^{At} \mathcal{P}_K(R_j)(y)$ を満たすので、 $e^{At} y = z$ とおけば式 (3.46) と (3.47) はそれぞれ

$$\frac{dz}{dt} = Az + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \mathcal{P}_K(R_j)(z), \quad (3.48)$$

$$\hat{x}(t, e^{-At} z(t)) = z(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j QP_I(R_j)(z(t)), \quad (3.49)$$

と変換される。 $\mathcal{P}_K(R_j) \in V_K$ なので、この式 (3.48), (3.49) が求めるべき式 (3.17) の標準形、および標準形変換を与えていると予想される。

以上の形式的な議論は次の定理により正当化される。

Theorem 3.7.

m 次の標準形変換 (m -th order near identity transformation) を

$$x = z + \varepsilon QP_I(R_1)(z) + \varepsilon^2 QP_I(R_2)(z) + \cdots + \varepsilon^m QP_I(R_m)(z) \quad (3.50)$$

で定義する。このとき、これは方程式 (3.17) を次の式

$$\dot{z} = Az + \varepsilon \mathcal{P}_K(R_1)(z) + \varepsilon^2 \mathcal{P}_K(R_2)(z) + \cdots + \varepsilon^m \mathcal{P}_K(R_m)(z) + \varepsilon^{m+1} S(z, \varepsilon), \quad (3.51)$$

に変換する。ここで $S(z, \varepsilon)$ は z と ε についてのある C^∞ 関数である。打ち切り形

$$\dot{z} = Az + \varepsilon \mathcal{P}_K(R_1)(z) + \varepsilon^2 \mathcal{P}_K(R_2)(z) + \cdots + \varepsilon^m \mathcal{P}_K(R_m)(z) \quad (3.52)$$

を式 (3.17) に対する **m 次の C^∞ 型標準形 (m -th order normal form)** と呼ぶ。

Proof. 式 (3.50) と (3.51) において $z = e^{At} y$ とおくことで、座標変換

$$x = e^{At} y + \varepsilon QP_I(R_1)(e^{At} y) + \cdots + \varepsilon^m QP_I(R_m)(e^{At} y) \quad (3.53)$$

が式 (3.17) を

$$\dot{y} = \varepsilon \mathcal{P}_K(R_1)(y) + \cdots + \varepsilon^m \mathcal{P}_K(R_m)(y) + \varepsilon^{m+1} \widetilde{S}(t, y, \varepsilon) \quad (3.54)$$

なる方程式に変換することを示すことにする。証明は直接計算である。式 (3.53) を (3.17) に代入すると、左辺は

$$\frac{dx}{dt} = \left(e^{At} + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \frac{\partial QP_I(R_k)}{\partial y}(e^{At}y)e^{At} \right) \dot{y} + Ae^{At}y + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \frac{\partial QP_I(R_k)}{\partial y}(e^{At}y)Ae^{At}y \quad (3.55)$$

となる。 $QP_I(R_k)$ は等式

$$\frac{\partial QP_I(R_k)}{\partial y}(y)Ay - AQP_I(R_k)(y) = P_I(R_k)(y) \quad (3.56)$$

を満たすので、式 (3.55) は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & \left(e^{At} + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \frac{\partial QP_I(R_k)}{\partial y}(e^{At}y)e^{At} \right) \dot{y} \\ & + Ae^{At}y + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \left(P_I(R_k)(e^{At}y) + AQP_I(R_k)(e^{At}y) \right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

となる。さらに $R_k = P_I(R_k) + P_K(R_k)$ であるから、式 (3.35) により (3.57) は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & \left(e^{At} + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \frac{\partial QP_I(R_k)}{\partial y}(e^{At}y)e^{At} \right) \dot{y} + Ae^{At}y + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k AQP_I(R_k)(e^{At}y) \\ & + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \left(G_k(e^{At}y, QP_I(R_1)(e^{At}y), \dots, QP_I(R_{k-1})(e^{At}y)) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial QP_I(R_j)}{\partial y}(e^{At}y)P_K(R_{k-j})(e^{At}y) - P_K(R_k)(e^{At}y) \right) \end{aligned} \quad (3.58)$$

のように計算される。一方、式 (3.17) の右辺は

$$\begin{aligned} & A(e^{At}y + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k QP_I(R_k)(e^{At}y)) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_k(e^{At}y + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j QP_I(R_j)(e^{At}y)) \\ = & Ae^{At}y + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k AQP_I(R_k)(e^{At}y) \\ & + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k G_k(e^{At}y, QP_I(R_1)(e^{At}y), \dots, QP_I(R_{k-1})(e^{At}y)) + O(\varepsilon^{m+1}) \end{aligned} \quad (3.59)$$

と変換される。したがって式 (3.17) は次のように変換されることになる：

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= \left(e^{At} + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \frac{\partial QP_I(R_k)}{\partial y} (e^{At}y) e^{At} \right)^{-1} \times \\
 &\quad \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \left(\mathcal{P}_K(R_k)(e^{At}y) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial QP_I(R_j)}{\partial y} (e^{At}y) \mathcal{P}_K(R_{k-j})(e^{At}y) \right) + O(\varepsilon^{m+1}) \\
 &= e^{-At} \left(id + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon^k \frac{\partial QP_I(R_k)}{\partial y} (e^{At}y) \right)^j \right) \times \\
 &\quad \left(e^{At} \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \mathcal{P}_K(R_k)(y) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \frac{\partial QP_I(R_k)}{\partial y} (e^{At}y) e^{At} \sum_{j=1}^{m-k} \varepsilon^j \mathcal{P}_K(R_j)(y) \right) + O(\varepsilon^{m+1}) \\
 &= \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \mathcal{P}_K(R_k)(y) + e^{-At} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon^k \frac{\partial QP_I(R_k)}{\partial y} (e^{At}y) \right)^j e^{At} \sum_{i=m-k+1}^m \varepsilon^i \mathcal{P}_K(R_i)(y) + O(\varepsilon^{m+1}) \\
 &= \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \mathcal{P}_K(R_k)(y) + O(\varepsilon^{m+1}). \tag{3.60}
 \end{aligned}$$

これで式 (3.17) が式 (3.54) に変換されることが証明された。 ■

Remark 3.8.

式 (3.51) は、標準形変換 (3.50) が微分同相であるような領域 U においてのみ意味を持つ。もしパラメータ ε が小さければ、それだけ大きな領域 U をとることができるであろう。多項式型標準形の場合には $QP_I(R_k)(z)$ が z について多項式であるため、 $z \sim O(1/\varepsilon)$ 程度に原点から離れたところでは標準形変換が微分同相でなくなってしまうことは一般に避けられない。一方、 C^∞ 型標準形の場合にはより大きな領域で標準形変換が微分同相になることがあり得る。例えばもし $QP_I(R_k)(z)$, $k = 1, 2, \dots, m$ が z について周期的ならば、 ε を十分小さくとれば、標準形変換 (3.50) は全ての $z \in \mathbf{R}^n$ で微分同相となるだろう。Example 4.1 でそのようなケースを扱う。

3.3 Non-hyperbolic case

もし式 (3.17) の行列 A が双曲型である、すなわち A が虚軸上に固有値を持たないならば、式 (3.17) の原点近傍の流れは線形化方程式 $\dot{x} = Ax$ と位相共役であり、その安定性は容易に調べられる。一方、もし A が虚軸上に固有値を持つならば式 (3.17) は原点において中心多様体を持ち、その上では分岐のような非自明な現象が起こりうる。この節ではそのような状況を考えよう。中心多様体縮約 [2,6] を用いることにより、初めから A の全ての

固有値が虚軸上にあるものと仮定してもよい。また前節と同様に A は対角行列であると仮定しておく。このとき、作用素 $\mathcal{P}_K$ と $Q\mathcal{P}_I$ は以下のようにして計算することができる。

$A = A^*$ ならば次の等式

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-A(s-t)} g(e^{A(s-t)} x) ds &= \int_0^t e^{-A(s-t)} \mathcal{P}_I(g)(e^{A(s-t)} x) ds + \int_0^t e^{-A(s-t)} \mathcal{P}_K(g)(e^{A(s-t)} x) ds \\ &= Q\mathcal{P}_I(g)(x) - e^{At} Q\mathcal{P}_I(g)(e^{-At} x) + \mathcal{P}_K(g)(x)t \end{aligned} \quad (3.61)$$

が成り立つことを思い出そう。標準形 (3.52) を計算するためには $Q\mathcal{P}_I(g)$, および $\mathcal{P}_K(g)$ を計算する必要がある。仮定より $e^{-As} g(e^{As} x)$ は s について概周期関数なので, $e^{-As} g(e^{As} x) = \sum_{\lambda_i \in \Lambda} c(\lambda_i, x) e^{\sqrt{-1}\lambda_i s}$ のように Fourier 級数展開できる。ここで Λ は Fourier 指数の集合であり, $c(\lambda_i, x) \in \mathbf{R}^n$ は Fourier 係数である。特に零 Fourier 指数に対応する Fourier 係数 $c(0, x)$ は $e^{-As} g(e^{As} x)$ の平均である:

$$c(0, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-As} g(e^{As} x) ds. \quad (3.62)$$

したがって次の式

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-A(s-t)} g(e^{A(s-t)} x) ds &= \int_0^t \sum_{\lambda_i \in \Lambda} c(\lambda_i, x) e^{\sqrt{-1}\lambda_i(s-t)} ds \\ &= \sum_{\lambda_i \neq 0} \frac{1}{\sqrt{-1}\lambda_i} c(\lambda_i, x) (1 - e^{-\sqrt{-1}\lambda_i t}) + c(0, x)t \end{aligned} \quad (3.63)$$

を得る。式 (3.61) と比較すれば

$$\mathcal{P}_K(g)(x) = c(0, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-As} g(e^{As} x) ds, \quad (3.64)$$

$$Q\mathcal{P}_I(g)(x) = \sum_{\lambda_i \neq 0} \frac{1}{\sqrt{-1}\lambda_i} c(\lambda_i, x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t (e^{-As} g(e^{As} x) - \mathcal{P}_K(g)(x)) ds, \quad (3.65)$$

が得られる。ここで $\int^t$ は不定積分であり、積分定数は零となるように選ばれているものとする。これら $\mathcal{P}_K$ と $Q\mathcal{P}_I$ に対する公式を用いれば、標準形を比較的容易に計算することができるであろう。

今、式 (3.17) に対する標準形 (3.52) がある自然数 $m \geq 1$ に対して $\mathcal{P}_K(R_1) = \cdots = \mathcal{P}_K(R_{m-1}) = 0$ を満たすものとしよう。 $z = e^{At}y$ とおけば、式 (3.51) は

$$\dot{y} = \varepsilon^m \mathcal{P}_K(R_m) + O(\varepsilon^{m+1}) \quad (3.66)$$

なる形に変換される. もし ε が十分小さければこの方程式の定性的な性質は打ち切り形 $\dot{y} = \varepsilon^m \mathcal{P}_K(R_m)$ の定性的な性質から従うであろう. また e^{At} は概周期的なので, 式 (3.51) の定性的な性質は式 (3.66) のそれと同じであろう. このようなアイデアで, 次の定理が証明できる.

Theorem 3.9 (Chiba [5,7]).

行列 A は対角化可能であり, その全ての固有値は虚軸上にあるとせよ. 式 (3.17) の標準形はある自然数 $m \geq 1$ に対して $\mathcal{P}_K(R_1) = \cdots = \mathcal{P}_K(R_{m-1}) = 0$ を満たすとする. このとき, もし方程式 $dy/dt = \varepsilon^m \mathcal{P}_K(R_m)(y)$ が法双曲型不変多様体 (normally hyperbolic invariant manifold) N を持つならば, 十分小さい $|\varepsilon|$ に対し, 方程式 (3.17) は N と微分同相な不変多様体 N_ε を持つ. 特に N_ε と N の安定性は一致する.

この定理は Chiba [5,7] においてくりこみ群の方法の文脈で証明されている.

4 Examples

いくつかの簡単な例を紹介しよう.

Example 4.1.

次の $\mathbf{R}^2$ 上の方程式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2\varepsilon \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \quad (4.1)$$

を考える. ここで $\varepsilon > 0$ は微小パラメータである. 線形部分を対角化するために $x_1 = z_1 + z_2$, $x_2 = i(z_1 - z_2)$ とおくと, 上式は

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \sin(z_1 + z_2) \\ \sin(z_1 + z_2) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

となる. ただし $i = \sqrt{-1}$. この方程式の標準形を 2 通りのやり方, 多項式型標準形と C^∞ 型の標準形, で計算しよう.

(I) 多項式型標準形を計算するために $\sin(z_1 + z_2)$ を

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz_1 \\ -iz_2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon}{6} \begin{pmatrix} (z_1 + z_2)^3 \\ (z_1 + z_2)^3 \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{120} \begin{pmatrix} (z_1 + z_2)^5 \\ (z_1 + z_2)^5 \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon}{5040} \begin{pmatrix} (z_1 + z_2)^7 \\ (z_1 + z_2)^7 \end{pmatrix} + \cdots \quad (4.3)$$

と Taylor 展開する. この方程式に対する 4 次の多項式型標準形は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} iy_1 \\ -iy_2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon}{2} \begin{pmatrix} y_1(y_1 y_2 + i) \\ y_2(y_1 y_2 - i) \end{pmatrix} \\ & + \frac{\varepsilon}{12} \begin{pmatrix} y_1^2 y_2 (y_1 y_2 + 6i) \\ y_1 y_2^2 (y_1 y_2 - 6i) \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon}{144} \begin{pmatrix} y_1(y_1^3 y_2^3 + 39iy_1^2 y_2^2 + 54y_1 y_2 + 18i) \\ y_2(y_1^3 y_2^3 - 39iy_1^2 y_2^2 + 54y_1 y_2 - 18i) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

となる. 極座標で書くために $y_1 = re^{i\theta}$, $y_2 = re^{-i\theta}$ とおけば,

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r - \frac{\varepsilon}{2} r^3 + \frac{\varepsilon}{12} r^5 - \frac{\varepsilon}{144} (r^7 + 54r^3), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{12} \cdot 6r^2 - \frac{\varepsilon}{144} (39r^4 + 18) \end{cases} \quad (4.5)$$

を得る. r についての方程式の不動点 (すなわち右辺の零点) が元の方程式 (4.1) の周期軌道を与えることに注意しよう. 標準形変換は

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \varepsilon i \begin{pmatrix} \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{24} (2y_1^3 - 6y_1 y_2^2 - y_2^3) + O(y_1^5, y_2^5) \\ -\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{24} (y_1^3 + 6y_1^2 y_2 - 2y_2^3) + O(y_1^5, y_2^5) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

で与えられる. 容易に分かるように, これは原点のある近傍においてのみ微分同相となる.

(II) 次に式 (4.2) に対する C^∞ 型標準形を求めよう. 標準形の 1 次の項 $\mathcal{P}_K(R_1)$ は式 (3.64) より

$$\mathcal{P}_K(R_1)(y_1, y_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int^t \begin{pmatrix} e^{-is} & 0 \\ 0 & e^{is} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(e^{is} y_1 + e^{-is} y_2) \\ \sin(e^{is} y_1 + e^{-is} y_2) \end{pmatrix} ds \quad (4.7)$$

で与えられる. したがって 1 次の標準形は

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iy_1 \\ -iy_2 \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{2\pi} \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} e^{-it} \sin(e^{it} y_1 + e^{-it} y_2) dt \\ \int_0^{2\pi} e^{it} \sin(e^{it} y_1 + e^{-it} y_2) dt \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

となることが分かる. $y_1 = re^{i\theta}$, $y_2 = re^{-i\theta}$ とおけば

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sin(2r \cos t) dt = \varepsilon J_1(2r), \\ \dot{\theta} = 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \sin(2r \cos t) dt = 1, \end{cases} \quad (4.9)$$

となる. ここで $J_n(r)$ は第 1 種 Bessel 関数であり, 方程式 $r^2 x'' + r x' + (r^2 - n^2)x = 0$ の解として定義される.

式 (3.65) より, 1 次の標準形変換が y_1 と y_2 に関して周期的になっているのを見るのは容易である ((3.65) の不定積分を初等的に行うことはもはや不可能であるが). したがってある正定数 ε_0 が存在し, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ならば標準形変換が $\mathbf{R}^2$ 全体で微分同相となる. 雑に言って, ε_0 は標準形変換の 1 次の項 $QP_I(R_1)$ のノルムよりも小さくとればよいであろう. $J_1(2r)$ は無限個の零点を持つので, 定理 3.9 より元の方程式 (4.1) が無限個の周期軌道を持つことが示された.

Example 4.2.

次の $\mathbf{R}^2$ 上の方程式を考えよう :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2\varepsilon g(x_1), \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases} \quad (4.10)$$

ここで関数 $g(x)$ は

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [2n, 2n+1), \\ -x, & x \in [2n+1, 2n+2), \end{cases} \quad (4.11)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, および $g(x) = -g(-x)$ により定義されるものとする (Fig.1 (a)).

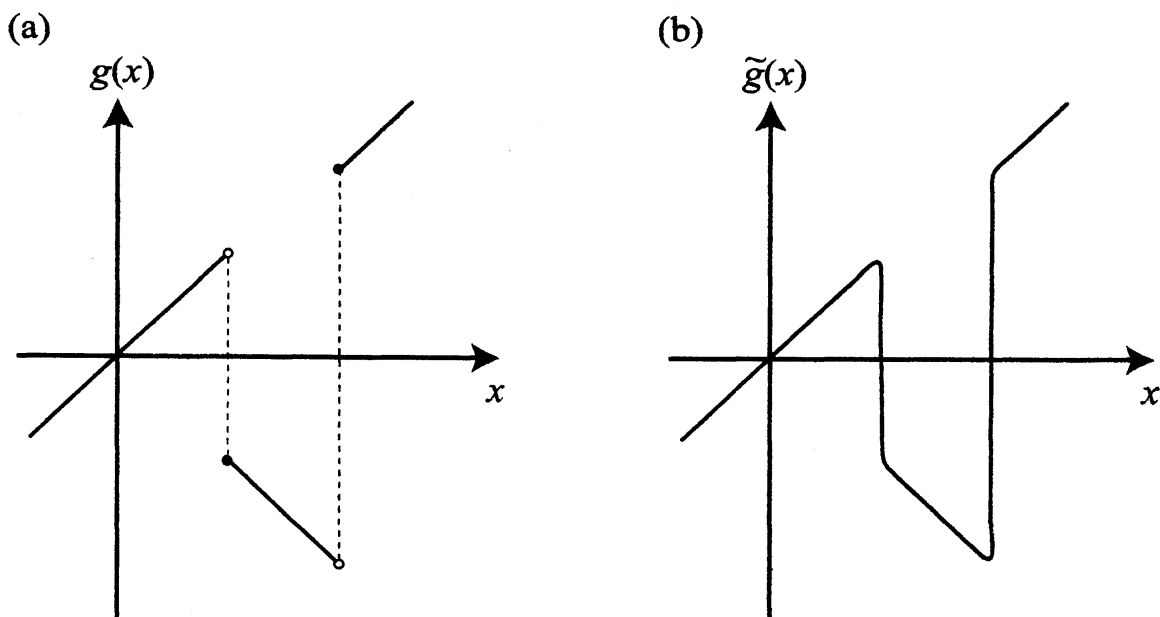


Fig. 1 $g(x)$ と $\tilde{g}(x)$ のグラフ.

式 (4.10) に対し, サポートが十分小さい区間たち $(n - \delta, n + \delta)$, $n \in \mathbf{Z}$ に含まれるような

摂動を与えることにより, 方程式が

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2\varepsilon \bar{g}(x_1), \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \quad (4.12)$$

なる C^∞ の方程式になるようにしよう (Fig.1 (b)). Example 4.1 と同様に計算すると, 1 次の C^∞ 型標準形は極座標で

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \bar{g}(2r \cos t) dt := \frac{\varepsilon}{2\pi} R(r), \\ \dot{\theta} = 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \bar{g}(2r \cos t) dt = 1 \end{cases} \quad (4.13)$$

と書かれることが分かる. 摂動のサポートの外側では関数 $R(r)$ は

$$R(r) = \begin{cases} 2\pi r, & r \in (2n + \delta, 2n + 1 - \delta), \\ -2\pi r, & r \in (2n + 1 + \delta, 2n + 2 - \delta) \end{cases} \quad (4.14)$$

で与えられる. 中間値の定理より $R(r)$ は点 $r = n \in \mathbb{Z}$ の近傍に不動点を持つことが分かり, 特に $r = 2n + 1$ の近くの不動点は安定である. したがって定理 3.9 より, 式 (4.12) が安定な周期軌道を持つことが分かる. 摂動のサポートは十分小さいため, 式 (4.10) が式 (4.12) の周期軌道のそばに安定な不変集合を持つことが分かった.

もし, $\bar{g}(x)$ を原点で展開したのちに多項式型標準形を (4.12) に適用すれば, 1 次の標準形は $\dot{r} = \varepsilon r$ となり, これは原点の小さな近傍でしか有効でない.

付録 A Appendix

ここでは Prop.3.2 ~3.4 を用いることで式 (3.31) から式 (3.32) を導出する. 部分積分により式 (3.31) は

$$\begin{aligned} x_2 &= e^{At} h^{(2)}(y) + e^{At} \int_0^t e^{-As} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(e^{As} y) Q(g_{1I})(e^{As} y) + g_2(e^{As} y) \right) ds \\ &\quad + e^{At} \int_0^t e^{-As} \frac{\partial g_1}{\partial x}(e^{As} y) g_{1K}(e^{As} y) ds \cdot t - e^{At} \int_0^t ds \int_0^s e^{-As'} \frac{\partial g_1}{\partial x}(e^{As'} y) g_{1K}(e^{As'} y) ds' \\ &= e^{At} h^{(2)}(y) + e^{At} \int_0^t e^{-As} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(e^{As} y) Q(g_{1I})(e^{As} y) + g_2(e^{As} y) \right) ds \\ &\quad + e^{At} \int_0^t e^{-As} \frac{\partial g_{1K}}{\partial x}(e^{As} y) g_{1K}(e^{As} y) ds \cdot t + e^{At} \int_0^t e^{-As} \frac{\partial g_{1I}}{\partial x}(e^{As} y) g_{1K}(e^{As} y) ds \cdot t \\ &\quad - e^{At} \int_0^t ds \int_0^s e^{-As'} \frac{\partial g_{1K}}{\partial x}(e^{As'} y) g_{1K}(e^{As'} y) ds' - e^{At} \int_0^t ds \int_0^s e^{-As'} \frac{\partial g_{1I}}{\partial x}(e^{As'} y) g_{1K}(e^{As'} y) ds' \end{aligned}$$

と計算される. Prop.3.3 と 3.4 より $Dg_{1K} \cdot g_{1K} \in V_K$, $Dg_{1I} \cdot g_{1K} \in V_I$ なので,

$$\begin{aligned}
 x_2 &= e^{At} h^{(2)}(y) + e^{At} \int_0^t e^{-As} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(e^{As}y) Q(g_{1I})(e^{As}y) + g_2(e^{As}y) \right) ds \\
 &\quad + e^{At} \frac{\partial g_{1K}}{\partial x}(y) g_{1K}(y) t^2 + Q \left(\frac{\partial g_{1I}}{\partial x} g_{1K} \right) (e^{At}y) t - e^{At} Q \left(\frac{\partial g_{1I}}{\partial x} g_{1K} \right) (y) t \\
 &\quad - e^{At} \int_0^t \frac{\partial g_{1K}}{\partial x}(y) g_{1K}(y) s ds - e^{At} \int_0^t \left(e^{-As} Q \left(\frac{\partial g_{1I}}{\partial x} g_{1K} \right) (e^{As}y) - Q \left(\frac{\partial g_{1I}}{\partial x} g_{1K} \right) (y) \right) ds \\
 &= e^{At} h^{(2)}(y) + e^{At} \int_0^t e^{-As} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} Q(g_{1I}) + g_2 - \frac{\partial Q(g_{1I})}{\partial x} g_{1K} \right) (e^{As}y) ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} e^{At} \frac{\partial g_{1K}}{\partial x}(y) g_{1K}(y) t^2 + \frac{\partial Q(g_{1I})}{\partial x}(e^{At}y) g_{1K}(e^{At}y) t
 \end{aligned}$$

を得る. R_2 を式 (3.33) で定義すれば,

$$\begin{aligned}
 x_2 &= e^{At} h^{(2)}(y) + e^{At} \int_0^t e^{-As} \mathcal{P}_I(R_2)(e^{As}y) ds + e^{At} \int_0^t e^{-As} \mathcal{P}_K(R_2)(e^{As}y) ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} e^{At} \frac{\partial g_{1K}}{\partial x}(y) g_{1K}(y) t^2 + \frac{\partial Q(g_{1I})}{\partial x}(e^{At}y) g_{1K}(e^{At}y) t \\
 &= e^{At} h^{(2)}(y) + Q \mathcal{P}_I(R_2)(e^{At}y) - e^{At} Q \mathcal{P}_I(R_2)(y) + e^{At} \mathcal{P}_K(R_2)(y) t \\
 &\quad + \frac{1}{2} e^{At} \frac{\partial g_{1K}}{\partial x}(y) g_{1K}(y) t^2 + \frac{\partial Q(g_{1I})}{\partial x}(e^{At}y) g_{1K}(e^{At}y) t
 \end{aligned}$$

となる. $h^{(2)} = Q \mathcal{P}_I(R_2)$ とおけば求める式 (3.32) を得る.

Reference

- [1] V. I. Arnold, Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, Springer-Verlag, New York, 1988
- [2] J. Carr, Applications of Centre Manifold Theory, Springer-Verlag, 1981
- [3] L. Y. Chen, N. Goldenfeld, Y. Oono, Renormalization group theory for global asymptotic analysis, Phys. Rev. Lett. 73 (1994), no. 10, 1311-15
- [4] L. Y. Chen, N. Goldenfeld, Y. Oono, Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory, Phys. Rev. E 54, (1996), 376-394
- [5] H. Chiba, C^1 approximation of vector fields based on the renormalization group method, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. Vol.7, 3 (2008), pp. 895-932
- [6] H. Chiba, Approximation of Center Manifolds on the Renormalization Group Method, J. Math. Phys. (2008)

- [7] H. Chiba, Extension and Unification of Singular Perturbation Methods for ODEs Based on the Renormalization Group Method, (to appear)
- [8] S. N. Chow, C. Li, D. Wang, Normal forms and bifurcation of planar vector fields, Cambridge University Press, 1994
- [9] M. Hirsch, Differential topology, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976
- [10] J. Murdock, Normal forms and unfoldings for local dynamical systems, Springer-Verlag, New York, (2003)
- [11] J. Murdock, Hypernormal form theory: foundations and algorithms, J. Differential Equations, 205 (2004), no. 2, 424-465
- [12] N. T. Zung, Convergence versus integrability in Poincare-Dulac normal form, Math. Res. Lett. 9 (2002), no. 2-3, 217-228