数理解析研究所講究録
第 1647 巻 2009 年 129-135

Geodesic finite automata for Artin monoids of finite type

日立製作所ソフトウェア事業部　渕脇誠 (Makoto Fuchiwaki)
京都大学理学研究科　藤井道彦 (Michihiko Fujii)
数物連携宇宙研究機構　斎藤恭司 (Kyoji Saito)
京都大学数理解析研究所　土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)*

1 イントロダクション

G を有限生成な群またはモノイドとし、Σ を G の（モノイドとしての）有限生成系[1]とする。これらのデータが与えられたとき、growth series $P_{G,\Sigma}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n z^n$ が次により定義される。

$$\gamma_n=\#\{g\in G\mid \exists\sigma_1\in\Sigma,\cdots,\exists\sigma_k\in\Sigma \text{ such that } k\leq n \text{ and } g=\pi(\sigma_1\cdots\sigma_k)\}.$$

ここで、Σ^* は Σ で生成される自由モノイドを意味し、$\pi:\Sigma^*\longrightarrow G$ を自然な全射である。

growth series については [Can, CaW, FP] 等のいくつかの先行研究はあるものの、多くの例が計算されているとは言えず、さらなる研究が望まれている。例えば、$I_2(p)$ 型の Artin 群の標準的生成系に関する growth series でさえ、ごく最近決定された [MM, Theorem 3.1]。

本共同研究は、有限型 Artin モノイドの標準的生成系（共に定義は 3 章を見よ）に関する growth series の表示を目的としたものであり、それは斎藤恭司による limit element の理論に端を発している [Sa1, Chapter 10,Chapter 11]。Epstein たちによる教科書 [Eps] でまとまった記述を見ることが出来るように、G に Σ-上の測地的有限オートマトン（geodesic finite automaton）が存在すれば、それを用いて growth series $P_{G,\Sigma}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n z^n$ を z の有理式として求めることができる（後述の式 (2.1) 参照)。そこで、ランクの小さな例について growth series を計算することを念頭に、有限型 Artin モノイドの標準的生成系に関する測地的有限オートマトンを構成したことを研究集会では報告させていただいた [FFST]。

なお、実際にこの測地的オートマトンをコンピュータで計算し、いくつかの線型代数的な量を得る方法やその計算例を、以下の URL に公開しているので、興味のある方は参照されたい。

`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~saito/FFST/index.html`

2 測地的有限オートマトン

通常のコンピュータが（理想的に無限の記憶領域を持つ）Turing 機械だとするならば、有限オートマトンとは、有限の記憶領域のみを持つコンピュータのことである。なお、本稿では群の場合は扱わないので、第 1 章の G とは、今後モノイドのこととする。

*makoto.fuchiwaki.ob@hitachi.com, mfujii@math.kyoto-u.ac.jp, kyoji.saito@ipmu.jp, tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp, Shunsuke Tsuchioka is supported by Grant-in-Aid for JSPS Research Fellows.

[1]本稿では G がモノイドのときのみ扱うのだが、群のときには $\Sigma=\Sigma^{-1}$ を仮定することが多い。

定義 2.1. 有限オートマトンとは、5 つ組 $M = (Q, \Sigma, \delta, s_0, Y)$ のことである[2]。ここで、

- Q は有限集合で、状態の集合と呼ばれる。
- Σ は有限集合で、アルファベットと呼ばれる。
- $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ は写像で、状態遷移関数と呼ばれる。
- $s_0 \in Q$ は Q の元で、初期状態と呼ばれる。
- $Y \subseteq Q$ は Q の部分集合で、受理状態の集合と呼ばれる。

Remark 2.2. $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ は、次の帰納的な規則で、写像 $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \longrightarrow Q$ に拡張される。

$$\forall q \in Q, \widehat{\delta}(q, \varepsilon) = q, \quad \forall q \in Q, \forall \sigma \in \Sigma, \forall w \in \Sigma^*, \widehat{\delta}(q, \sigma w) = \widehat{\delta}(\delta(q, \sigma), w).$$

ここで、$\varepsilon \in \Sigma^*$ は、Σ^* の（モノイドとしての）単位元である[3]。

定義 2.3. 有限オートマトン M の受理する言語 $L(M)(\subseteq \Sigma^*)$ を、

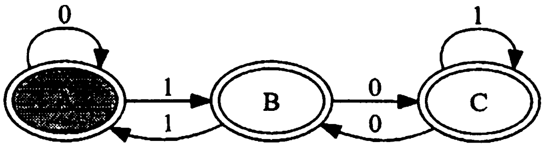
$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(s_0, w) \in Y\}$$

で定義する。部分集合 $L \subseteq \Sigma^*$ が正則言語であるとは、ある Σ-上の有限オートマトン M が存在して、$L = L(M)$ となるときを言う。

例 2.4. $\Sigma = \{0, 1\}, Q = \{A, B, C\}, s_0 = A, Y = \{A\}$ として、写像 $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ を

$$\delta(A, 0) = A, \quad \delta(A, 1) = B, \quad \delta(B, 0) = C, \quad \delta(B, 1) = A, \quad \delta(C, 0) = B, \quad \delta(C, 1) = C$$

と定義する。これらの 5 つ組で定義される有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s_0, Y)$ を考える。



このとき、

$$L(M) = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ は、} x \text{ を 2 進数と思ったとき 3 で割り切れる }\}$$

となることが容易に分かる。有限オートマトンについての感覚を養うために、例えば、何ページにも渡る非常に長い Σ^* の元 $w = 10001010101\cdots\cdots$ が与えられたと想像してみる。このとき、$w = w_1 w_2$ と半分くらいのページのところで w を分割したとすると、$\widehat{\delta}(s_0, w_1 w_2) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(s_0, w_1), w_2)$ だから、$\widehat{\delta}(s_0, w) \in Y$ となるかどうかは、$\widehat{\delta}(s_0, w_1)$ および w_2 のみに依存する。言い換えると、M の初期状態 s_0 が w_1 まででどのように遷移したのかという履歴を M は関知せず、その結果のみが M が持ち得る情報ということになる。これが有限オートマトンが有限と呼ばれる所以である[4]。以下、モノイドについてその word acceptor や測地的有限オートマトンという概念を定義するが、これはこのような意味でモノイドの構造についての有限性を示唆するものである。

---

[2]アルファベットを強調したいときは、Σ-上のオートマトンと呼ぶ。

[3]あるいは、Σ^* を Σ の元を有限個並べた語の集合と見なすとき、空語のことだと言ってもよい。

[4]この説明から、$\Sigma = \{0, 1\}$ としたとき、部分集合 $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}(\subseteq \Sigma^*)$ は正則言語ではないことが想像出来るだろう。もしも $L = L(M)$ となる有限オートマトンが存在するならば、M はどんな大きな n についても 0^n まで語を読んで初期状態を遷移させたときに、0 の個数 n を覚えていなければならないが、これは直感的には不可能である（厳密な証明は [Koz, Lecture 11, Lecture 12] を参照）。このように正則言語であるという条件は、意外ときつい条件であることがわかる。

Remark 2.5. 正則言語の定義は一見人工的なものに感じられるが、いくつかの異なった対象を用いて同値な特徴付けを与えられる、という点において自然である。例えば、部分集合 $L \subseteq \Sigma^*$ が正則言語であることは、適当な正則表現 α が存在して $L = L(\alpha)$ となることと同値である[5] [Koz, Lecture 8]。また左線型文法（または右線型文法）の記述する言語とも同値である [Koz, Homework 5]。また、有限オートマトンを適切な変種（例えば、非決定性有限オートマトンまたは ε-遷移を許した非決定性有限オートマトン）に変更して、正則言語を定義してもよい [Koz, Lecture 3]。

定義 2.6. G を有限生成系 Σ を持つ有限生成モノイドとし、$\pi : \Sigma^* \longrightarrow G$ を自然な全射とする。

1. 部分集合 $L \subseteq \Sigma^*$ が cross-section であるとは、制限 $\pi|_L$ が L から G への集合論的全単射を与えることを言う。

2. 有限オートマトン M が word acceptor であるとは、$L(M)$ が cross-section になることを言う。

3. cross-section L が geodesic であるとは、任意の $w \in L$ について、w が部分集合 $\pi^{-1}(\pi(w))(\subseteq \Sigma^*)$ 中の長さ最小の元であることを言う。

4. word acceptor M が geodesic であるとは、cross-section $L(M)$ が geodesic であることを言う。geodesic word acceptor を測地的有限オートマトンとも呼ぶ。

Remark 2.7. G を有限生成系 Σ を持つ有限生成モノイド、$M = (Q, \Sigma, \delta, s_0, Y)$ を測地的有限オートマトンとする。このとき、spherical growth series $\dot{P}_{G,\Sigma}(z) = (1-z)P_{G,\Sigma}(z)$ は

$$\dot{P}_{G,\Sigma}(z) = {}^t\boldsymbol{v}(E - zT)^{-1}\boldsymbol{u} \tag{2.1}$$

で定まる有理関数と等しいことが容易に分かる [FFST, §6]。ここで、

$$T = (t_{ij} = \#\{a \in \Sigma \mid \delta(i,a) = j\})_{i,j\in Q}(\in \mathsf{Mat}_{|Q|}(\mathbb{Z})), \quad \boldsymbol{v} = (\chi_{\{s_0\}}(i))_{i\in Q}, \quad \boldsymbol{w} = (\chi_Y(i))_{i\in Q}$$

であり、χ_A は A の（暗示された superset に関する）特性関数である。

Remark 2.8. 正則言語 $L \subseteq \Sigma^*$ について、定義より有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s_0, Y)$ で $L = L(M)$ となるものが存在するが、このような M のうち $|Q|$ が最小のものが、同型を除いてただ一つ存在する [Koz, Lecture 15]。よって正則言語 L について、その"the automaton of L" とでも呼ぶべきものを考えることができる。また実用上重要なこととして、勝手な有限オートマトン M（これは非決定性有限オートマトンでもよい）を、受理する言語が同じで、状態数最小の有限オートマトン M' に変更するアルゴリズムが知られている [Koz, Lecture 6, Lecture 14]。

3 有限型 Artin モノイド

Artin ブレイドモノイドの自然な一般化として、Artin モノイド（あるいは Artin-Tits モノイド）が知られている。

定義 3.1. 1. $M = (m_{ij})_{i,j\in I}$ を Coxeter 行列とし[6] [Bou, Chapter 3]、有限集合 $A = \{a_i \mid i \in I\}$ を固定しておく。M に付随する Artin モノイド G_M^+ とは、A を生成系とし、基本関係式を

$$\underbrace{a_i a_j a_i a_j \cdots}_{m_{ij}} = \underbrace{a_j a_i a_j a_i \cdots}_{m_{ji}}$$

に持つモノイドと定義する（ここで i, j は共に I の元を走る）。

[5] ここで正則表現の定義は行わない。正則表現 α に対して、α にマッチする言語 $L(\alpha) \subseteq \Sigma^*$ が定まる。
[6] つまり $m_{ii} = 1$ かつ、$i \neq j$ については $m_{ij} = m_{ji} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ となる行列である。

2. M に付随する Artin 群 G_M は、同一の生成系と関係式によって（群として）定義される。

3. M に付随する Coxeter 群 $\overline{G}_M$ とは、G_M をさらに関係式 $\forall i \in I, a_i^2 = 1$ で割って得られる群である。

4. A を G_M^+ の標準的生成系と呼び、以下、標準的なモノイド $\pi : A^* \longrightarrow G_M^+$ を固定する。

5. 有限型 Artin モノイド（あるいは有限型 Artin 群）とは、対応する Coxeter 群が有限群になるものを言う[7]。

6. $g \in G_M^+$ が square free element であるとは、任意の語 $u, v \in A^*$ および任意の $i \in I$ について $g \neq \pi(ua_ia_iv)$ となることと定義する。square free element のなす集合を QFG_M^+ と書く。

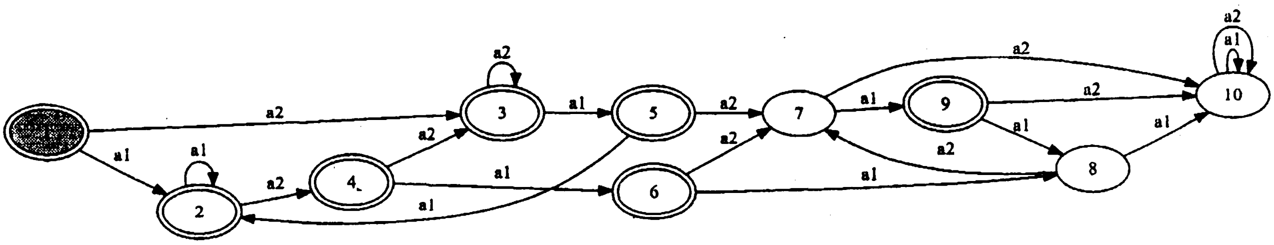
Remark 3.2. 標準的なモノイド射 $G_M^+ \longrightarrow \overline{G}_M$ において、部分集合 QFG_M^+ への制限は集合論的全単射を与えることが知られている [BS]。Charney は有限型 Artin 群 G_M の生成系 $\mathsf{QFG}_M^+ \cup (\mathsf{QFG}_M^+)^{-1} \setminus \{1_{G_M}\}$ に関する測地的有限オートマトンを構成した [Cha]。ここで有限型の場合、標準的なモノイド射 $G_M^+ \longrightarrow G_M$ は単射であることが知られているので [BS]、これを通じて QFG_M^+ を G_M の元と同一視している。Charney のオートマトンを modify することで、次が得られる。

定理 3.3 (FFST,§5). 有限型 Artin モノイド G_M^+ は、標準的生成系 A に関する測地的有限オートマトンを持つ。

例 3.4. 上記の測地的有限オートマトンは、各々の $g \in (\overline{G}_M \setminus \{1_{\overline{G}_M}\}) \cong (\mathsf{QFG}_M^+ \setminus \{1_{G_M}\})$ に対する $\pi^{-1}(g)$ の代表元の取り方（すなわち $\pi \circ \iota = \mathrm{id}$ となるような section $\iota : (\mathsf{QFG}_M^+ \setminus \{1_{G_M}\}) \cong (\overline{G}_M \setminus \{1_{\overline{G}_M}\}) \to A^*$）に依存している。例えば $M = A_2$ として、ι を

$$a_1 \mapsto a_1, \quad a_2 \mapsto a_2, \quad a_1a_2 \mapsto a_1a_2, \quad a_2a_1 \mapsto a_2a_1, \quad a_1a_2a_1 (= a_2a_1a_2) \mapsto a_1a_2a_1.$$

と取ったとする。上記の定理によって構成される測地的有限オートマトンは、以下の通りである。



ここで、塗り潰されたは初期状態を、二重丸は受理状態を意味している[8]。ここで $a_1a_2a_1 \in A^*$ を $a_1a_2a_1 = a_2a_1a_2 \in \overline{G}_M$ の代表元として選んだため、語 $a_1a_2a_1 \in A^*$ は受理され、語 $a_2a_1a_2 \in A^*$ は受理されていないことが確認出来る。さらに、長さ 4 の語で確かめてみるよう。長さ 4 の語は全部で 16 個あるが、各々について受理されるかどうかは以下の表のように決まることが確認できる。

語	$a_1a_1a_1a_1$	$a_1a_1a_1a_2$	$a_1a_1a_2a_1$	$a_1a_1a_2a_2$	$a_1a_2a_1a_1$	$a_1a_2a_1a_2$	$a_1a_2a_2a_1$	$a_1a_2a_2a_2$
受理?	Yes	Yes	Yes	Yes	No	No	Yes	Yes

語	$a_2a_1a_1a_1$	$a_2a_1a_1a_2$	$a_2a_1a_2a_1$	$a_2a_1a_2a_2$	$a_2a_2a_1a_1$	$a_2a_2a_1a_2$	$a_2a_2a_2a_1$	$a_2a_2a_2a_2$
受理?	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	No	Yes	Yes

[7] このような M を有限型 Coxeter 行列という。よく知られているように、これらは以下の型に分類される [Bou] : $A_n(n \geq 1)$, $B_n(n \geq 2)$, $D_n(n \geq 4)$, $E_n(6 \leq n \leq 8)$, F_4, G_2, $H_n(n = 3, 4)$, $I_2(p)(p \geq 5, p \neq 6)$.

[8] すなわち、初期状態は 1 で、受理状態は 1,2,3,4,5,6,9 である。

ここで、G_M^+ において成立する以下の等式

$$a_2a_2a_1a_2 = a_2a_1a_2a_1 = a_1a_2a_1a_1, \quad a_1a_1a_2a_1 = a_1a_2a_1a_2 = a_2a_1a_2a_2$$

より、やはり長さ 4 の G_M^+ の各元の代表元がただ 1 つずつ受理されていることが確認できる。

spherical growth series を求めるために、公式 (2.1) を適用しよう。必要なデータは

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1\\1\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&1&1&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$$

なので、

$$\dot{P}_{G_M^+,A}(z) = {}^t\boldsymbol{v}(E - zT)^{-1}\boldsymbol{u} = \frac{1}{1-2z+z^3}.$$

を得る。同様の計算を、ランクが小さい有限型 Artin モノイドについて実行することができる。

4 Growth series

有限型 Artin モノイドの標準的生成系に関する spherical growth series は、次のように書けることが知られている。

定理 4.1 (Del,Sa1). M を有限型 Coxeter 行列とすると、次が成立する。

$$\dot{P}_{G_M^+,A}(z) = 1/\sum_{J\subseteq I}(-1)^{\#J}z^{|\Delta_J|}.$$

ここで、$\Delta_J \in G_M^+$ は fundamental element と呼ばれる元[9]で、$|\Delta_J|$ はその標準的生成系に関する長さ[10]を意味している。

また一般の Coxeter 行列 M についても $\dot{P}_{G_M^+,A}(z)$ が最近決定された [AN, Sa2]。今のところ、[AN, Corollary 3, Proposition 8] はもっとも広範囲のモノイドに適用可能な growth series の公式で、次の 3 条件を満たすモノイド G に適用可能である：

- G は left-cancellative である。つまり $ax = ay$ ならば $x = y$ である。
- G はその atom[11]からなる有限集合 S から生成される。
- S の部分集合がもしも右公倍元をもつならば、それは最小公倍元を持つ。

特に Dehornoy と Paris によって定義された Garside モノイド [DP] は明らかにこれらの仮定を満たす。従って、Bessis によって [Bes] で定義された dual Artin モノイドにも適用可能で、彼らは A 型および B 型の dual Artin モノイドの（やはり「標準的な」生成系について）spherical growth series を非常に明示的に書き下した。これはルート系に付随した non-crossing partition という組合

[9] これは $\{a_j\}_{j\in J}$ たちの「最小公倍元」とでも呼ぶべきものである。詳しくは [BS, §5] を参照。

[10] これは次の 2 つの数のいずれとも等しい：(A) $\overline{G}_{M|_J}$ の鏡映の個数。(B) $\overline{G}_{M|_J}$ の最長元の長さ。

[11] $x \neq 1$ かつ、$x = ab$ ならば $a = 1$ または $b = 1$ となる元 x のこと。

せ論に関連しており興味深い。これの他の型への拡張や、monoid algebra の Koszul dual algebra の構造を理解することなども興味深い問題と言える。この辺の話題については、論文 [AN] とそこに挙げられている文献を参照されたい。

一方で動機となった斎藤恭司の limit element の理論の観点からは、$\dot{P}_{G^+_M,A}(z) = 1/N_M(z)$ の分母の零点の分布が問題の 1 つになる。根の分布を実際にコンピュータ等を用いて図示してみるとかなり興味深いのだが、数学的な予想として次が提出されている [Sa1]：

- $N_M(1) = 0$ は簡単に分かるが、さらに $N_M(z)/(1-z)$ は $\mathbb{Z}$-上既約な多項式である。
- $N_M(z)$ は $(0,1]$ 区間に丁度 M のランクに等しい個数の相異なる実根を持つ。
- 上記の実根のうち最小のものを r_M とおくと、r_M と異なる任意の $N_M(z)$ の根 x について $|x| > r_M$ が成立する。

なお類似の予想が affine 型の Artin モノイドに関して予想されている [Sa2]。これらを limit element の理論と関連付けながら発展させていくことが今後望まれる。また幾何学的な観点からも、Artin 群の場合はより興味深いと考えられるので、こちらも研究が望まれる[12]。

参考文献

[AN] M. Albenque and P. Nadeau, *Growth function for a class of monoids*, accepted at FPSAC 2009, Linz.

[Bes] D. Bessis, *The dual braid monoid*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **36** (2003), 647–683.

[Big] S.J. Bigelow, *Braid groups are linear*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 471–486.

[Bou] N. Bourbaki, *Groups et algébres de Lie, Chapitres 4,5 et 6. Éléments de Mathèmatique XXXIV*, Paris: Hermann 1968.

[Bro] A. Bronfman, *Growth functions of a class of monoids*, Preprint 2001.

[BS] E. Brieskorn and K. Saito, *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen*, Invent.Math. **17** (1972), 245–271.

[Can] J.W. Cannon, *The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups*, Geom.Dedicata **16** (1984), 123–148.

[CaW] J.W. Cannon and Ph. Wagreich, *Growth functions of surface groups*, Math.Ann. **293** (1992), 239–257.

[Cha] R. Charney, *Geodesic automation and growth functions for Artin groups of finite type*, Math.Ann. **301** (1995), 307–324.

[Del] P. Deligne, *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Invent.Math. **17** (1972), 273–302.

[DP] P. Dehornoy and L. Paris, *Gaussian groups and Garside groups, two generalisations of Artin groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), 569–604.

[Eps] D.B.A. Epstein with J.W. Cannon, D.F. Holt, S.V.F. Levy, M.S. Paterson and W.P. Thurston, *Word Processing in Groups*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1992.

[FP] W.J. Floyd and S.P. Plotnick, *Growth functions on Fuchsian groups and the Euler characteristic*, Invent.Math. **88** (1987), 1–29.

[Koz] D.C. Kozen, *Automata and Computability*, Undergraduate Texts in Computer Science, Springer, 1997.

[Kra] D. Krammer, *Braid groups are linear*, Ann. of Math. (2) **155** (2002), 131–156.

[12] Artin 群については [BS] や [Del] などの研究はあるものの、多くのことが手付かずのままである。例えば Artin ブレイド群が線型群であることさえ、最近確立された [Big, Kra]

[MM] J. Mairesse and F. Mathéus, *Growth series for Artin groups of dihedral type*, Internat.J.Algebra Comput. **16** (2006), 1087–1107.

[FFST] M. Fuchiwaki, M. Fujii, K. Saito and S. Tsuchioka, *Geodesic automata and growth functions for Artin monoids of finite type*, Preprint RIMS-1646, November 2008.

[Sa1] K. Saito, *Limit elements in the configuration algebra for a discrete group*, Preprint RIMS-1593, May 2007.

[Sa2] K. Saito, *Growth functions associated with Artin monoids of finite type*, Proc. Japan Acad., **84** No.10, Ser.A (2008), 179–184.

[Sa3] K. Saito, *Growth functions for Artin monoids*, Preprint RIMS-1657, March 2009.