数理解析研究所講究録
第 1652 巻 2009 年 132-133

一般化 van der Monde 行列の行列式について

北本卓也
TAKUYA KITAMOTO
山口大・教育学部
YAMAGUCHI UNIVERSITY

山口哲
TETSU YAMAGUCHI
サイバネットシステム
CYBERNET SYSTEMS CO., LTD.

1 問題設定

$f_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$ を x の多項式とするとき、次の行列を考える。

$$M=\begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{bmatrix} \tag{1}$$

この行列は $f_i(x)=x^{i-1}$ とした時に、van der Monde 行列となるので、van der Monde 行列の一般化と考えることが出来る。行列の形より、次の補題を容易に見て取れる。

補題 1 *(1)* で行列 M を定義するとき、$Det(M)$ は x_i $(i=1,\cdots,n)$ の交代式である。

補題 1 より、Det(M) は

$$\mathrm{Det}(M)=g(x_1,\cdots,x_n)\prod_{i>j}(x_i-x_j) \tag{2}$$

(ただし、$g(x_1,\cdots,x_n)$ は x_i $(i=1,\cdots,n)$ の対称式) と書くことが出来る。$g(x_1,\cdots,x_n)$ は $x_1,\cdots,x_n$ の対称式なので、基本対称式 $s_1=x_1+\cdots+x_n$, $\cdots$, $s_n=x_1\cdots x_n$ の多項式 $h(s_1,\cdots,s_n)$ で

$$h(s_1,\cdots,s_n)=g(x_1,\cdots,x_n) \tag{3}$$

を満たすものが存在する。(2),(3) より、

$$h(s_1,\cdots,s_n)=\frac{\mathrm{Det}(M)}{\prod_{i>j}(x_i-x_j)} \tag{4}$$

を満たす $h(s_1,\cdots,s_n)$ が存在し、また、このような $h(s_1,\cdots,s_n)$ が求まれば、(2) より Det(M) も計算できる。よって以下では (4) の $h(s_1,\cdots,s_n)$ を求める。

2 $h(s_1,\cdots,s_n)$ の計算

$h(s_1,\cdots,s_n)$ は $s_1,\cdots,s_n$ の多項式であるが、その係数に関して次の定理が成り立つ。

定理 1 $h(s_1,\cdots,s_n)$ を

$$h(s_1,\cdots,s_n) \quad = \quad \sum \mu(e_1,\cdots,e_n) s_1^{e_1}\cdots s_n^{e_n} \tag{5}$$

の形で書き表す時、$\mu(e_1,\cdots,e_n)$ は

$$\mu(e_1,\cdots,e_n) = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\Psi(e_1,\cdots,e_n)} \alpha_{i_1,\cdots,i_n}^{(e_1,\cdots,e_n)} \phi(i_1,\cdots,i_n) \quad \left(\alpha_{i_1,\cdots,i_n}^{(e_1,\cdots,e_n)} \in \mathbf{R}\right) \tag{6}$$

と書ける。ただし、$\Psi(e_1,\cdots,e_n)$ は

$$\Psi(e_1,\cdots,e_n) \stackrel{def}{=} \{ \, (j_1,\cdots,j_n) \mid j_1,\cdots,j_n \in \mathbf{Z},\ j_1+\cdots+j_n = \sum_{i=1}^{n} e_i + \frac{n(n-1)}{2}, 0 \le j_1 < \cdots < j_n, \, \} \tag{7}$$

で定義される集合であり、$\phi(i_1,\cdots,i_n)$ は

$$\phi(i_1,\cdots,i_n) \stackrel{def}{=} Det\left(\begin{bmatrix} w_{1,i_1} & w_{2,i_1} & \cdots & w_{n,i_1} \\ w_{1,i_1} & w_{2,i_2} & \cdots & w_{n,i_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{1,i_n} & w_{2,i_n} & \cdots & w_{n,i_n} \end{bmatrix}\right) \tag{8}$$

で定義される $w_{l,m}$ $(l, m \in \mathbf{Z})$ の多項式である。

上の定理の $\alpha_{i_1,\cdots,i_n}^{(e_1,\cdots,e_n)}$ $(\in \mathbf{R})$ は $w_{i,j}$ に無関係が定数なので、$f_i(x)$ が与えられる前に計算しておくことが可能である。よって $h(s_1,\cdots,s_n)$ を計算するための次のアルゴリズムを得る（以下では $\alpha_{i_1,\cdots,i_n}^{(e_1,\cdots,e_n)}$ はあらかじめ計算されていると仮定する)。

⟨1⟩ 式 (5) の和に現れる可能性のある全ての指数 $(e_1,\cdots,e_n)$ に対して以下の操作を行う。

⟨1.1⟩ $\Psi(e_1,\cdots,e_n)$ を (7) より求める。

⟨1.2⟩ $\Psi(e_1,\cdots,e_n)$ の各要素 $(j_1,\cdots,j_n)$ に対し、$\phi(i_1,\cdots,i_n)$ を (8) より求める。

⟨1.3⟩ $\mu(e_1,\cdots,e_n)$ を (6) より求める。

⟨2⟩ $h(s_1,\cdots,s_n)$ を (5) より求める。

3 結論

van der Monde 行列を一般化した行列の行列式のアルゴリズムを示した。提案したアルゴリズムは、記号を含む行列の行列式の計算を必要としないため、直接的な方法よりも計算効率が良い。参考文献 [1],[2] では本稿で示した形で一般化された van der Monde 行列が現れ、その行列式が代数的 Riccati 方程式の求解に必要になっている（[1],[2] では状態フィードバックで実現可能な最適 H_∞, H_2 ノルムの計算法が述べられている)。よってこれらの問題の求解に本稿のアルゴリズムは有用である。

参 考 文 献

[1] T. Kitamoto and T. Yamaguchi, "The optimal H_∞ norm of a parametric system achievable using a static feedback controller," *The IEICE Trans. Funda.*, Vol. E90-A, No. 11, pp. 2496–2509, 2007.

[2] 北本、山口 "パラメータを含むシステムの LQ 制御問題について," 電子情報通信学会論文誌, 掲載予定.