数理解析研究所講究録
第 1670 巻 2009 年 1-9

Volume-preserving diffeomorphisms and mass flow toward ends

矢ケ崎 達彦 (Tatsuhiko Yagasaki)
京都工芸繊維大学 工芸科学研究科
(Kyoto Institute of Technology)

論文 [10] において，筆者は，非コンパクト多様体上での 体積形式に対する Moser の定理 のパラメータ版，及び，S. R. Alpern と V. S. Prasad [1] の導入したエンド・チャージ 準同型 のセクションの存在 についての結果を得た。この論説では，これらの結果の概要を解説する。

1. Moser の定理の 非コンパクト多様体上 への拡張

M を 向き付けられた 連結 n 次元 (可分距離化可能) C^∞ 多様体 とし，ω を M 上の正の体積形式 とする。$\mathcal{D}(M)$ で M の 微分同相写像全体 のなす群を表し, コンパクト-開位相を導入する。$\mathcal{D}^+(M)$ は 向きを保つ M の 微分同相写像全体 の成す部分群, $\mathcal{D}(M;\omega)$ は ω を保つ M の 微分同相写像全体 の成す部分群 をそれぞれ表す。まず，群 $\mathcal{D}^+(M)$ と $\mathcal{D}(M;\omega)$ の間の関係を考察する。

$\mathcal{V}^+(M)$ で M 上の正の体積形式全体の成す空間に コンパクト-開 C^∞ 位相 を入れたものを表す。$m \in (0,\infty]$ に対して，$\mathcal{V}^+(M,m) = \{\mu \in \mathcal{V}^+(M) \mid \mu(M) = m\}$ と置く。

群 $\mathcal{D}^+(M)$ は $\mathcal{V}^+(M,m)$ 上 $h\cdot\mu = h_*\mu \; (= (h^{-1})^*\mu)$ により連続に作用し，$\omega \in \mathcal{V}^+(M,m)$ に対して, 部分群 $\mathcal{D}(M;\omega)$ は，この作用における ω の固定部分群と一致する。

M がコンパクトのとき，体積形式に関する Moser の定理 [7] は，この作用が推移的であることを主張している。Moser の定理 の証明は 自然にパラメータ版に拡張され，これにより，この作用の軌道写像は連続なセクションを持つ事になる。

これらの結果の C^0-版は，位相多様体上の good な Radon 測度に関して定式化され，von Neumann-Oxtoby-Ulam の定理 [8] 及び A. Fathi の結果 [4] として知られている。

Moser の定理 及び von Neumann-Oxtoby-Ulam の定理 の 非コンパクト多様体への拡張は，R. E. Greene - K. Shiohama [5] 及び R. Berlanga - D. B. A. Epstein [3] によって得られた。さらに，R. Berlanga は [2] において 非コンパクト多様体での von Neumann-Oxtoby-Ulam の定理の パラメータ版 を得た。この結果に触発されて，筆者は [10] において，非コンパクト多様体での Moser の定理の パラメータ版 を得た。定理を正確に述べるには，多様体 M のエンドに関する情報を取り込む必要がある (cf. [1, 2, 5])。

M のエンドの成す空間 E_M は 0 次元のコンパクト距離化可能な空間であり，M のエンドコンパクト化 $\overline{M}$ は，このエンド空間 E_M を M に適当に付加して得られる。任意の $h \in \mathcal{D}(M)$ は，自然に $\overline{M}$ の 同相写像 $\overline{h}$ に拡張される。$\mu \in \mathcal{V}^+(M)$ に対して，エンド

$e \in E_M$ が μ-有限 であるとは，$\overline{M}$ における e のある近傍 U があって，$\mu(U \cap M) < \infty$ となることである。E_M^μ で μ-有限エンド全体の成す E_M の部分空間を表す。

さて，E_M の開集合 F に対して，$\mathcal{D}^+(M)$ の部分群

$$\mathcal{D}^+(M;F) = \{h \in \mathcal{D}^+(M) \mid \overline{h}(F) = F\}$$

を考える。さらに, $\mathcal{V}^+(M)$ の次の部分集合を考える。

$$\mathcal{V}^+(M;F)_{ew} = \{\mu \in \mathcal{V}^+(M) \mid E_M^\mu = F\}, \quad \mathcal{V}^+(M;m,F)_{ew} = \mathcal{V}^+(M;F) \cap \mathcal{V}^+(M;m),$$

R. Berlanga [2] に基づいて，これらの部分集合には，次で定義される 有限エンド 弱 C^∞-位相 ew を入れる。この位相は，次の条件を満たす $\mathcal{V}^+(M;F)$ 上の最も弱い位相として定義される：

(i) 恒等写像 $id : \mathcal{V}^+(M;F) \to \mathcal{V}^+(M;F)_w$ は連続,

(ii) コンパクト台を持つ 任意の連続関数 $f : M \cup F \to \mathbb{R}$ に対して，次の関数は連続：

$$\Phi_f : \mathcal{V}^+(M;F) \to \mathbb{R} : \Phi_f(\mu) = \int_M f\mu.$$

この位相は，F に於ける体積要素の振る舞いを制約するので，$C \in \mathcal{B}_c(M)$ かつ $E_C \subset F$ ならば，関数

$$\Phi_C : \mathcal{V}^+(M;F)_{ew} \to \mathbb{R},\ \Phi_C(\mu) = \mu(C)$$

は連続になる。

群 $\mathcal{D}^+(M;F)$ は $\mathcal{V}^+(M;m,F)_{ew}$ 上 $h{\cdot}\mu = h_*\mu$ によって連続に作用する。$\omega \in \mathcal{V}^+(M;m,F)_{ew}$ に対して 部分群 $\mathcal{D}(M;\omega)$ が ω の固定部分群となることは，以前と同様である。

R. E. Greene - K. Shiohama [5] では，この作用の推移性が示されている。我々の結果は，このパラメータ版であり，最も一般的に次の形で述べられる。$\mathcal{D}_\partial(M) = \{h \in \mathcal{D}(M) \mid h = id \text{ on } \partial M\}$ とし, $\mathcal{D}_\partial(M)_1$ は，$\mathcal{D}_\partial(M)$ の id_M の 弧状連結成分 を表す。

定理 1. P を任意の位相空間とし，$\mu, \nu : P \to \mathcal{V}^+(M;F)_{ew}$ は連続写像で $\mu_p(M) = \nu_p(M)$ $(p \in P)$ を満たすとする。このとき，連続写像 $h : P \to \mathcal{D}_\partial(M)_1$ が存在して，各 $p \in P$ に対して 次が成り立つ:

(1) $h_{p*}\mu_p = \nu_p$,　(2) $\mu_p = \nu_p$ ならば $h_p = id_M$.

系 1. $\omega \in \mathcal{V}^+(M)$ とし，$m = \omega(M)$, $F = E_M^\omega$ と置く。

(1) 軌道写像 $\pi_\omega : \mathcal{D}^+(M;F) \to \mathcal{V}^+(M;m,F)_{ew}$, $\pi_\omega(h) = h_*\omega$ は 連続なセクション $\sigma : \mathcal{V}^+(M;m,F)_{ew} \to \mathcal{D}_\partial(M)_1$ で $\sigma(\omega) = id_M$ となるものをもつ。

(2) (i) $\mathcal{D}^+(M;F) \cong \mathcal{V}^+(M;m,F)_{ew} \times \mathcal{D}(M;\omega)$.

(ii) $\mathcal{D}(M;\omega)$ は $\mathcal{D}^+(M;F)$ の 強変形レトラクト になる。

2. エンド・チャージ 準同型 のセクションの存在について

次に，群 $\mathcal{D}(M;\omega)$ の内部構造に目を向けよう。引き続き，M を 向き付け可能な 連結 非コンパクト n 次元 C^∞ 多様体 とし，ω を M 上の 体積形式 とする。

S. R. Alpern and V. S. Prasad [1] は,「体積保存 微分同相写像 による エンドに向かう体積移動」を測る ため，エンド・チャージ 準同型

$$c^\omega : \mathcal{D}_{E_M}(M;\omega) \to \mathcal{S}(M;\omega)$$

を定義した。ここで，$\mathcal{D}_{E_M}(M;\omega) = \{h \in \mathcal{D}(M;\omega) \mid \overline{h} = id \text{ on } E_M\}$ であり，$\mathcal{S}(M;\omega)$ は，次で定義される M の エンド・チャージ の成す線形位相空間である。E_M の 閉かつ開部分集合 全体 の成す集合体を $\mathcal{Q}(E_M)$ で表す。M の エンド・チャージ とは，$\mathcal{Q}(E_M)$ 上の有限加法的な符号付き測度，すなわち，関数 $c : \mathcal{Q}(E_M) \to \mathbb{R}$ で 次の条件を満たすもののことである：

$$c(F \cup G) = c(F) + c(G) \quad \text{for} \quad F, G \in \mathcal{Q}(E_M) \quad \text{with} \quad F \cap G = \emptyset.$$

M の エンド・チャージ 全体 $\mathcal{S}(M)$ は, 弱位相 により 実線形位相空間 になる。この弱位相 (or 積位相) は，次の条件を満たす最も弱い位相である：各 $F \in \mathcal{Q}(E_M)$ に対して，関数

$$\mathcal{S}(M) \to \mathbb{R} : \ c \mapsto c(F)$$

は連続。$\mathcal{S}(M;\omega)$ は，次で定義される $\mathcal{S}(M)$ の部分線形位相空間である:

$$\mathcal{S}(M;\omega) = \{c \in \mathcal{S}(M) \mid \text{(i) } c(E_M) = 0, \ \text{(ii) } c(F) = 0 \ (F \in \mathcal{Q}(E_M), F \subset E_M^\omega)\}.$$

各 $h \in \mathcal{D}_{E_M}(M;\omega)$ に対して，エンド・チャージ $c_h^\omega \in \mathcal{S}(M;\omega)$ は 次式で定義される: $F \in \mathcal{Q}(E_M)$ に対して，M の閉集合 C で $\mathrm{Fr}_M C$ がコンパクトかつ C のエンド E_C が F と一致するものが存在する。

$$c_h^\omega(F) = \omega(C - h(C)) - \omega(h(C) - C),$$

と定義すると，この値は，C の選び方に依らず，F のみで定まる。この量は，h によって C の内部へ，最終的に F に流れ込む (符号付きの) 体積の総量を表している。

エンド・チャージ 準同型 は，もちろん，測度保存同相群に対しても定義される。筆者は, [9] において，測度保存同相群 上の エンド・チャージ 準同型 が 連続なセクション を持つことを示している。次の定理は，その C^∞ 版である。

定理 2. P を 任意の位相空間 とし，$\mu : P \to \mathcal{V}^+(M)$ と $a : P \to \mathcal{S}(M)$ は連続写像で，各 $p \in P$ に対して，$a_p \in \mathcal{S}(M;\mu_p)$ が成り立つとする。このとき，連続写像 $h : P \to \mathcal{D}_\partial(M)_1$ が存在して，各 $p \in P$ に対して 次が成り立つ：

$$(1)\ h_p \in \mathcal{D}_\partial(M;\mu_p)_1, \quad (2)\ c_{h_p}^{\mu_p} = a_p, \quad (3)\ a_p = 0 \text{ ならば } h_p = id_M.$$

系 2. $\omega \in \mathcal{V}^+(M)$ とする。

(1) エンド・チャージ 準同型 $c^\omega : \mathcal{D}_{E_M}(M;\omega) \to \mathcal{S}(M;\omega)$ は，連続なセクション $s : \mathcal{S}(M;\omega) \to \mathcal{D}_\partial(M;\omega)_1$ で $s(0) = id_M$ となるものを持つ。

(2) (i) $\mathcal{D}_{E_M}(M;\omega) \cong \ker c^\omega \times \mathcal{S}(M;\omega)$.

(ii) $\ker c^\omega$ は $\mathcal{D}_{E_M}(M;\omega)$ の 強変形レトラクト になる。

群 $\ker c^\omega$ は，部分群として $\mathcal{D}^c(M;\omega) = \{h \in \mathcal{D}(M;\omega) \mid h$ は コンパクト台を持つ $\}$ を含んでいる。

問題 1. 群 $\ker c^\omega$ と 部分群 $\mathcal{D}^c(M;\omega)$ の間の位相的な関係を明らかにせよ。

筆者は [11] において, $n = 2$ の場合を考察している。

3. コンパクト多様体に対する Moser の定理

定理 3 の証明の最終ステップでは，M がコンパクト多様体に分割された状況で，各コンパクトブロックに対して Moser の定理が用いられる。M が境界を持つとき，このコンパクトブロックは余次元 2 のコーナー $[0,\infty)^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ を持つことになる。そこで，ここでは，次の形の Moser の定理 を 補題 1 と共に適応する。

M を 向き付けられた n 次元 C^∞ 多様体 とし，余次元 2 のコーナーを持っても良いとする。カラー $E = S \times [a,b]$ に関して次の記号を用いる: $A \subset S$ 及び 関数 $\delta, \varepsilon : S \to [a,b]$ に対して
$$E_A = \{(x,t) \in E \mid x \in A\}$$
$$E_A^+ = \{(x,t) \in E_A \mid t \geq 0\}, \quad E_A^- = \{(x,t) \in E_A \mid t \leq 0\}$$
$$E_A[\delta,\varepsilon] = \{(x,t) \in E_A \mid t \in [\delta(x), \varepsilon(x)]\}.$$

定理 3. M は 向き付けられた コンパクト連結 n 次元 C^∞ 多様体で，コーナーを持っても良いとする。$E = \partial M \times [0,1]$ を ∂M のカラー近傍とする。さらに，$\mu, \nu : P \to \mathcal{V}^+(M)$ 及び $\varepsilon : P \to (0, 1/2)$ は連続写像で 各 $p \in P$ に対して次の条件を満たすとする：
$$\text{(i)} \ \ \mu_p(M) = \nu_p(M) \quad \text{and} \quad \text{(ii)} \ \ \mu_p = \nu_p \text{ on } E[0, 2\varepsilon_p].$$
このとき，連続写像 $\varphi : P \to \mathcal{D}_\partial(M)_1$ が存在して，各 $p \in P$ に対して次が成り立つ：
$$(1)\ \varphi_{p_*}\mu_p = \nu_p, \quad (2)\ \varphi_p = id_M \text{ on } E[0,\varepsilon_p], \quad (3)\ \mu_p = \nu_p \text{ ならば } \varphi_p = id_M.$$

次の補題は [6, Lemma A2] の パラメータ版であり，定理 4 を適応する前に，前もって定理 4 の条件 (ii) を達成するために用いられる。

補題 1. M を 向き付けられた n 次元 C^∞ 多様体とし，境界を持っても良いとする。

(1) (S, E) は 次のいずれかとする：

(a) S は M の $(n-1)$ 次元 proper 部分多様体 で，$E = S \times [-1,1]$ は S の M における 両側カラー近傍

(b) $S=\partial M$, $E=\partial M\times[0,1]$ (∂M の M における カラー近傍)

(2) K を S の閉部分集合, U を S における K の近傍とする。

このとき，任意の連続写像 $\mu,\nu: P\to\mathcal{V}^+(M)$ に対して，連続写像 $\varphi: P\to\mathcal{D}_{S\cup(M-E_U)}(M)_1$ と $\varepsilon: P\to C^\infty(S,(0,1))$ が存在して，各 $p\in P$ に対して 次が成り立つ：

(i) $\varphi_{p_*}\mu_p=\nu_p$ on $E_K[-\varepsilon_p,\varepsilon_p]$.

(ii) 各 $x\in S$ に対して (a) $\varphi_p(E_x^\pm)=E_x^\pm$ and (b) $\mu_p=\nu_p$ on $E_x^\pm$ ならば $\varphi_p=id$ on $E_x^\pm$. 特に, $\mu_p=\nu_p$ on $E^\pm$ ならば $\varphi_p=id$ on $E^\pm$ となる。ただし，(1)(b) の場合に，(i) では $E_K[0,\varepsilon_p]$ に置き換え，(ii) では $\pm$ を省く。

4. イソトピー による 体積移動

この節では，多様体上で与えられた体積移動データを 微分同相写像で実現するための基本補題を得る。

M を 向き付けられた 連結な n 次元 C^∞ 多様体とし，コーナーを持っても良いとする。d を M の エンドコンパクト化 $\overline{M}$ 上の任意の距離関数とする。一般に，位相空間 Y に対して, $\mathcal{K}(Y)$ は Y の コンパクト部分集合 全体の集合 を表し，$\mathcal{C}(Y)$ は Y の 連結成分全体の集合 を表す。

まず，M が 次の分割 $M=L\cup_S N$ を持つ場合を考える：

(i) L と N は，M の連結な n 次元 C^∞ 部分多様体,

(ii) $S=L\cap N=\mathrm{Fr}_M L=\mathrm{Fr}_M N$ で，S は M のコンパクトな $(n-1)$ 次元の proper C^∞ 部分多様体

補題 2. 連続写像 $f:(-\infty,\infty)\to\mathcal{D}_\partial^c(M)_1^*$ で，次の条件を満たすものが存在する：

(1) $f_0=id$, $f_s(L)\subsetneqq f_t(L)$ $(s<t)$,

(2) M の (ある C^∞ 級 三角形分割 に関する) 部分多面体 F で，次の条件を満たすものが存在する：

  (i) $\dim F=n-1$ かつ $\partial M\subset F$,

  (ii) 写像 f は，$M-F$ に 局所共通 コンパクト台を持つ (すなわち, 任意の $T>0$ に対して ある $K\in\mathcal{K}(M-F)$ が存在して，$\mathrm{supp}\, f_t\subset K$ $(t\in[-T,T])$),

  (iii) 任意の $K\in\mathcal{K}(M-F)$ に対して，ある $-\infty<s<t<\infty$ が存在して $K\subset f_t(L)-f_s(L)$,

(3) $\{f_t\}_{-\infty<t<\infty}$ は $d|_M$ に関して 同等連続。

この補題のイソトピー f_t は，L, N を部分多面体として含む M の C^∞ 級 三角形分割 τ をとり，τ の 双対 1-骨格 の適当な 極大樹 T を選んで，この 樹 T に沿って $t\geq 0$ では L で $N-F$ の部分を，$t\leq 0$ では，N で $L-F$ の部分を 各々 engulfing することで得られる。

Engulfing isotopy $h_t = f_t^{-1}$ を用いて，M の 体積移動イソトピー H が構成される。

$$\mathcal{W}^+(M) \;=\; \big\{(\mu, a) \in \mathcal{V}^+(M) \times \mathbb{R} \;\big|\; a \in (-\mu(L), \mu(N))\big\}$$

と置く。これは $\mathcal{V}^+(M) \times \mathbb{R}$ の開集合である。

補題 3. 連続写像　$H : \mathcal{W}^+(M) \to \mathcal{D}^c_\partial(M)^*_1$ で，次の性質を持つものが存在する。

(i) H は $\mathrm{Int}\, M$ に 局所共通 コンパクト台 を持つ。

(ii) $\{H_{(\mu,a)}{}^{-1}\}_{(\mu,a)}$ は，$d|_M$ に関して 同等連続。

(iii) $J^\mu(H^{-1}_{(\mu,a)}(L), L) = a$.　　(iv) $H_{(\mu,a)} = id_M$ iff $a = 0$.

ただし, 量 J^μ は 次で定義される：$A, B \in \mathcal{B}(M)$, $\mu((A-B)\cup(B-A)) < \infty$ のとき

$$J^\mu(A, B) = \mu(A - B) - \mu(B - A) \;\in\; \mathbb{R}.$$

補題 3 は，体積移動に関する 次の基本補題に拡張される：N を M の連結 n 次元 C^∞ 部分多様体 とし，$\mathrm{Fr}_M N$ はコンパクトとする。$N^c = cl(M-N)$ と置き，$\mathcal{C}(N^c) = \{A_1, \cdots, A_m\}$ とする。

補題 4. $\mu : P \to \mathcal{V}^+(M)$ は連続写像，$a(i) : P \to \mathbb{R}$　$(i = 0, 1, \cdots, m)$ は 連続関数で，次の条件を満たすとする。

(a) $\sum_{i=0}^m a(i) = 0$　and　(b) $a(0) > -\mu(N)$, $a(i) > -\mu(A_i)$ $(i = 1, \cdots, m)$.

このとき，連続写像 $\varphi : P \to \mathcal{D}^c_\partial(M)^*_1$ で 次の条件を満たすものが存在する：

(1)　(i) φ は $\mathrm{Int}\, M$ に 局所共通 コンパクト台 を持つ。

(ii) 族 $\{\varphi_p^{-1}\}_p$ は $d|_M$ に関して 同等連続。

(2) (i) $J^\mu(\varphi^{-1}(N), N) = a(0)$　and　(ii) $J^\mu(\varphi^{-1}(A_i), A_i) = a(i)$ $(i = 1, \cdots, m)$,

(3) $p \in P$ かつ $a_p(i) = 0$ $(i \in \{1, \cdots, m\})$ ならば $\varphi_p = id_M$.

この基本補題は，定理 1, 2 の証明において，エンドに向かう体積移動データを逐次実現していくために用いられる。

5. エンドに向かう体積移動データ と その微分同相写像による実現

この節を通して，M を 向き付けられた 連結 非コンパクト な n 次元 C^∞ 多様体とし，境界を持っても良いとする。$\overline{M}$ 上の 任意の距離関数 d を固定する。

$\mu, \nu : P \to \mathcal{V}^+(M)$ を与えられた連続写像とする。$C^0(P)$ は 連続関数 $\alpha : P \to \mathbb{R}$ 全体の集合 を表し, $\mathcal{D}$ は 連続写像 $f : P \to \mathcal{D}_\partial(M)_1$ 全体の族 を表す。

$\mathcal{F}(M)$ を M の n 次元 連結 C^∞ 部分多様体 N で $\mathrm{Fr}_M N$ が コンパクトであるようなもの全体の族とし, $\mathcal{F}_c(M) = \{N \in \mathcal{F}(M) \mid N : \mathrm{compact}\}$ と置く。

さらに, 族 $\mathcal{N}(M)$ と $\mathcal{N}^{(2)}(M)$ を 次で定める。

- $\mathcal{N}(M)$:　M のコンパクト連結 n 次元 C^∞ 部分多様体 N で 各 $C \in \mathcal{C}(N^c)$ は 非コンパクト となるもの全体

$$\circ\ \mathcal{N}^{(2)}(M) = \left\{ (K,L) \in \mathcal{N}(M)^2 \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & K \subset \mathrm{Int}_M L \\ \text{(ii)} & \text{各 } A \in \mathcal{C}(K^c) \text{ に対して } L \cap A \text{ は 連結} \end{array} \right\}.$$

5.1. **エンドに向かう体積移動データ.**

まず，定理 1, 2 を証明する際に現れる エンドに向かう体積移動データ の性質を抽象化する。

定義 1. 次のような組 $(\mathcal{F}, a)$ を「エンドに向かう体積移動データ」と呼ぶことにする：

- $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}(M)$ の 部分族
- $a : \mathcal{D}^2 \times \mathcal{F} \to C^0(P)$ は 写像

これらは，次の条件を満たす：

$(*_0)$ $\mathcal{F}_c(M) \subset \mathcal{F}$ かつ $\mu(A) = \nu(A) = \infty$ $(A \in \mathcal{F}(M) - \mathcal{F})$.

$(*_1)$ $a(f,g;C) \in (-\mu(f^{-1}(C)), \nu(g^{-1}(C)))$ $(f,g \in \mathcal{D},\ C \in \mathcal{F})$.

$(*_2)$ $$\begin{array}{l} a(f_2,g;C) = a(f_1,g;C) + J^\mu(f_1^{-1}(C), f_2^{-1}(C)) \\ a(f,g_2;C) = a(f,g_1;C) - J^\nu(g_1^{-1}(C), g_2^{-1}(C)) \end{array} \quad (f, f_1, f_2,\ g, g_1, g_2 \in \mathcal{D},\quad C \in \mathcal{F}).$$

$(*_3)$ もし $(K,L) \in \mathcal{N}^{(2)}(M)$, $A \in \mathcal{C}(K^c)$ かつ $\mathcal{C}(A \cap L^c) \subset \mathcal{F}$ ならば,

$A \in \mathcal{F}$ かつ $a(f,g;A \cap L) + \sum_{B \in \mathcal{C}(A \cap L^c)} a(f,g;B) = a(f,g;A)$ $(f,g \in \mathcal{D})$.

$(*_4)$ $M \in \mathcal{F}$ のとき $a(id_M, id_M; M) = 0$.

例 1. 定理 1, 2 を証明する際に実現すべき「エンドに向かう体積移動データ」は，(定理 1, 2 の記号の下で) 次で与えられる。

定理 1: $(\mathcal{F}, \widetilde{a})$:

(i) $\mathcal{F} = \{ C \in \mathcal{F}(M) \mid E_C \subset F \}$,

(ii) $\widetilde{a} : \mathcal{D}^2 \times \mathcal{F} \to C^0(P)$: $\widetilde{a}(f,g;C) = \nu(g^{-1}(C)) - \mu(f^{-1}(C)) = (g_*\nu)(C) - (f_*\mu)(C)$.

定理 2: $(\mathcal{F}, \widetilde{a})$

(i) $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$,

(ii) $\widetilde{a} : \mathcal{D}^2 \times \mathcal{F} \to C^0(P)$: $\widetilde{a}(f,g;C) = a(E_C) - J^\mu(f^{-1}(C), g^{-1}(C))$.

5.2. **データの微分同相写像による実現.**

補題 5. エンドに向かう体積移動データ $(\mathcal{F}, a)$ に対して，次の条件を満たす 列 (K_k, L_k, f^k, g^k) $(k = 1, 2, \cdots)$ が存在する：(ただし, $L_0 = \emptyset$, $f^0 = g^0 \equiv id_M$ と置く.)

$(1)_k$ $K_k, L_k \in \mathcal{N}(M)$ and $(L_{k-1}, K_k), (K_k, L_k) \in \mathcal{N}^{(2)}(M)$.

$(2)_k$ (i) $f^k, g^k : P \to \mathcal{D}^c_\partial(M)^*_1$ は連続写像.

(ii) $f^k = \varphi^k f^{k-1}$, $g^k = \psi^k g^{k-1}$ と表される。ただし, $\varphi^k : P \to \mathcal{D}^c_{\partial \cup L_{k-1}}(M)^*_1$, $\psi^k : P \to \mathcal{D}^c_{\partial \cup K_k}(M)^*_1$ は ある連続写像。

$(3)_k$ (i) f^k, g^k は $\mathrm{Int}\, M$ に 局所共通 コンパクト台 を持つ.

(ii) $\{(f_p^k)^{-1}\}_p$, $\{(g_p^k)^{-1}\}_p$ は $d|_M$ に関して 同等連続.

$(4)_k$ (i) $\operatorname{diam} A \le 2^{-k}$, $\operatorname{diam}(g^{k-1})^{-1}(A) \le 2^{-k}$ $(A \in \mathcal{C}(K_k^c))$.

(ii) $\operatorname{diam} B \le 2^{-k}$, $\operatorname{diam}(f^k)^{-1}(B) \le 2^{-k}$ $(B \in \mathcal{C}(L_k^c))$.

$(5)_k$ (i) $a(f^k, g^{k-1}; C) = 0$ $\big(C \in \mathcal{C}(cl(K_k - L_{k-1})) \cup (\mathcal{C}(K_k^c) \cap \mathcal{F})\big)$

(ii) $a(f^k, g^k; C) = 0$ $\big(C \in \mathcal{C}(cl(L_k - K_k)) \cup (\mathcal{C}(L_k^c) \cap \mathcal{F})\big)$

$(6)_k$ $p \in P$ かつ $a_p(id_M, id_M; C) = 0$ $(C \in \mathcal{F})$ ならば $f_p^k = g_p^k = id_M$.

補題 6. 補題 の列 $(f^k)_k$, $(g^k)_k$ は, それぞれ, $d|_M$ 一様に ある連続写像 $f, g : P \to \mathcal{D}_\partial(M)_1$ に収束する。写像 f, g は 次の条件を満たす：

(1) $f^{-1}|_{L_k} = (f^k)^{-1}|_{L_k}$, $g^{-1}|_{K_k} = (g^{k-1})^{-1}|_{K_k}$ $(k \ge 1)$.

(2) $a(f, g; C) = 0$ が, 次の条件を満たす 任意の $C \in \mathcal{F}$ に対して成り立つ：
ある $k \ge 1$ に対して, $C \in \mathcal{C}(K_k^c) \cup \mathcal{C}(L_k^c) \cup \mathcal{C}(cl(K_k - L_{k-1})) \cup \mathcal{C}(cl(L_k - K_k))$

(3) $p \in P$ かつ $a_p(id_M, id_M; C) = 0$ $(C \in \mathcal{F})$ ならば, $f_p = g_p = id_M$.

5.3. **定理 1, 2 の証明.**

例 1 において与えられた エンドに向かう体積移動データ $(\mathcal{F}, \widetilde{a})$ に対して, 補題 により列 $(K_k, L_k, f^k, g^k)_{k\ge1}$ とその極限写像 $f, g : P \to \mathcal{D}_\partial(M)_1$ が得られる。特に,

$$(f_*\mu)(C) = (g_*\nu)(C) \quad (C \in \mathcal{C}(cl(K_k - L_{k-1})) \cup \mathcal{C}(cl(L_k - K_k)),\ k \ge 1)$$

が成り立つので, 定理 3 + 補題 1 により, 連続写像 $\chi : P \to \mathcal{D}_\partial(M)_1$ で 次の条件を満たすものが得られる：

$$\text{(i) } \chi_*(f_*\mu) = g_*\nu \quad \text{and} \quad \text{(ii) } p \in P \text{ で } (f_p)_*\mu_p = (g_p)_*\nu_p \text{ ならば } \chi_p = id_M.$$

最後に, 望む写像 h は 次式で定義される:

$$h : P \to \mathcal{D}_\partial(M)_1,\ \ h_p = g_p^{-1}\chi_p f_p \ \ (p \in P)$$

References

[1] S. R. Alpern and V. S. Prasad, Typical dynamics of volume-preserving homeomorphisms, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, (2001).

[2] R. Berlanga, Groups of measure-preserving homeomorphisms as deformation retracts, *J. London Math. Soc. (2)* 68 (2003) 241 - 254.

[3] R. Berlanga and D. B. A. Epstein, Measures on sigma-compact manifolds and their equivalence under homeomorphism, *J. London Math. Soc. (2)* 27 (1983) 63 - 74.

[4] A. Fathi, Structures of the group of homeomorphisms preserving a good measure on a compact manifold, *Ann. scient. Ẽc. Norm. Sup. (4)* 13 (1980) 45 - 93.

[5] R. E. Greene and K. Shiohama, Diffeomorphisms and volume-preserving embeddings of noncompact manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 255 (1979) 403 - 414.

[6] D. McDuff, On groups of volume-preserving diffeomorphisms and foliations with transverse volume form, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 43 (1981) 295 - 320.

[7] J. Moser, On the volume elements on a manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120 (1965) 286 - 294.

[8] J. Oxtoby and S. Ulam, Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity, *Ann. of Math.*, 42 (1941) 874 - 920.

[9] T. Yagasaki, Measure-preserving homeomorphisms of noncompact manifolds and mass flow toward ends, *Fund. Math.*, 197 (2007) 271 - 287.

[10] T. Yagasaki, Groups of volume-preserving diffeomorphisms of noncompact manifolds and mass flow toward ends, to appear in *Trans. AMS* (math.GT/0805.3552)

[11] T. Yagasaki, Homotopy types of diffeomorphism groups of noncompact 2-manifolds, preprint (math.GT/0109183v2 (revised in 20 Jan 2009))

Tatsuhiko Yagasaki

Division of Mathematics,
Department of Comprehensive Science,
Faculty of Engineering and Design,
Kyoto Institute of Technology,
Matsugasaki, Sakyoku, Kyoto 606-8585, Japan

yagasaki@kit.ac.jp