数理解析研究所講究録
第 1677 巻 2010 年 10-19

関孝和研究への試論

An essay on studying of Seki Takakazu 's life and works
from a completely new viewpoint.

杉本敏夫

Sugimoto Toshio

第１節　まえおき

2008 年は関孝和没後３００年祭を記念して、各種の研究集会が開かれ、展示も行なわれた。私は京大の研究集会で [1] を、東京理科大の国際シンポジウムで [2] を、津田塾大のシンポジウムで [3], [4] を報告し、[5] にも立体幾何の一文を草した。他の著者による [6]～[8] 雑誌の特集と[9] 関孝和論序説が出た。これらの中で、正面から関孝和の数学内容を《原文に即して》検討したものは、[10] 竹之内脩著と [11] 拙著の二つである。もちろん[5]～[9] の各論説は関の数学内容に密着するが、後述のように《現代的解釈》が主流である。

私が手本とするのは、[12] 藤原松三郎著、[13] 平山諦ほか編著『関孝和全集』の中の解説、[14] 平山著、[15] 加藤平左エ門著、[16] 下平和夫著の解説である。これらの著者は可能な限り関の原文の解読に努め、和算固有の表現に秘められた数学内容を解説した。特に私がこれ等の著者に感謝するのは、解読不明な個所には率直に「旁錐の意味が少しく不明」（球の求積）とか「巳の幾何学的意味が明らかでない」（角術）などと、その解決を後学に残した点である。

それと比べて最近の著者の多くは、原文解読の代わりに、対応する西洋流の解釈への《置き換え》を提出する。私のように、「関の時代に身を置き、社会生活の背景を考え、関の思考方式に迫ろう」とする研究態度に乏しい。《数学史》ならば、藤原著・平山著・加藤著のような《原文解釈》が本流でなければならない、と思われる。[11] 拙著は、本来の流れを目指した。

第２節　伝記について

関新助・孝和(？-1708)の伝記は多くの著者が論じ、或る側面については新発見も含め、書き換えられつつある。しかし私が知りたい焦点には迫っていない。

新助少年は何を勉強したか。ほぼ同時代の新井白石(1657-1725) は、[17] 自伝に、武術のほか、歌道、和漢書、書簡集などを挙げている。新助少年もこれと似たものだろう。違うのは数学修業である。知りたいのは、甲府侯に「勘定

方」として仕えるには、『塵劫記』のほか、どんな数学の基礎が要求されたか？
甲府候が将軍世子（後、六代将軍）となり、孝和もそれに伴い幕臣「勘定方用役」になったが、その業務内容は《何》であったか？　白石は儒臣として、さらに政策顧問として、通貨政策や貿易政策の面で幕府の当該部局を支配した（[17] に詳しい)。勘定方用役の関孝和には、何が課されたか？
山田慶児はその著[18] に、中国元代(13 世紀)の「司天台」(天文観測・暦算の部局）を詳細に研究し、組織、人数、業務、教育の細部にわたって記述した。対する幕府の、関の所属部署の構成や業務は何か？
関が優秀な弟子 建部兄弟を育てたことは周知だが、その教場と教育方法は何か？　関よりほぼ一世紀降る本居宣長(1730-1843)は、[19] 城福勇によると、28 歳、京都遊学を終え、松阪に帰り、「くすしのわざ」(医者、特に小児科)を本業とした。夜が宣長の古典研究の時間であり、その成果を自宅で、月に８～９回講義した。『源氏物語』研究や『古事記伝』は、その成果である。
では関の場合は、何処で何を研究したか？　弟子に何処で如何に教えたか？『算法免許状』から、何が言えるか？
本節に述べた関の伝記研究への私の希望は、文献[1] の考究録 1625 に載った城地茂論文によって、一部叶えられた。

第３節　原本の扱い方

有名な《楊輝算法の筆写》の伝えは『翁草』(1772) によると、要旨「南都（奈良）に伝わる唐本を数学書と察し、南都に赴き書写し、江戸に帰り三年の研鑽の後、終に其の奥儀を究めた。」と言う。石黒信由の書写した『楊輝算法』には、「寛文辛丑(元、1661 年)仲夏下浣日訂写訖、関孝和」なる書き込みがある。
私は、二つの疑問をもつ。
[一]　甲府候に仕えた青年関新助（下級武士）に、江戸－奈良往復と書写の日数（少なくとも一ヶ月半を越える）の長期休暇が与えられたか？
[二]　関が学んだ他の中国書との関係は？　『楊輝算法』の特色は？　これらの点を含めて、私としても、未だ「関の数学に及ぼした和漢の数学書の影響」の研究を果たしていない。
唯一私の為したことは、平山[14]の仮説「『規矩要明算法』(Ｂ)は青年孝和の著書である」への批判である。[20] 佐藤、[9] 小林の両氏は《文献批判》の見地から、非常に迂遠な手続きを経て、「その著書と断定し難い」と結論した。貴重な研究と言えよう。私は捷径を開発した。Ｂは先駆者・村松茂清の『算俎』(A)を、平山[14]によれば青年孝和（X）が書写したものと言う。私は両書に記載された「円周率に順次近づく、各段階の数値」を綿密に照合した結果、Ｘによる Aの書写Ｂに、一貫した誤りの傾向を見出した (詳細は[11]の第１号論文を参照)。

中でも目立つのは、「数値の脱落」、「幼稚な誤写」、「重複、…七六二九… を …七六二六二九… と写す」、「漢数字の誤り、…五一一一八… を …五一二八… と写す」(縦に並べる漢数字は、一一を二と見誤る)。このような不注意な誤りを犯すXが、後に緻密な研究を行なう孝和の青年時代だ、とは到底思われない。

第4節　コンピュータの使用

数学の内容に話題を転じよう。話を簡単にするため、多倍長の計算が可能と仮定し、さらにπが組み込み定数として、多数桁内蔵されていると仮定する。

①　　$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 2\cdots$

関の計算方式は《連鎖的》である。初めの部分の計算を、小数 10 桁ほどを用いて例示しよう。出発値は円に内接する正四角形であり、辺(和算では弦)は

$$\alpha = \sqrt{1/2} = 0.70710\ 67811\ 8\cdots$$

周はその4倍

$$a = 4\alpha = 2.82842\ 71247\ 4\cdots$$

である。正八角形の辺βは

$$\beta = \sqrt{(1-\alpha)/2} = 0.38268\ 34323\ 6\cdots,$$

周はその8倍

$$b = 8\beta = 3.06146\ 74589\ 2\cdots$$

である。正十六角形の辺γは

②　　$\gamma = \sqrt{[1-\sqrt{(1-\beta^2)}]/2} = 0.19509\ 03220\ 1\cdots$

周はその16倍

③　　$c = 16\gamma = 3.12144\ 51522\ 5\cdots$

となり、b, c は次第に下から①に近づく。公式は、式 ② と ③ が基本であり、β と γ をその都度当該の値に置き換えて使えばよい。私は、辺から辺への移項を《連鎖的》と呼ぶ。連鎖的な性質からの帰結は、一度或る段階で誤りを犯せば、それは次々に伝播してゆく。伝播の実体を昨年、[1] で報告した。

以下の立論の根拠として、四つの値を示そう。a, b, c は上記と意味を変える。

2^9 = 512 角形の周	$a = 3.14157\ 29403\ 67091\ 38\cdots$
2^{10}=1024 角形の周	$b = 3.14158\ 77252\ 77159\ 70\cdots$
2^{11}=2048 角形の周	$c = 3.14159\ 14215\ 11199\ 97\cdots$
2^{12}=4096 角形の周	$d = 3.14159\ 23455\ 70117\ 74\cdots$

(実は昨年の報告 [1] で指摘したように、関の値は 512 角形の周の小数 19 桁目から微増し、連鎖的な計算の性質によって、微増が次々の値に蓄積されて行く。今回はその論点を避けるため、小数 17 桁目まで表示した。)

周 a の根拠は$\alpha = a/512 = 0.00613\ 58846\ 49154\ 4753\ \cdots$ であり、βは公式②のβをαに、γをβに読み替え、γとδも公式②を適当に読み替える。

$\beta = b/1024 = 0.00306\ 79567\ 62965\ 9762\ \cdots$
$\gamma = c/2048 = 0.00153\ 39801\ 86284\ 7656\ \cdots$
$\delta = d/4096 = 0.00076\ 69903\ 18742\ 70452\ \cdots$

私見によれば、《関の円周率計算》と称する研究は、ここに述べた公式②を、その順序通りに繰り返し用いて使用し、各段階での《関の計算値》（[13] 全集、「括要算法、四」）と比較すべきであろう。もちろん現代人が、ソロバンの代わりに部分的にコンピュータを用いることは妨げない。

そのとき「開平計算」をどのように実行するか？　ここに問題の焦点がある。昨年の報告 [1] で指摘したように、関の時代の開平計算は、或る近似値から出発し、逐次近似を繰り返し、徐々に真根に近づいた。途中で繰り返しを打ち切れば、誤差が生ずる。関は、まさにそのように計算した。

コンピュータによる開平計算 $z=\sqrt{x}$ は、その内部の(多倍長の)組み込み関数 $x \rightarrow y = (1/2)\log(x) \rightarrow z = \mathrm{alog}(y)$ を用いる。かかる機械計算では、関のように人為的な《計算の途中段階での打ち切り》が這入り込む余地はなく、計算精度の範囲内で正しい平方根を得る。従って、私が昨年の報告 [1] で指摘した、《関の計算過程における π の近似値の微増》など、検出することは出来ない。

私見によれば、[1] 考究録 1625 の真島秀行論文も長田直樹論文も批判の対象になる。両氏はコンピュータに全面的に依拠し、関が何故その値を算出したのか、正面からの考察を避けている。ときには自分に都合の良い解釈を行い、関から離れている。古典研究は、《原典尊重》から始めるべきであろう。

第５節　コンピュータの内蔵関数

さらに問題なのは、コンピュータには内蔵関数として、多倍長の「正弦関数」が組み込まれている。それは《原理的には》級数計算であり、

④　$\mathrm{SIN}(X) = X - X^3/6 + X^5/120 - + \cdots$

なる級数を、目標の桁、目一杯まで求める。この級数を円周率計算に採用すれば、π として、組み込みの多倍長の定数値①を用い、$n=2^k$ として、

⑤　$n\,\mathrm{SIN}(\pi/n) = n(\pi/n - \pi^3/6n^3 + \pi^5/120n^5 - + \cdots)$
$= \pi - \pi^3/6n^2 + \pi^5/120n^4 - + \cdots$

と計算する。前節の 512, 1024, 2048, 4096 角形の周は、

$a = \pi - \pi^3/(6 \cdot 512^2) + \pi^5/(120 \cdot 512^4) \cdots$
$b = \pi - \pi^3/(6 \cdot 1024^2) + \pi^5/(120 \cdot 1024^4) \cdots$
$c = \pi - \pi^3/(6 \cdot 2048^2) + \pi^5/(120 \cdot 2048^4) \cdots$
$d = \pi - \pi^3/(6 \cdot 4096^2) + \pi^5/(120 \cdot 4096^4) \cdots$

と計算される。略記法として、小数点の次の 0 の肩の指数、例えば $0.0^4197\cdots$ は、0 が 4 個続く意味を表す（具体的には 0.0000197… を表す）ものとする。

$$a = \pi - 0.0^{4}1\ 97132\ 59811\ 5919\cdots + 0.0^{10}\ 37109\ 7709\cdots - 0.0^{16}\ 332\cdots$$
$$= \pi - 0.0^{4}1\ 97132\ 22701\ 7877\cdots$$
$$b = \pi - 0.0^{5}\ 49283\ 14952\ 8979\cdots + 0.0^{11}\ 2319\ 3606\cdots - 0.0^{18}\ 5\cdots$$
$$= \pi - 0.0^{5}\ 49283\ 12633\ 5367\cdots$$
$$c = \pi - 0.0^{5}\ 12320\ 78738\ 2244\cdots + 0.0^{12}\ 144\ 9600\cdots$$
$$= \pi - 0.0^{5}\ 12320\ 78593\ 2644\cdots$$
$$d = \pi - 0.0^{6}\ 3080\ 19684\ 5561\cdots + 0.0^{14}\ 9060\ 0\cdots$$
$$= \pi - 0.0^{6}\ 3080\ 19675\ 4961\cdots$$

《コンピュータによる関の計算の検算》と称する研究における、数値の内側を考えてみよう。一見、数値が下から次第にπに近づくように見えるが、実は、πを覆う第二項以下の《雲》が取り払われて、次第にπの値が姿を現す過程を《実証》しているに過ぎない。なんとトリビアルな内容ではないか！

第６節　加速法としての増約術

関が先駆者・村松茂清による円周率計算を凌駕するのは、単に村松の計算を追認、補完しただけではなく、関が計算した段階までのπの近似値を用いて、より精密なπの値を導く《増約術》を開発したことによる。

関のアイディアの由来を、私は次のように推測する（昨年の報告[1]を参照、昨年と一部重複がある)。第４節の数値を用い、その差とその比を求める。

$$u = b - a = 0.0^{4}1\ 47849\ 10068\ 31649\cdots$$
$$v = c - b = 0.0^{5}\ 36962\ 34040\ 27336\cdots$$
$$w = d - c = 0.0^{5}\ 09240\ 58917\ 76834\cdots$$
$$v/u = 0.25000\ 04412\ 06217\cdots$$
$$w/v = 0.25000\ 01103\ 01457\cdots$$

0.25 に付随する末尾の数値を無視すれば、a, b, c, d …の極限であるπは

$$\pi \fallingdotseq b + 0.25\,b + 0.25^{2}\,b + \cdots = b \times 1.333\cdots = b \times (4/3)$$

なる級数で表され、さらに 0.25 を現実の比 v/u で置き換えれば

⑥ $$\pi \fallingdotseq b + u \cdot v/(u - v)$$

なる《関の増約術》の公式が得られる。

関は[13] 全集の「諸約之法」(西洋の整数論に相当）の中で「増約術」(等比級数の和）を扱った。《後世の Aitken など引用には及ばない。》

従来ここまでは[10] 竹之内氏、[6]〜[9] 小川氏などが論じた。今回、私は第５節の級数 a, b, c, d に注目して、それぞれの差 u, v, w を考えた。

$$u = b - a = (\pi^{3}/6)\cdot(1/512^{2} - 1/1024^{2}) - (\pi^{5}/120)(1/512^{4} - 1/1024^{4})$$
$$= \pi^{3}/(2\cdot 1024^{2}) - \pi^{5}/(8\cdot 1024^{4})$$
$$v = c - b = (\pi^{3}/6)\cdot(1/1024^{2} - 1/2048^{2}) - (\pi^{5}/120)(1/1024^{4} - 1/2048^{4})$$

$$= \pi^3/(2\cdot 2048^2) - \pi^5/(8\cdot 2048^4)$$
$$w = d-c = (\pi^3/6)\cdot(1/2048^2 - 1/4096^2) - (\pi^5/120)(1/2048^4 - 1/4096^4)$$
$$= \pi^3/(2\cdot 4096^2) - \pi^5/(8\cdot 4096^4)$$
$$u = 0.0^4 1\ 47849\ 10068\ 31649\cdots$$
$$v = 0.0^5\ \ 36962\ 34040\ 27336\cdots$$
$$w = 0.0^5\ \ 09240\ 58917\ 76834\cdots$$

このように、級数を用いれば、先に示した u, v, w の値の由来が明らかになる。
さらに歩を進めて、《関の増約術》を裏付けよう。式⑥の文字を置き換えた

⑦　$\pi \fallingdotseq c + v\cdot w/(v-w)$

も一緒に考える。増約術が有効な理由は、ε，η をごく小さい正数として、

$$v/u = 0.25 + \varepsilon,\quad w/v = 0.25 + \eta$$

となる事実である。これも級数のままで考えれば、ごく自然に導かれる。

$$u = b-a = (1/8)(\pi^3/n^2) - (1/128)(\pi^5/n^4) + (1/5120)(\pi^7/n^6)$$
$$v = c-b = (1/32)(\pi^3/n^2) - (1/2048)(\pi^5/n^4) + (1/327680)(\pi^7/n^6)$$

⑧　$v/u = 1/4 + (3/256)(\pi^2/n^2) + (3/13684)(\pi^4/n^4)$

この式⑧の n に具体的な数値を代入すれば、

$n = 512$ で $0.25 + 0.0^6 4412\ 05698\ 3 + 0.0^{12} 519\ 1 = 0.25000\ 04412\ 06217\ 4$
$n = 1024$ で $0.25 + 0.0^6 1103\ 01424\ 6 + 0.0^{13} 32\ 4 = 0.25000\ 01103\ 01457\ 0$

となり、先の v/u，w/v に付随する<u>端数の根拠</u>が明らかになった。

関自身は、各正 n 角形の計算を先のほうまで進めて、a が正 2^{15} 角形，b が正 2^{16} 角形，c が正 2^{17} 角形 の場合に、公式 ⑥ を用いて

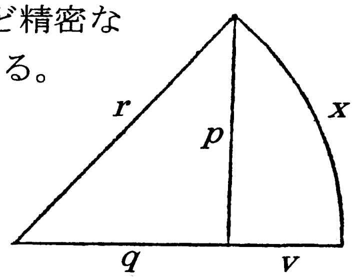
⑥　$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 2\underline{5}\cdots$

を得た。関自身が求めた a，b，c の値は（昨年の報告[1] に述べたように）、末位に蓄積された超過をもつので、ここに得られた関の π の値は、小数 17 位の <u>5</u> においてすでに超過をもつ。式⑥の値を得るため、もっと精密な値を用いれば、$\cdots 89793\ 2\underline{3846}\cdots$ 即ち周知の、π の先のほうの値①まで求まる。

全く意外なことに、<u>もっと角数の少ない</u>正 n 角形の値、例えば第５節で得た $a = 2^9$ 角形 $=512$ 角形〜 $d = 2^{12}$ 角形 $=4096$ 角形を用いただけでも、
$\pi \fallingdotseq 3.14159\ 26535\ \underline{92112}\ \cdots$ と、予想以上に精密な値が得られる。これは式

⑨　$\pi \fallingdotseq c + v\cdot w/(v-w) = c + (1/24)(\pi^3/n^2) - (5/6144)(\pi^{10}/n^8)$

とも符号する。このように、《関の増約術》が驚くほど精密な π の値を与える根拠を、級数によって裏づけた訳である。



第７節　逆正弦の公式と弓形面積

話題を《幾何学》に転じよう。

関の『授時発明』（[13] 全集の 337 頁〜）は、

中国元代の天文家郭守敬が編集した「授時暦」(1280) の数理的部分を、後世の研究書に従い、関みずから図解し、注釈を加えた書である。その詳細な検討は、[11] 論文集の第 9 号論文以下に述べた。ここに引用するのは、逆正弦公式に相当する「半弦 p から半弧長 x を求める」《沈括の公式》

⑩　　$x = p + v^2 / 2r, \quad r = q + v$

である。(各長さは図を参照)　式⑩は明らかに近似式であり、短い p に対してのみ有効である。(長い p の場合は、半直角や三分直角など既知の角度の p_0 を基にして、それとの図形的な差を考える。) p と v の間には、周知の

⑪　　$p^2 = 2rv - v^2$

が成立する。⑩は《逆正弦公式》に相当する。これの逆を考えて《正弦公式》として、x から v そして p を求めるには、v についての四次方程式

⑫　　$v^4 + (4r^2 - 4rx)v^2 - 8r^3 v + 4r^2 x^2 = 0$

を解かねばならない。この面倒な計算に、元の「司天台」は大勢の官員を動員した。対する孤軍の関は、元から伝来の数表を援用しただけであり、自らは計算し直さなかった。この経緯を、[11] 論文集の第 12 号論文に詳述した。

関は[13] 全集 352 頁以下の『求弧背術』において、上図の $2x=a$, $2p=b$, $v=c$ に相当する長さ b, a, c の間に成立する《補間公式》、すなわち $v=0.1$, 0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.45 のとき正しい値を与え、中間の v に対しては近似値を与える公式 (西洋の逆正弦公式に相当) を導いた。詳細は拙著 [11] の第 12 号論文を参照。関の関心は先行の『竪亥録』(1639) の公式の精密化にあり、半円に近い円弧 ($v=0.45$) にのみ注目し、これと逆方向の小さい円弧 ($v=0.1$) は重視しなかった。そのため、《西洋流》の級数 ($r=1$, $b=2x$, $a=2p$)

⑬　　$b = a + a^3/6 + 3a^5/40 + \cdots$

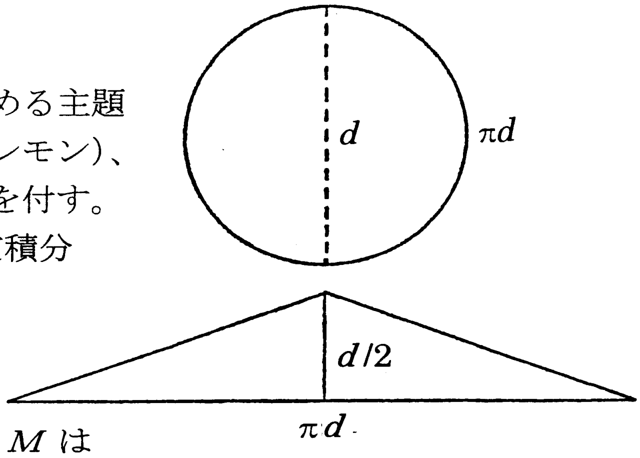
の発見には到らなかった。級数は、弟子の建部賢弘の研究に遺された。

私は西洋流との優劣を論じようとは思わない。むしろ数学史に表れる従来の思考方式への固執 (当面の場合、関は『竪亥録』の設問に拘った) に注目する。和算を西洋数学史の目で評価することは、筋が違う。従来の関研究 ([6]～[9] など) は、建部の級数公式に目を奪われ、関の『求弧背術』を省みようとしない。江戸時代にはその当時の、関には彼固有の考え方があったのだ。

なお、関の数学研究の動機には「改暦」への志向があった、とする広瀬秀雄の論考 ([13] 『関全集』の「天文・暦術」への解説) にも注目したい。(拙著[11] 論文集の第 9 号～14 号論文を参照)

第 8 節　円と球

関の著作を見れば、(一) 先駆者の「遺題」(挑戦的出題) への回答、(二) 或る研究分野のまとめ、の二つがある。(二) が系統的なのは当然だが、(一) に



もその意図が見られる。

以下は「立体幾何」、特に体積を求める主題に的を絞る。個々の図形には「欖」（レモン）、「蕎麦」（正四面体）などの固有名詞を付す。対する西洋数学では、平面と立体の定積分（一般論）を目指した。関の場合は、特に個々の立体幾何への志向が強い（拙著[11]および[2]を参照）。

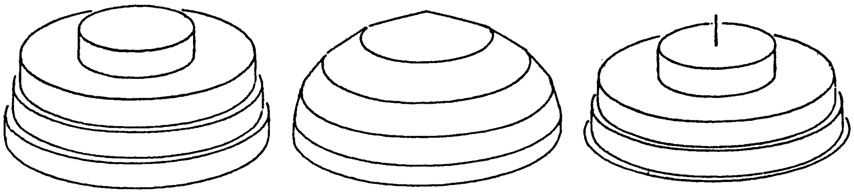
「円の面積」　直径 d の円の面積 M は

⑭　　$M=(\pi/4)\,d^2=(355/452)\,d^2$.

で、「角」(正多角形)の極まる所。高さ $d/2$ で底辺が狭い「圭」の累り $\pi d/2$ と見做す（上の図の三角形は、圭［二等辺三角形］の集まりである）。

「球の体積」の求め方には四つの異なる方法がある。

（一）球を薄切り円盤の積み重ねと見る（右の図）。特に中の図は円錐台を用い、近似が非常に高い。



（二）高さが球半径に等しい小円錐を考え、球中心に頂点が集待った形と見る。

（三）球を薄い皮の重なりと見る（関の著述[2]には出て来ない）。

（四）半球を二つの円錐の和と考える（「中錐」は関の図から明確だが、「旁錐」の意味が難解）。どの方法によっても、結論は、周知の如く

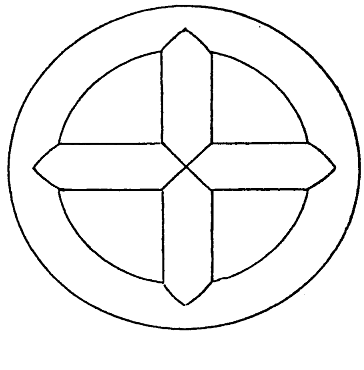
⑮　　$V=(\pi/6)d^3$　　　（d は直径）

となる。私は[11] 論文集の第 15 号論文以下の各所で論じた。

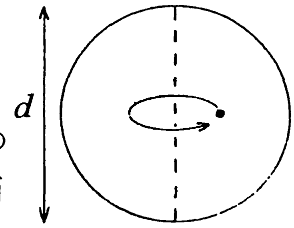
数学史の主題として（西洋も含めて）、様々な「球体積」を論ずべきであろう。

第９節　回転体と蹄形

関の平面・立体幾何の集成『求積』編は、末尾に「十字環」なる挑戦問題、《浮輪》（トーラス）と十字型の環を組み合わせた立体への、関の回答がある。立体の中央部分と直管と曲管の繋ぎ目に、貫通体が生じる。西洋流でも困難な問題である。まず、浮輪（切り口が円なる回転体）は、関の《回転体》の一般論



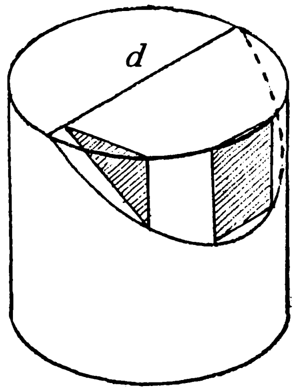
⑯　　V＝切り口面積×中心周



によって解かれる。《中心周》とは図形の中心（重心）の描く円周。関には力学の観念が乏しいため《中心》と称した。西洋流のパッポス・ギュルダンの定理に相当する。

以下「一般の切り口図形」の代わりに半円面を考え、その「中心」を知りたい。直径 d の球体積 $(\pi/6)d^3$ を、半円面の面積$(\pi/8)d^2$ で割れば、中心の軌跡である「中心周」

⑰　$\pi g = (\pi/6)d^3 \div (\pi/8)d^2 = (4/3)d$

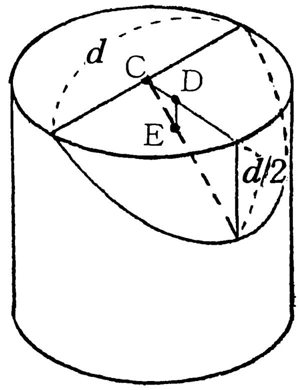


が得られ、「中心半径」$g/2$ は

⑱　$g/2 = (2/3\pi)d$

となる。$d = 1$ なら中心半径は $g/2 = 0.21221$. つまり、半円面の中心は、半径から約２割内側にある(上の図)。

これとは全く異質に見える立体を考えよう。直径 d なる円柱を、円半径を通る斜め半直角な平面で切り取った立体(中の図)である。私は馬の蹄（ひづめ）からの連想で「蹄形」と呼ぶ。



パスカルは厚い辞書の見出しの窪みとの連想で「爪掛け」と呼んだ。蹄形の体積を、半径と直交する「半方(二等辺直角三角形)」(左の影)の積み重ねと見るか、「半径に平行な矩形」(右の影)の積み重ねと見るか、いづれにしても、

⑲　$V = (1/12)d^3$

なる同じ体積を得る（置換積分法の典型例）。

公式⑯を逆用して、「蹄形」の体積÷半円の面積　により「蹄形」の平均の高さ h ＝ＤＥを求めよう」(下の図)。

⑳　$h = (1/12)d^3 \div (\pi/8)d^2 = (2/3\pi)d$

ところが切断平面が半直角であるから、h ＝ＤＥは半円の中心Ｃと点Ｄの距離に等しい。意外にも、h は先に式⑱で得られた $g/2 = (2/3\pi)d$ と一致するではないか！　すなわち点Ｄは、先に求めた半円面の《中心》に等しいのだ。

回転体の回転面の「中心」と「蹄形」の上半面の「中心」が一致する！　これは全く異質と思われた立体相互の間に成立する、予想外の著しい現象である。

関がこの《定理》を得たときの喜びは、如何ばかりであったろうか！

彼は半円から作られたこの「蹄形」の体積を、早速「十字環」の問題に含まれる中央の、円柱の交叉部分（互いに半直角に切り合う）の求積に活用した。

ここまで話を簡単にするため、「半円と半直角」を例にとって説明した。しかし同様な筋道を辿り、もっと一般的な「任意の弓形と任意の角度の場合」にも、同様な結論を導くことが出来る。以上は、[2]国際会議の発表で詳述した。

第１０節　関の洞察力

関孝和の数学は、数値計算が中心の分野のみならず、第７節以下の如く、「空間表象力」を発揮する分野においても、目覚しい洞察力を示した。私見によれば、従来の研究は関の幾何学的側面の検討が乏しく、その検討も特定分野に偏っているように思われる。西洋数学との比較を論ずるならば、「暦算」の分野も含め、関の数学の全体像を、関の原文に沿って把握すべきではなかろうか。

文　献

[1] 杉本敏夫：関孝和の円周率の微増と限界、京都大学数理解析研究所考究録 1625, 数学史の研究、2009 年、180-191 頁。

[2] 関孝和三百年祭記念数学史国際会議、東京理科大学、神楽坂校地、2008. 8. 25-31.

[3] 杉本敏夫：関とガウスの正十七角形（上)、津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 30 号、2009 年、88-103 頁。

[4] 同上、(下)、2009 年 10 月発表。2010 年の研究所報に載る予定。

[5] 佐藤健一・真島秀行編：関孝和の人と業績、研成社、2008.

[6] 日本科学史学会編集:科学史学研究、第 47 巻(No. 248) 2008 冬、岩波書店。特に 231～245 頁、シンポジウム、関孝和を巡る書問題。

[7] 日本科学史学会編集：数学文化、第 10 号、特集・関孝和―没後 300 年記念（8～113 頁)、日本評論社、2008.

[8] 数学セミナー、通巻 567 号、2008 年 12 月号、日本評論社、特集・現代から見た関孝和の数学、10-39 頁。

[9] 上野健爾・小川束・小林龍彦・佐藤健一：関孝和論序説、岩波書店、2008.

[10] 竹之内脩：関孝和の数学、共立出版、2008.

[11] 杉本敏夫：解読・関孝和――天才の思考過程、海鳴社、2008.

[12] 藤原松三郎：明治前日本数学史（全５巻)、岩波書店、1954～1960.

[13] 平山諦・下平和夫・広瀬秀雄編著：関孝和全集、大阪教育図書、1974.

[14] 平山諦：関孝和（増補訂正)、恒星社厚生閣、1974.

[15] 加藤平左エ門：算聖関孝和、槇書店、1972.

[16] 下平和夫：関孝和、研成社、2006.

[17] 新井白石：折たく柴の記、日本古典文学体系、95 巻、岩波書店、1964.

[18] 山田慶児：授時暦への道、みすず書房、1980.

[19] 城福勇：本居宣長、吉川弘文館、1980.

[20] 佐藤賢一：近世日本数学史――関孝和の実像を求めて、東京大学出版会、2005.

（2009. 8. 24 記）