数理解析研究所講究録
第 1681 巻 2010 年 42-48

Coarse 幾何学と Shape 理論

小山　晃（静岡大学理学部数学科）

2009 年 10 月 15 日

本稿では “coarse 幾何学に不案内な” 読者を対象に
E. Cuchilio-Ibaáñez, J. Dydak, A. Koyama and Manuel Alonso Morón, C_0-coarse geometry of complements of Z-sets in the Hilbert cube, Trans. Amer. Math. Soc. **360(10)**(2008), 5229–5246.
の概略を紹介しようとするものである.

1 Introduction

M. Gromov は離散群, 主に多様体の基本群, の asymptotic 不変量を研究するために asymptotic 次元の概念を導入した. そして有限生成群について, Gromov は, その生成元の有限集合から定義される word metric に附随する bounded coarse geometry を用いて asymptotic 次元を考察しようとした. Gromov の 1 つの結果として “有限生成群の bounded coarse geometry はその生成元の有限集合の取り方に依存しない” がある. “asymptotic 次元” はその後一般の proper 距離空間へ一般化されていくが, その定義から, proper 距離空間の適切な compact 化の remainder の（従来の位相的）次元と密接に関連していると考えてよい.

一方 shape 理論の中でもきわだった結果の 1 つに Chapman による “Comlement Theorem”:

> Hilbert 立方体 Q の 2 つの compact Z-sets X, Y について, X と Y が同じ shape 型をもつ必要十分条件はそれらの補集合 $Q \setminus X$ と $Q \setminus Y$ が同相であることである.

がある. ここで,

定義 **1.1.** *compact* 部分集合 $X \subset Q$ が **Z-set** であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 連続写像

$$f : Q \to Q \setminus X \ s.t. \ d(f(z), z) < \varepsilon \ \textit{for all} \ z \in Q$$

が存在することである.

定義から明らかに, Q の compact Z-set X は nowhere dense, $Q \setminus X$ は Q で稠密である. 見方を変えると, “Q は, $Q \setminus X$ の 1 つの compact 化であり, その remainder が X である” とも言える. そこで $Q \setminus X$ に何らかの coarse geometry を導入することで, X の位相的性質を理解する方策を見つけ出すことができるのではないか, という素朴なアイディアから出発したものである.

2 Coarse Geometry

集合 X とする. 積集合 $X \times X$ の部分集合について次の notations を用いる:

- $E \subset X \times X$ について, **inverse** $E^{-1} = \{(x', x) \ : \ (x, x') \in E\}$
  $E = E^{-1}$ であるとき, E は **symmetric** であるという.
- $E', E'' \subset X \times X$ について, **product**

$$E' \circ E'' = \{(x', x'') \ : \ (x', x) \in E', \ (x, x'') \in E'' \text{ for some } x \in X\}.$$

- $E \subset X \times X$ と $K \subset X$ について,

$$E[K] = \{x' \in X \ : \ (x', x) \in E \text{ for some } x \in K\}.$$

  特に, $K = \{x\}$ であるとき, $E_x = E[\{x\}]$, $E^x = E^{-1}[\{x\}]$ と表す.

定義 **2.1.** 位相空間 X とする. 部分集合 $E \subset X \times X$ が **proper** であるとは, 任意の *compact* 部分集合 $K \subset X$ に対して, $E[K], E^{-1}[K]$ がともに *relatively compact* であることをいう.

部分集合 $A \subset X$ が *relatively compact* であるとは, その閉包 $\mathrm{Cl}\, A$ が *compact* であることをいう.

定義 **2.2.** 位相空間 X の **coarse structure** とは, $X \times X$ の部分集合の族 $\mathcal{E}$ で次の条件を満たすものをいう:

(*i*) *the diagonal* $\Delta_X \in \mathcal{E}$, (*ii*) $E \in \mathcal{E}, E' \subset E \Longrightarrow E' \in \mathcal{E}$,

(*iii*) $E \in \mathcal{E} \Longrightarrow E^{-1} \in \mathcal{E}$,

(*iv*) $E', E'' \in \mathcal{E} \Longrightarrow E' \circ E'' \in \mathcal{E}$,

(*v*) $E', E'' \in \mathcal{E} \Longrightarrow E' \cup E'' \in \mathcal{E}$,

おのおのの $E \in \mathcal{E}$ を **controlled set** という.
位相空間 X に 1 つの *coarse structure* $\mathcal{E}$ を指定した対を **coarse space** とよび, $(X, \mathcal{E})$ と表す.

例 2.3. (1) (*the maximal coarse structure on* X) $\mathcal{E}$ = (*the set of all subsets of* $X \times X$)

(2) 距離空間 (X, d) について, すべての部分集合 $E \subset X \times X$

$$\sup\{d(x, x') : (x, x') \in E\} < \infty$$

から成る族 $\mathcal{E}$. これを (与えられた距離 d に関する)**bounded coarse structure** という.

(3) 距離空間 (X, d) について, *"tend to zero at infinity"* である部分集合 $E \subset X \times X$, すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$compact\text{部分集合 } K \subset X \ \ s.t.\ d(x, x') < \varepsilon \ \ for\ all\ (x, x') \in E \setminus K \times K$$

が存在する; から成る族 $\mathcal{E}$ は X 上の *coarse structure* になる.
これを (与えられた距離 d に関する) C_0**-coarse structure** という.

(4) 位相空間 X について, 部分集合 $E \subset X \times X$;

$$|E \setminus \Delta_X| < \infty$$

からなる族 $\mathcal{E}$. これを **discrete coarse structure** という.

(5) 位相空間 X について, すべての *proper* な部分集合 $E \subset X \times X$ からなる族. これを X の **indiscrete coarese structure** とよぶ.

定義 2.4. *coarse space* $(X, \mathcal{E})$ とする. $B \subset X$ が **bounded** *for* $\mathcal{E}$ であるとは, $B \times B \in \mathcal{E}$ であることをいう.

例 **2.5.** $\mathcal{E}$ が距離空間 (X, d) の *bounded coarse structure* ならば, *bounded sete* と通常の (距離 d に関する)*bounded det* と一致する.

定義 **2.6.** 距離 d が **proper** であるとは, 任意の有界閉部分集合が *compact* であることをいう.

例 **2.7.** d が *proper metric* ならば, C_0-*coarse structure* における *bounded sets* は, 通常の (距離 d に関する)*bounded det* と一致する.

定義 **2.8.** *paracompact Hausdorff* 空間 X の *coarse structure* $\mathcal{E}$ が次の条件を満たすとき, **proper** であるという:

(1) $E \in \mathcal{E}$ *s.t.* $\operatorname{Int} E \supset \Delta_X$; が存在する.

(2) X のすべての *bounded subset* が *relatively compact* である.

例 **2.9.** (1) 距離空間 (X, d) の *bounded coarse structure* が *proper* である必要十分条件は距離 d が *proper* であることである.

(2) *proper* 距離空間 (X, d) の C_0-*coarse structure* は *proper* である.

(3) *lolally compact Hausdorff* 空間の *indiscrete coarse structure* は *proper* である.

定義 **2.10.** $(X, \mathcal{E})$, $(Y, \mathcal{F})$ を *coarse space* とする. *function* $f : X \to Y$ が次の条件を満たすとき, **coarse map** とよぶ:

(1) 任意の *bounded subset* $B \subset Y$ に対して, $f^{-1}(B) \subset X$ が *bounded* である. このとき, f は **proper** であるという.

(2) 任意の *controlled set* $E \in \mathcal{E}$ に対して,

$$(f \times f)(E) = \{(f(x), f(y)) \,:\, (x, y) \in E\} \in \mathcal{F}.$$

このとき, f は **bornologous** であるという.

注意 **2.11.** 上記の定義では *function* f の連続性の求めていない. このことは奇妙に思えるかもしれないが, それでも空間の遠くを見て何が漸近的 (*asymptotic*) かを見ていくには有効な考え方となる. そしてそれはある意味で “とても奇妙” と言っていいかもしれない.

定義 2.12. 集合 Z から *coarse space* $(X, \mathcal{E})$ への *functions* $f, g : Z \to X$ について,

$$\{(f(z), g(z)) : z \in Z\} \in \mathcal{E}$$

であるとき, f と g は $\mathcal{E}$-**close** であるという.
この $\mathcal{E}$-*closeness* は明らかに同値関係である. f の同値類を $[f]_{\mathcal{E}} : Z \to X$ と表し, $\mathcal{E}$-*coarse class* とよぶ.

注意 2.13. この定義には２つの意味がある. １つは *homotopy* の一般化と捉えてもよい. 例えば, *ANR* 距離空間 M には開被覆 $\mathcal{U}$:

> 位相空間 X からの任意の２つの $\mathcal{U}$-*close* 連続写像 $f, g : X \to M$ は *homotopic* である

が存在する. もう１つは, どのような *functions* を同一視するかという意味では *homotopy* と考えてもよいが, 位相空間論的には *compact* 化を考えるとき, どのような２つの交わらない閉集合が *compact* 化をしても交わらない閉集合に拡張されるかを, *coarse structure* $\mathcal{E}$ が与えていると考えてもよい. この見方は *coarse structure* $\mathcal{E}$ に依る *Higson compact* 化と呼ぶものである.
また *coarse maps* の定義で要求した *bornologous* の概念は, $\mathcal{E}$-*close* の概念が *coarse maps* の合成と両立する同値関係となるために必要である.

3 Main Results

Hilbert cube Q 上の任意の距離 d を与え, 固定しおく. 任意の compact Z-set $X \subset Q$ に対して, 部分距離空間 $(Q \setminus X, d|_{Q \setminus X \times Q \setminus X})$ を考える. 明らかに距離 $d|_{(Q \setminus X \times Q \setminus X}$ は proper ではない. 一方, この節では距離空間 $(Q \setminus X, d|_{Q \setminus X \times Q \setminus X})$ に C_0-coarse structure $\mathcal{E}_X$ を導入して, coarse space $(Q \setminus X, \mathcal{E}_X)$ を考察するが, 次の命題が成立する:

補題 3.1. C_0-*coarse structure* $\mathcal{E}_X$ は *proper* である.

以後, 任意の compact Z-sets $X, Y \subset Q$ に対して, $(Q \setminus X, \mathcal{E}_X), (Q \setminus Y, \mathcal{E}_Y)$ を上述のようにして得られる C_0-coarse spaces とする. すなわち, 次の C_0-coarse category を考えることができる.

定義 3.2. *objects* を *Hilbert* 立方体 Q の *compact* Z-*sets*, *morphisms* を連続写像 $X \to Y$ とする *category* を $\mathcal{Z}$ と表す.
objects を C_0-*coarse spaces* $(Q \setminus X, \mathcal{E}_X)$, ただし, $X \in Ob(\mathcal{Z})$, *morphisms* を C_0-*coarse classes* $[f]_0 : Q \setminus X \to Q \setminus Y$ とする *category* を $C_0(\mathcal{Z})$ と表す.

この C_0-coarse category について, Chapman's Complement Theorem に対応する次の定理が得られる.

定理 3.3. 圏の間の同型写像 $T : C_0(\mathcal{Z}) \to \mathcal{Z}$

$$T((Q \setminus X, \mathcal{E}_X)) = X$$

が存在する.

したがって, 2つの *compact Z-sets* $X, Y \subset Q$ が位相同型である必要十分条件は *C_0-coarse spaces* $(Q \setminus X,\ \mathcal{E}_X)$ と $(Q \setminus Y,\ \mathcal{E}_Y)$ が *C_0-coarsely equivalent* であることである.

以下で C_0-coarse maps $(Q \setminus X,\ \mathcal{E}_X) \to (Q \setminus Y,\ \mathcal{E}_Y)$ と連続写像 $X \to Y$ との対応を説明する. 実際, C_0-coarse map $f : (Q \setminus X,\ \mathcal{E}_X) \to (Q \setminus Y,\ \mathcal{E}_Y)$ から連続写像 $F : X \to Y$ を次のように構成する.

任意の点 $x \in X$ に対して $Q \setminus X$ の点列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$; $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, をとり

$$E = \{(x_n, x_m) \in Q \setminus X \times Q \setminus X \ : m \geq n,\ n = 1, 2, \cdots\}$$

とすると, E は $\mathcal{E}_X$-controlled set である. C_0-coarse map f は bornologous なので,

$$(f \times f)(E) = \{(f(x_n), f(x_m)) \in Q \setminus Y \times Q \setminus Y \ : m \geq n,\ n = 1, 2, \cdots\}$$

は $\mathcal{E}_Y$-controlled set である. よって, 点列 $f(x_n)\}_{n \geq 1}$ は基本列である. ここで, f は C_0-proper なので, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \in Y$ であることがわかり,

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in Y$$

を定義することができる.
さらに, この定義が点列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, の取り方に依らないことなどを示して連続写像

$$F : X \to Y$$

を得る.

また, C_0-coarse maps $f,\ g : Q \setminus X \to Q \setminus Y$ が $\mathcal{E}_Y$-close ならば,

$$(f \times g)(E) = \{(f(x_n),\ g(x_m)) \ : m \geq n,\ n = 1, 2, \cdots\} \in \mathcal{E}_Y$$

よって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$d(f(x_n),\ g(x_n)) < \varepsilon \ \text{ for sufficiently large } n \geq 1\,.$$

したがって, C_0-coarse map g が導く連続写像を $G : X \to Y$ と表すと, $F = G : X \to Y$ であることがわかる.

一方, compact Z-set $Y \subset Q$ に対して, homotopy $H : Q \times [0, \operatorname{diam} Q] \to Q$

$$H_0 = \mathrm{id}_Q\,, \quad H_t(Q) \cap Y = \emptyset \quad \text{for } t > 0$$

が存在する. そこで, 連続写像 $f : X \to Y$ に対して, 任意の連続写像 $F : Q \to Q$, $F|_X = f$, をとり, 連続写像 $\tilde{f} : Q \to Q$ を

$$\tilde{f}(z) = H(F(z, d(z.X))) \quad \text{for } z \in Q$$

と定義する. このとき,

$$\tilde{f}|_X = f \quad \text{かつ} \quad \tilde{f}(Q \setminus X) \subset Q \setminus Y$$

だから, C_0-coarse map $\hat{f} : (Q \setminus X, \mathcal{E}_X) \to (Q \setminus Y, \mathcal{E}_Y)$ が得られる.

このようにすると (確かめなければならない事項は多いが) 次の 2 つの圏の間の対応が得られる.

この Main Result とその証明からいくつか興味深い事実が出てくるが, それら私たちの論文を見てください.

参考文献

Chapman の結果について:

1. T. A. Chapman, On some applications of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape, Fund. Math. 76(1972), 181–193.
2. T. A. Chapman, Lectures on the Hilbert cube manifolds, CBMS, No.28(1976).

Coarse geometry 及び C_0-coarse geometry について:

1. J. Roe, Lectures on Coarse Geometry, University Lecture Series 31(2003).
2. N. Wright, C_0 coarse geometry and scalar curvature, J. Functional Anal. 197(2003), 469–488.