

非拡大写像の族の共通不動点への弱収束列の構造について

高橋非線形解析研究所 竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)

Takahashi Institute for Nonlinear Analysis

1. はじめに

非拡大写像の族のエラー項を含む iterative sequence の共通不動点への収束について整理し、先行研究を包括的に議論できる構造について考えます。本稿は 東京工業大学 名誉教授 高橋 渉 先生と著者との共同研究に基づくものです。著者がこの内容を考えるきっかけとなったのは Bruck [7] の Theorem 3.3 を目にしたことです。議論に必要な知識は、高橋の 3 冊の著作 [16, 17, 18]、青山—木村—高橋—豊田 [1] の強収束定理についての論文、木村—高橋 [2] の弱収束定理についての論文から得られます。本稿では紙数の関係で弱収束定理についてのみ議論します。著者にとっては木村-高橋の論文の内容が難しく感じられたことから、この論文を矮小化した部分もあるかと思いますが、著者が理解できる形に整理し直したものを本稿のベースとしています。木村-高橋の論文の大きな構想を生かしきるような例は現時点では少なく、従来あまり研究されていなかったように思われます。著者には、弱収束定理についてのこれまでの先行研究のほとんどの結果が Reich [12] の Theorem 4.1 の拡張 Theorem 4.7 という形に帰着するように思われます。オピアル条件を満たす一様凸空間での弱収束定理はエラー項を含んでいても比較的簡単ですので、この議論は省略します。2008 年の講究録の拙稿に記した著者の立場から可能な範囲で簡潔に証明をつけます。この結果、紙数の関係で歴史的な記述は省略し、応用例は 1 例だけをあげることにします。

2. Banach 空間について

この節では Banach 空間についての基本的な知識を簡単にまとめます。詳しくは高橋の著作 [16, 17, 18] を参照してください。 N は正の整数を表すものとします。 E は常に実の Banach 空間とします。 $\|\cdot\|$ は E のノルム、 E^* は E の双対空間とします。 $y^* \in E^*$ が $x \in E$ でとる値を $\langle x, y^* \rangle$ と表します。 E から 2^{E^*} への双対写像 J は

$$J(x) = \{y^* \in E^* : \langle x, y^* \rangle = \|x\|^2 = \|y^*\|^2\}, \quad x \in E.$$

で定義され、すべての $x, y \in E$ と $f \in J(y)$, $g \in J(x+y)$ について

$$(2.1) \quad 2\langle x-y, f \rangle \leq \|x\|^2 - \|y\|^2 \quad \text{and} \quad \|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, g \rangle$$

という基本的な関係が成立します。凸性の modulus δ とは $\varepsilon \in [0, 2]$ について

$$\delta(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x+y\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon\}$$

で定義された $[0, 2]$ から $[0, 1]$ への関数です。任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta(\varepsilon) > 0$ であるとき Banach 空間 E は一様凸であるといいます。 $\|x\| = \|y\| = 1$ と $\|x-y\| > 0$ を満たす $x, y \in E$ について $\|x+y\|/2 < 1$ であるとき狭義凸であるといいます。一様凸な空間では任意の $\varepsilon \geq 0, r > 0, \lambda \in [0, 1]$ について $x, y \in E$ が $\|x\| \leq r, \|y\| \leq r, \|x-y\| \geq \varepsilon$ を満たすとき

$$(2.2) \quad \|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq r(1 - 2\lambda(1-\lambda)\delta(\frac{\varepsilon}{r}))$$

が成立します。この式は一様凸な *Banach* 空間で弱収束定理を考えると常に必要となるものです。 E が一様凸であれば狭義凸となります。 $S(E) = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とします。 $S(E)$ の要素 x, y について、 $t \rightarrow 0$ のとき常に $(\|x+ty\|/t)$ の極限が存在するならば E のノルムは *Gâteaux* 微分可能、あるいは空間 E は滑らかといえます。 $y \in S(E)$ とするとき、 $(\|x+ty\|/t)$ が $x \in S(E)$ について一様に収束するならば、 E のノルムは一様 *Gâteaux* 微分可能といえます。 $x \in S(E)$ とするとき、 $(\|x+ty\|/t)$ が $y \in S(E)$ について一様に収束するならば E のノルムは *Fréchet* 微分可能といえます。ノルムが *Gâteaux* 微分可能であるとき双対写像 J は一価です。ノルムが一様 *Gâteaux* 微分可能であるとき双対写像 J は E の有界集合上で *norm to weak** の意味で一様連続であり、*Fréchet* 微分可能であるとき双対写像 J は *norm to norm* の意味で連続です。一様凸な *Banach* 空間で収束定理を考えると、前者は強収束定理に必要な条件であり、後者は弱収束定理に必要な条件です。

C を *Banach* 空間 E の空ではない部分集合とし、 C から E への写像 T が $x, y \in C$ について $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ を満たすとき非拡大写像といえます。 T の不動点の集合を $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ と表します。 E が狭義凸であるとき $F(T)$ は閉凸集合です。

3. 本稿の議論に必要ないくつかの結果

ここでは本稿の議論に必要な結果を集めます。ほとんどが著名な結果です。次の定理は一様凸 *Banach* 空間での収束定理を考えると欠かせないものです。

Theorem 3.1 (Browder [3]). C を一様凸 *Banach* 空間 E の有界閉凸集合とし T を C から E への非拡大写像とします。 C の点列 $\{x_n\}$ が $z \in C$ に弱収束し、 $\{\|x_n - Tx_n\|\}$ が 0 に収束するならば $Tz = z$ となります。

Bruck の次の定理も共通不動点への収束を考えると非常に有効な結果です。

Theorem 3.2 (Bruck [5]). E を狭義凸な *Banach* 空間とし、 C を E の空ではない閉凸集合とします。 $\{A_n\}$ を $A_n : C \rightarrow E, \cap_n F(A_n) \neq \emptyset$ である非拡大写像の族とします。 $\{\beta_n\}$ を $\beta_n \in (0, 1), \sum_n \beta_n = 1$ を満たす実数列とすると $B = \sum_n \beta_n A_n$ が定義できて、 B は $F(B) = \cap_n F(A_n)$ を満たす C 上の非拡大写像となります。

この定理は C 上の有限個の非拡大写像の族 $\{A_k\}_{k=1}^n$ についても有効です。 $(0, 1)$ の点列 $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ が $\sum_{k=1}^n \beta_k = 1$ を満たすとき $\cap_{k=1}^n F(A_k) \neq \emptyset$ であれば $B = \sum_{k=1}^n \beta_k A_k$ が定義できて B は $F(B) = \cap_{k=1}^n F(A_k)$ を満たす C 上の非拡大写像となります。

C を狭義凸 *Banach* 空間 E の空ではない閉凸部分集合とします。 $\{A_n\}$ を C から E への非拡大写像の族で $\cap_n F(A_n) \neq \emptyset$ を満たすものとします。この $\{A_n\}$ から有用な族 $\{B_n\}$ を構成する方法を示します。 $\{\beta_n\}$ を $(0, 1)$ の数列で次の条件を満たすものとします。

$$(3.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1.$$

C 上の非拡大写像の族 $\{B_n\}$ を $n \in \mathbb{N}$ ごとに次の様に定義します。

$$(3.2) \quad B_n = \sum_{k=1}^n \beta_k A_k + (\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k) A_{n+1}$$

C 上の非拡大写像 B を次の様に定義します。

$$(3.3) \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k A_k.$$

考える問題によっては $\{\beta_n\}$ に次の様なもう少し強い条件を必要とする場合があります。

$$(3.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k < \infty.$$

$n \in \mathbb{N}$ ごとに $\beta_n = 1/2^n$ で定義した $\{\beta_n\}$ が (3.4) を満たす $(0, 1)$ の典型的な数列の例となることは明らかでしょう。この $\{B_n\}$ の構成方法は本質的には Aoyama, Kimura, Takahashi and Toyoda [1] の Example で導入されました。明らかに, $\{B_n\}$ は Bruck の Theorem 3.2 と深い関わりを持ちます。非拡大写像の族の共通不動点への収束を考えると、この列は Takahashi [15] によって導入された W-mapping と良く似た役割を果たします。したがって、 $\{B_n\}$ を (ABT)-sequence with $\{\beta_n\}$ and $\{A_n\}$, B を (ABT)-mapping with $\{\beta_n\}$ and $\{A_n\}$ と呼ぶことにします。 $\{B_n\}$ と B の簡単な性質を紹介します。Theorem 3.2 によって B_n と B は C 上の非拡大写像です。 $\cap_n F(A_n) = \cap_n F(B_n) = F(B)$ も明らかです。各 A_n が C から C への写像であれば、各 B_n と B もこの性質を持ちます。 $\{u_n\}$ を C の有界な点列とすると

$$(3.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|Bu_n - B_n u_n\| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{n+1} u_n - B_n u_n\| = 0.$$

が成立します。更に $\{\beta_n\}$ が (3.4) を満たす $(0, 1)$ の数列である場合は

$$(3.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|B_{n+1} u_n - B_n u_n\| < \infty.$$

が成立します。

2008 年 9 月に塩路 (講究録 1998) [14] の中で次の定理に出会ったことが、本稿の内容を考える直接の動機となりました。この定理は T を C 上の非拡大写像とすると、任意の $y \in C$ について $x_n = T_n y = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n T^j y$ としたとき $\|Tx_n - x_n\| \rightarrow 0$ という形をしています。収束定理においてこの性質は、ボルツァーノ-ワイエルシュトラスの定理の中での径が 0 に縮小する閉区間列の性質と良く似ています。

Theorem 3.3 (Bruck [7]). E を一様凸な Banach 空間とし、 C を E の空ではない有界閉凸集合とします。 $N(C)$ を C から C へのすべての非拡大写像とするとき次の関係が成立します。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{y \in C \\ T \in N(C)}} \left\{ \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n T^j y - T \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n T^j y \right) \right\| \right\} = 0.$$

次の Lemma は良く知られたもので、Mann type の収束定理を考えると必要なものです。私たちの立場では石川 type は Mann type に含めて考えます。

Lemma 3.4 (Tan and Xu [20]). $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を $[0, \infty)$ の数列とし $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ を満たすとし。任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$a_{n+1} \leq a_n + b_n$$

とすれば $\{a_n\}$ はある $c \geq 0$ に収束します。

次の Bruck の定理は私たちの弱収束定理を議論するときに本質的な役割をします。この定理はオリジナルよりもほんのわずかに一般化されています; 参照 [9]。

Theorem 3.5 (Bruck [6]). C を一様凸な Banach 空間 E の有界閉凸集合とします。このとき $[0, \infty)$ で定義された狭義増加・連続な凸関数 γ で $\gamma(0) = 0$ を満たし、 C の閉凸部分集合 D から E へのすべての非拡大写像 T について

$$\gamma(\|\lambda Tx + (1-\lambda)Ty - T(\lambda x + (1-\lambda)y)\|) \leq \|x - y\| - \|Tx - Ty\|$$

を満たすものが存在します。ただし、 $x, y \in D$ かつ $\lambda \in [0, 1]$ とします。

4. 共通不動点についてのエラー項を含む弱収束定理の構造

Reich [12] は、Banach 空間の枠組みで、非拡大写像についての Mann type の点列がある条件のもとで不動点に弱収束することを示しました。この中で次の定理が Lemma として使用されています。この定理は一様凸

Banach 空間の枠組みで Mann type の点列の弱収束を考えるととき常に必要となるものです。本稿の主目的は次の定理をエラー項を含む Mann type の点列の弱収束に適用できるように拡張することです。私たちの観点では石川 type の点列は Mann type の点列に含めて考えています。

Theorem 4.1 (Reich [12]; Takahashi and Kim [19]). E を Fréchet 微分可能なノルムを持つ一様凸 *Banach* 空間とし、 C を E の空ではない閉凸集合とします。 $\{T_1, T_2, \dots\}$ を C から C への非拡大写像の列で $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$ を満たすものとします。 $x \in C$ とし、任意の $n \in \mathbf{N}$ について $S_n = T_n T_{n-1} \cdots T_1$ とします。このとき $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}\{S_m x : m \geq n\} \cap U$ は高々一点からなる集合です。ここで $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ とします。

Remark 1. 実は、著者はこの重要な定理を素直に Reich の定理と呼ぶことに少し抵抗があります。Reich [12] の証明はあまりにも短く、著者にはきちんと理解することができません。この定理の正確な証明は Takahashi and Kim [19] において初めて見るすることができます。上述の定理の形も Takahashi and Kim によるものです。また空間の 'Fréchet 微分可能なノルムを持つ' という条件はより弱い 'norm to norm 連続な双対写像を持つ' という条件に換えることができます。この事実は本質的には高橋 [16] の中で示されています。ただし本当に弱い条件かどうかということ、この2つの条件を持つ空間の関係は良く分っていないようです。

この節では特に断らない場合、 E は norm to norm で連続な双対写像 J を持つ一様凸な *Banach* 空間とし、 C を E の空ではない閉凸部分集合、 $\{T_n\}$ を $\bigcap_n F(T_n) \neq \emptyset$ を満たす C から C への非拡大写像の列、 D を $\bigcap_n F(T_n)$ の空ではない閉凸部分集合、 $\{S_n\}$ を C から C への非拡大写像の列とします。次に、この節で使用する記法を説明し、Main result を得るために簡単ですが重要ないくつかの Lemma を示します。

$x \in C$ とするとき、任意の $n, l \in \mathbf{N}$ について $U_n^l x = T_n x$, $V_n^l x = S_n x$ とし、 U_n^{n+l} と V_n^{n+l} を

$$(4.1) \quad U_n^{n+l} x = T_{n+l} U_n^{n+l-1} x \quad \text{and} \quad V_n^{n+l} x = S_{n+l} V_n^{n+l-1} x$$

と帰納的に定義します。簡便さのために、 $U_0 = V_0 = I$ とし $U_n = U_1^n$, $V_n = V_1^n$ とします。 I は恒等写像です。

この節で、私たちは次の iterative scheme を扱います。 $u_1 = x_0 \in C$ とし、任意の $n \in \mathbf{N}$ について

$$(4.2) \quad u_{n+1} = S_n u_n = S_n \cdots S_1 x_0 = V_n x_0$$

として C の点列 $\{u_n\}$ を生成します。 $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1)$ の数列とし、 $n \in \mathbf{N}$ ごとに $\{T_{\alpha_n}\}$ と $\{S_{\alpha_n}\}$ を、すべての $x \in C$ について

$$T_{\alpha_n} x = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T_n x \quad \text{and} \quad S_{\alpha_n} x = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) S_n x$$

と定義します。各 T_{α_n} と S_{α_n} が C から C への非拡大写像で $\bigcap_n F(T_n) = \bigcap_n F(T_{\alpha_n})$ となることは明らかです。紛れのないように $\{T_{\alpha_n}\}$ と $\{S_{\alpha_n}\}$ については $\{U_n\}$, $\{U_n^{n+l}\}$, $\{V_n\}$, $\{V_n^{n+l}\}$ の代わりに $\{U_{\alpha_n}\}$, $\{U_{\alpha_n}^{\alpha_n+l}\}$, $\{V_{\alpha_n}\}$, $\{V_{\alpha_n}^{\alpha_n+l}\}$ という記法を使用します。このとき $\{T_{\alpha_n}\}$ と $\{S_{\alpha_n}\}$ については、iterative scheme (4.2) は $u_1 = x_0 \in C$ とし、任意の $n \in \mathbf{N}$ について

$$(4.3) \quad u_{n+1} = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n) S_n u_n = S_{\alpha_n} u_n = S_{\alpha_n} \cdots S_{\alpha_1} x_0 = V_{\alpha_n} x_0$$

となります。これはエラー項を含む Mann type iteration と呼ばれるものです。この時点ではまだ明らかではありませんが、私たちの観点では木村-高橋 [9] に従って、エラー項は $\{S_n\}$ に含まれると考えています。エラー項を含む Mann type の点列の弱収束を扱うとき、著者が本質的に重要だと考える条件を導入します。 $\{S_n\}$ が次の条件を満たすとき

$$(KTT) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|S_n y - y\| < \infty \quad \text{for any } y \in D$$

(KTT)-sequence with $\{T_n\}$ and D と呼びます。 $D = \cap_n F(T_n)$ の場合は、(KTT)-sequence with $\{T_n\}$ といいます。

$x_0 \in C$, $v_0 \in D$ とします。このとき $M = \sum_{n=1}^{\infty} \|S_n v_0 - v_0\| < \infty$ です。 $C_0 = \{x \in C : \|x - v_0\| \leq \|x_0 - v_0\|\}$, $C_M = \{x \in C : \|x - v_0\| \leq \|x_0 - v_0\| + M\}$, $C_b = \{x \in C : \|x - v_0\| \leq \|x_0 - v_0\| + 2M\}$, $F_M = D \cap C_M$ とします。

Lemma 4.2. E を *norm to norm* で連続な双対写像 J を持つ一様凸な Banach 空間とし、 C を E の空ではない閉凸部分集合、 $\{T_n\}$ を $\cap_n F(T_n) \neq \emptyset$ を満たす C から C への非拡大写像の列、 $x_0 \in C$ 、 D を $\cap_n F(T_n)$ の空ではない閉凸部分集合とします。 $\{S_n\}$ を (KTT)-sequence with $\{T_n\}$ and D とし、 $y \in D$ とします。 $n \in \mathbf{N}$ ごとに $y_{n+1} = S_n y$ とすれば次の事実が成立します。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n - y\| < \infty, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \|y - S_n y_n\| < \infty, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n - S_n y_n\| < \infty.$$

Proof. $\{S_n\}$ は (KTT)-sequence with $\{T_n\}$ and D ですから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n - y\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|S_n y - y\| < \infty.$$

となり (1) を得ます。

$$\begin{aligned} \|y - S_n y_n\| &\leq \|y - S_n y\| + \|S_n y - S_n y_n\| \leq \|y - y_{n+1}\| + \|y - y_n\|, \\ \|y_n - S_n y_n\| &\leq \|y_n - y\| + \|y - S_n y_n\|. \end{aligned}$$

ですから、(2) そして (3) を得ます。 □

Lemma 4.3. E , C , $\{T_n\}$, D と $\{S_n\}$ は Lemma 4.2 と同じとします。 $x \in C$, $y \in D$ とすれば、ある $c \geq 0$ が存在して $\{\|V_n x - y\|\}$ は c に収束します。

Proof. 仮定より

$$\|V_n x - y\| = \|S_n V_{n-1} x - S_n y\| + \|S_n y - y\| \leq \|V_{n-1} x - y\| + \|S_n y - y\|$$

ですから、Lemma 4.2(1) と Tan and Xu の Lemma 3.4 によって結論を得ます。 □

Lemma 4.4. E , C , $\{T_n\}$, D と $\{S_n\}$ は Lemma 4.2 と同じとします。 $y \in D$ 、 $n \in \mathbf{N}$ について $y_{n+1} = S_n y$ とすれば、任意の $\varepsilon > 0$ について、 $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して $n > n_0$ であれば、すべての $l \in \mathbf{N}$ について $\|V_n^{n+l} y_n - y\| < \varepsilon$ となります。

Proof. Lemma 4.2 によって、任意の $n, l \in \mathbf{N}$ について

$$\begin{aligned} \|V_n^{n+l} y_n - y\| &\leq \|S_{n+l} V_n^{n+l-1} y_n - S_{n+l} y\| + \|S_{n+l} y - y\| \leq \|V_n^{n+l-1} y_n - y\| + \|S_{n+l} y - y\| \\ &\leq \|V_n^n y_n - y\| + \sum_{j=1}^l \|S_{n+j} y - y\| \leq \|S_n y_n - y\| + \sum_{j=1}^l \|S_{n+j} y - y\| \end{aligned}$$

となり、 $n \rightarrow \infty$ のとき右辺は 0 に収束するので結論を得ます。 □

Lemma 4.5. E , C , $\{T_n\}$, D と $\{S_n\}$ は Lemma 4.2 と同じとします。 $x_0 \in C$, $v_0 \in D$ とすると、すべての $n, l \in \mathbf{N}$ について次の条件が成立します。

$$(1) \quad V_n^{n+l}(C_0) \subset C_M, \quad \text{and} \quad (2) \quad V_n^{n+l}(C_M) \subset C_b.$$

Proof. C_0 と C_M の定義より、 $x \in C_0$ ならば $\|x - v_0\| \leq \|x_0 - v_0\|$ で、 $x \in C_M$ ならば $\|x - v_0\| \leq \|x_0 - v_0\| + M$ です。ここで $v_0 \in D$ 、 $M = \sum_{n=1}^{\infty} \|S_n v_0 - v_0\| < \infty$ です。Lemma 4.2 より、すべての $x \in C_M$ について

$$\begin{aligned}
\|V_n^{n+l}x - v_0\| &\leq \|S_{n+l}V_n^{n+l-1}x - S_{n+l}v_0\| + \|S_{n+l}v_0 - v_0\| \\
&\leq \|V_n^{n+l-1}x - v_0\| + \|S_{n+l}v_0 - v_0\| \leq \|V_n^n x - v_0\| + \sum_{j=1}^l \|S_{n+j}v_0 - v_0\| \\
&\leq \|S_n x - v_0\| + \sum_{j=1}^l \|S_{n+j}v_0 - v_0\| \leq \|x - v_0\| + \sum_{j=0}^l \|S_{n+j}v_0 - v_0\| \leq \|x - v_0\| + M
\end{aligned}$$

となって結論を得ます。 $\square$

Lemma 4.6. $E, C, \{T_n\}, D$ と $\{S_n\}$ は Lemma 4.2 と同じとします。 $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1)$ の数列とします。このとき $\{S_{\alpha_n}\}$ は (KTT)-sequence with $\{T_n\}$ and D となります。

Proof. 仮定より $\{S_n\}$ は (KTT)-sequence with $\{T_n\}$ and D です。 $\cap_n F(T_{\alpha_n}) = \cap_n F(T_n)$ も明らかです。任意の $u \in \cap_n F(T_{\alpha_n}) = \cap_n F(T_n)$ について $n \in \mathbf{N}$ ごとに

$$S_{\alpha_n}u - u = (\alpha_n u + (1 - \alpha_n)S_n u) - (\alpha_n u + (1 - \alpha_n)u) = (1 - \alpha_n)(S_n u - u),$$

となりますから、 $\{S_{\alpha_n}\}$ も (KTT)-sequence with $\{T_n\}$ and D となります。 $\square$

Remark 2. $E, C, \{T_n\}, D$ と $\{S_n\}$ は Lemma 4.2 と同じとします。この枠組みで $\{S_n\}$ は (KTT)-sequence with $\{T_n\}$ and D です。 Lemma 4.6 によって $\{S_{\alpha_n}\}$ も (KTT)-sequence with $\{T_n\}$ and D です。 $x_0 \in C, v_0 \in D$ とすると、 C_M の定義から $F_M = D \cap C_M \neq \emptyset$ です。私たちは各 T_n を C_M から C_M への非拡大写像と考えることができます。 Lemma 4.5 によって、 $S_n, S_{\alpha_n}, V_n^{n+l}$ と $V_{\alpha_n}^{\alpha_n+l}$ を C_M から C_b への非拡大写像と考えることもできます。 $\{u_n\}$ を私たちの iterative scheme (4.2) または (4.3) で生成された点列とすれば、 $\{u_n\}$ は C_M の点列となります。したがって私たちは、一般性を失うことなしに、有界閉凸集合 C_M の上で我々の議論を行うことができます。更に、Tan and Xu の結果を使用して得た Lemma 4.3 によって、任意の $u \in D$ について数列 $\{\|u_n - u\|\}$ はある $c \geq 0$ に収束します。この結果は、エラー項を含む Mann type の点列について弱収束を考えると非常に重要なものです。

ここで、本稿の Main result を示します。これは Reich の Theorem 4.1 の 1 つの拡張となります。

Theorem 4.7 (Takahashi and Takeuchi). E を norm to norm で連続な双対写像 J を持つ一様凸な Banach 空間とし、 C を E の空ではない閉凸部分集合、 $\{T_n\}$ を $\cap_n F(T_n) \neq \emptyset$ を満たす C から C への非拡大写像の列、 $x_0 \in C, D$ を $\cap_n F(T_n)$ の空ではない閉凸部分集合とします。 $\{S_n\}$ を (KTT)-sequence with $\{T_n\}$ and D とします。 $u_1 = x_0 \in C$ とし $\{u_n\}$ を $n \in \mathbf{N}$ ごとに (4.2):

$$u_{n+1} = S_n u_n = S_n \cdots S_1 x_0 = V_n x_0$$

で生成される C の点列とします。 $\{u_{n_i(k)}\}$ と $\{u_{n_j(k)}\}$ を D の要素 w と v に弱収束する $\{u_n\}$ の部分列とすれば、 $w = v$ となります。

Proof. 一般性を失うことなしに、 $k \in \mathbf{N}$ ごとに $n_j(k) > n_i(k)$ を仮定することができます。 $\lambda \in (0, 1), n \in \mathbf{N}$ ごとに $v_{n+1} = S_n v, w_{n+1} = S_n w$ とします。 $\varepsilon > 0$ を任意にとります。

$\{u_n\}$ が有界であることと、 J が norm to norm で連続であることより

$$\|(v - w) + \lambda_0(u_n - v) - (v - w)\| < \delta \Rightarrow \|u_{n+l} - u_n\| \|J(v - w + \lambda_0(u_n - v)) - J(v - w)\| < \varepsilon/2.$$

となるような $\delta > 0$ が存在します。すべての $n \in \mathbf{N}$ について $\|\lambda u_n + (1 - \lambda)v - w\| = \|v - w + \lambda(u_n - v)\|$ となることは明らかですから、充分小さな実数 $\lambda_0 > 0$ を選べば、 n に無関係に

$$\|(v-w) + \lambda_0(u_n - v) - (v-w)\| = \lambda_0\|u_n - v\| < \delta.$$

となります。したがって、すべての $n, l \in N$ について

$$(4.4) \quad \begin{aligned} & |\langle u_{n+l} - u_n, J(v-w + \lambda_0(u_n - v)) \rangle - \langle u_{n+l} - u_n, J(v-w) \rangle| \\ & \leq \|u_{n+l} - u_n\| \|J(v-w + \lambda_0(u_n - v)) - J(v-w)\| < \varepsilon/2 \end{aligned}$$

が成立します。一方で、Lemma 4.3, Lemma 4.4 と Theorem 3.5 によって、 $l \in N$ に無関係に

$$(4.5) \quad \begin{aligned} & \gamma(\|V_n^{n+l}(\lambda V_{n-1}x_0 + (1-\lambda)v_n) - (\lambda V_n^{n+l}V_{n-1}x_0 + (1-\lambda)V_n^{n+l}v_n)\|) \\ & \leq \|V_{n-1}x_0 - v_n\| - \|V_n^{n+l}V_{n-1}x_0 - V_n^{n+l}v_n\| \\ & \leq \|V_{n-1}x_0 - v\| + \|v - v_n\| - (\|V_{n+l}x_0 - v\| - \|v - V_n^{n+l}v_n\|) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となります。 γ は Theorem 3.5 で与えられた関数です。 γ の性質と Lemma 4.4 によって、任意の $\varepsilon_1 > 0$ について充分大きな n を選べば、すべての $l \in N$ について

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & \|V_n^{n+l}(\lambda V_{n-1}x_0 + (1-\lambda)v_n) - (\lambda V_n^{n+l}V_{n-1}x_0 + (1-\lambda)V_n^{n+l}v_n)\| \leq \varepsilon_1/4, \\ & \|v - V_n^{n+l}v_n\| + \|w - V_n^{n+l}w_n\| \leq \varepsilon_1/4, \\ & \|v - v_n\| + \|w - w_n\| \leq \varepsilon_1/4 \end{aligned}$$

とすることができます。(4.5) と (4.6) によって、次の不等式が成立します。

$$(4.7) \quad \begin{aligned} & \|\lambda V_n^{n+l}V_{n-1}x_0 + (1-\lambda)v - w\| \\ & \leq \|\lambda V_n^{n+l}V_{n-1}x_0 + (1-\lambda)V_n^{n+l}v_n - V_n^{n+l}w_n\| + \|v - V_n^{n+l}v_n\| + \|w - V_n^{n+l}w_n\| \\ & \leq \|\lambda V_n^{n+l}V_{n-1}x_0 + (1-\lambda)V_n^{n+l}v_n - V_n^{n+l}(\lambda V_{n-1}x_0 + (1-\lambda)v_n)\| \\ & \quad + \|V_n^{n+l}(\lambda V_{n-1}x_0 + (1-\lambda)v_n) - V_n^{n+l}w_n\| + \|v - V_n^{n+l}v_n\| + \|w - V_n^{n+l}w_n\| \\ & \leq \|(\lambda V_{n-1}x_0 + (1-\lambda)v_n) - w_n\| + \varepsilon_1/2 \\ & \leq \|\lambda V_{n-1}x_0 + (1-\lambda)v - w\| + \|v - v_n\| + \|w - w_n\| + \varepsilon_1/2 \\ & \leq \|\lambda V_{n-1}x_0 + (1-\lambda)v - w\| + \varepsilon_1. \end{aligned}$$

この不等式と、実数 a と b について $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ が成立すること、 $\{u_n\}$ が有界であることより、任意の $\varepsilon_2 > 0$ について充分大きい n を選べば、すべての $l \in N$ について

$$(4.8) \quad \|\lambda u_{n+l} + (1-\lambda)v - w\|^2 - \|\lambda u_n + (1-\lambda)v - w\|^2 < \varepsilon_2$$

となります。このようにして、(4.8) と (4.4) より、 $\varepsilon_2 = \lambda_0\varepsilon$ とすれば

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 & > \|\lambda_0 u_{n+l} + (1-\lambda_0)v - w\|^2 - \|\lambda_0 u_n + (1-\lambda_0)v - w\|^2 \\ & \geq 2\lambda_0 \langle u_{n+l} - u_n, J(v-w + \lambda_0(u_n - v)) \rangle \end{aligned}$$

よって

$$\varepsilon/2 > \langle u_{n+l} - u_n, J(v-w + \lambda_0(u_n - v)) \rangle \geq \langle u_{n+l} - u_n, J(v-w) \rangle - \varepsilon/2.$$

を得ます。結果として、任意の $\varepsilon > 0$ について充分大きな $n \in N$ を選べば、すべての $l \in N$ について

$$\langle u_{n+l} - u_n, J(v-w) \rangle < \varepsilon$$

が成立します。 $k \in N$ ごとに $n_j(k) > n_i(k)$ であることから、充分大きな $k \in N$ を選べば

$$\langle u_{n_j(k)} - u_{n_i(k)}, J(v-w) \rangle < \varepsilon$$

となります。仮定より、 $\{u_{n_i(k)}\}$ と $\{u_{n_j(k)}\}$ は w と v に弱収束します。これは $\|v-w\|^2 \leq 0$ を意味します。□

Remark 3. エラー項を含むケースを扱っていますから、この定理の証明はやや複雑に見えます。しかし、この手法を Reich の定理の証明に直接適用すると、間違っていなければ従来の証明よりずっと simple なものになっています。

この定理は、エラー項を含む iteration について広い範囲に応用を持ちます。ここでは紙数の関係で石川 type と呼ばれているものの中から、構造的にやや複雑で面白い Fukhar-Ud-Din と高橋の結果に関係するもの 1 つだけをこの定理の応用例としてあげます。

次の結果は iteration に使用する非拡大写像ともう 1 つの非拡大写像の関係を示すものです。特に (3) は一様凸な Banach 空間の弱収束を議論するとき頻繁に使用されますので、何故 Lemma として抜き出されていないのか不思議に思われるものです。一般の非拡大写像より良い性質を持つもの、例えば増大作用素のリゾルベントなど応用上よく使用されるものは、共通不動点が任意の $i \in \mathbf{N}$ について $\cap_n F(T_n) = F(T_i)$ と単純な構造を持っています。これらについては次の Lemma よりもう少し精密な結果を得ることができます。

Lemma 4.8. E を norm to norm で連続な双対写像 J を持つ一様凸な Banach 空間とし、 C を E の空ではない閉凸部分集合とします。 $0 < a \leq b < 1$ とします。 $\{\alpha_n\}$ を $[a, b]$ の数列とし、 $\{c_n\}$ を $c_n \geq 0$ を満たし 0 に収束する数列とします。 $\{A_n\}$ と $\{B_n\}$ を C から C への非拡大写像の列とします。 $u_1 = x_0 \in C$ とし $\{u_n\}$ を $n \in \mathbf{N}$ ごとに、

$$u_{n+1} = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n) A_n u_n$$

で生成される C の点列とします。このとき次が成立します。

- (1) $u \in E$ と $c > 0$ が存在して $\{\|u_n - u\|\}$ が c に収束するとし、 $\{\alpha'_n\}$ を $[a, 1]$ の数列とします。このとき $n \in \mathbf{N}$ ごとに

$$\|u_{n+1} - u\| \leq \alpha'_n \|\alpha_n(u_n - u) + (1 - \alpha_n)(B_n u_n - u)\| + (1 - \alpha'_n) \|u_n - u\| + c_n$$

であれば、 $\{\|B_n u_n - u_n\|\}$ は 0 に収束します；

- (2) $u \in E$ と $c > 0$ が存在して $\{\|u_n - u\|\}$ が c に収束するとします。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n u_n - B_n u_n\| = 0$ であれば、 $\{\|B_n u_n - u_n\|\}$ は 0 に収束します；

- (3) $\cap_n F(B_n) \neq \emptyset$ で $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n u_n - B_n u_n\| < \infty$ であれば、 $\{\|B_n u_n - u_n\|\}$ は 0 に収束します。

Proof. (1) を示します。 $\{\alpha_n\}$ の仮定と $\{\|u_n - u\|\}$ が有界であることから、充分大きな $n \in \mathbf{N}$ について $l_1 < \alpha_n(1 - \alpha_n)$ と $c/2 < \|u_n - u\| < l_2$ を満たす $l_1 > 0, l_2 > 0$ を選べます。 E が一様凸であることと凸性の modulus δ の性質より

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u\| &\leq \alpha'_n \|\alpha_n(u_n - u) + (1 - \alpha_n)(B_n u_n - u)\| + (1 - \alpha'_n) \|u_n - u\| + c_n \\ &\leq \alpha'_n \|u_n - u\| \left(1 - 2\alpha_n(1 - \alpha_n) \delta \left(\frac{\|B_n u_n - u_n\|}{l_2} \right) \right) + (1 - \alpha'_n) \|u_n - u\| + c_n. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2a l_1 \left(\frac{c}{2} \right) \delta \left(\frac{\|B_n u_n - u_n\|}{l_2} \right) \\ &\leq 2\alpha'_n \alpha_n (1 - \alpha_n) \|u_n - u\| \delta \left(\frac{\|B_n u_n - u_n\|}{l_2} \right) \leq \|u_n - u\| - \|u_{n+1} - u\| + c_n \end{aligned}$$

となり、右辺が 0 に収束することと δ の性質から $\{\|B_n u_n - u_n\|\}$ は 0 に収束します。(2) を示します。

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u\| &= \|\alpha_n u_n + (1 - \alpha_n)(A_n u_n - B_n u_n) + (1 - \alpha_n) B_n u_n - u\| \\ &\leq \|\alpha_n(u_n - u) + (1 - \alpha_n)(B_n u_n - u)\| + \|A_n u_n - B_n u_n\| \end{aligned}$$

ですから、 $n \in \mathbf{N}$ ごとに $\alpha'_n = 1, c_n = \|A_n u_n - B_n u_n\|$ とすれば、(1) より、 $\{\|B_n u_n - u_n\|\}$ は 0 に収束します。特に、 $A_n = B_n$ とすれば $\{\|A_n u_n - u_n\|\}$ が 0 に収束します。(3) を示します。仮定より、 $u \in \cap_n F(B_n)$ が存在します。明らかに

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u\| &\leq \alpha_n \|u_n - u\| + (1 - \alpha_n) \|B_n u_n - u\| + (1 - \alpha_n) \|A_n u_n - B_n u_n\| \\ &\leq \|u_n - u\| + \|A_n u_n - B_n u_n\| \end{aligned}$$

です。仮定より最後の項は総和可能です。したがって Lemma 3.4 より、 $c \geq 0$ が存在して $\{\|u_n - u\|\}$ は c に収束します。 $c = 0$ であれば簡単に結果を得ますから、 $c > 0$ を仮定します。最後の項は当然 0 に収束します。このとき (2) によって、 $\{\|B_n u_n - u_n\|\}$ は 0 に収束します。□

次の結果は Fukhar-Ud-Din と高橋 [8] の定理の拡張です。

Theorem 4.9. E を norm to norm で連続な双対写像 J を持つ一様凸な Banach 空間とし、 C を E の空ではない閉凸部分集合とします。 $\{W_n\}$ と $\{Y_n\}$ を $D = (\cap_n F(W_n)) \cap (\cap_n F(Y_n)) \neq \emptyset$ を満たす C から C への非拡大写像の列とします。 $\{r_n\}$ と $\{s_n\}$ を条件 (3.1) を満たす $(0, 1)$ の数列とし、 $\{A_n\}$ を (ABT) -sequence with $\{r_n\}$ and $\{W_n\}$ 、 $\{B_n\}$ を (ABT) -sequence with $\{s_n\}$ and $\{Y_n\}$ とします。 $\{\alpha_n\}$ 、 $\{\beta_n\}$ と $\{\gamma_n\}$ 、 $\{\alpha'_n\}$ 、 $\{\beta'_n\}$ と $\{\gamma'_n\}$ を $[0, 1]$ の数列で次の条件を満たすものとします。

$$\begin{aligned} 0 < a \leq \alpha_n, a \leq \alpha_n + \gamma_n \leq b < 1, \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty, \\ 0 < a \leq \alpha'_n, a \leq \alpha'_n + \gamma'_n \leq b < 1, \alpha'_n + \beta'_n + \gamma'_n = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty. \end{aligned}$$

$\{d_n\}$ と $\{e_n\}$ を C の有界な点列とします。 $u_1 = x_0 \in C$ とし、 $n \in \mathbf{N}$ ごとに

$$w_n = \alpha'_n u_n + \beta'_n B_n u_n + \gamma'_n e_n \quad u_{n+1} = \alpha_n u_n + \beta_n A_n w_n + \gamma_n d_n$$

として C の点列 $\{u_n\}$ を生成します。このとき $\{u_n\}$ は $(\cap_n F(W_n)) \cap (\cap_n F(Y_n))$ の要素に弱収束します。

Proof. C から C への非拡大写像 T_n を $T_n = A_n$ で定義します。 $\{A_n\}$ と $\{B_n\}$ の性質から、 $D \subset \cap_n F(T_n) = \cap_n F(A_n) = \cap_n F(W_n)$ と $D = (\cap_n F(A_n)) \cap (\cap_n F(B_n))$ は明らかです。 $1 - \alpha_n = \beta_n + \gamma_n$ ですから、 $n \in \mathbf{N}$ ごとに $\delta_n = \beta_n / (1 - \alpha_n)$ とすると $1 - \delta_n = 1 - \beta_n / (1 - \alpha_n) = (\beta_n + \gamma_n - \beta_n) / (1 - \alpha_n) = \gamma_n / (1 - \alpha_n)$ となるので

$$u_{n+1} = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n) (\delta_n A_n w_n + (1 - \delta_n) d_n)$$

となります。 $n \in \mathbf{N}$ ごとに C から C への非拡大写像 L_n と S_n を次の様に定義します。 $x \in C$ について

$$(4.9) \quad L_n x = \alpha'_n x + \beta'_n B_n x + \gamma'_n e_n \quad \text{and} \quad S_n x = \delta_n A_n L_n x + (1 - \delta_n) d_n.$$

このとき、 $u_{n+1} = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n) S_n u_n$ です。任意の $u \in D = (\cap_n F(A_n)) \cap (\cap_n F(B_n))$ について

$$\begin{aligned} \|L_n u - u\| &= \|(\alpha'_n u + \beta'_n B_n u + \gamma'_n e_n) - u\| = \gamma'_n \|e_n - u\|, \\ \|A_n L_n u - u\| &= \|A_n L_n u - A_n u\| \leq \|L_n u - u\| = \gamma'_n \|e_n - u\|, \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \|S_n u - u\| &= \delta_n \|A_n L_n u - u\| + (1 - \delta_n) \|d_n - u\| \\ &\leq \gamma'_n \|e_n - u\| + (1 - \delta_n) \|d_n - u\|. \end{aligned}$$

は明らかです。 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \delta_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n / (1 - b) < \infty$ 。ですから、この結果と $\{d_n\}$ と $\{e_n\}$ が有界であることより、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|S_n u - u\| < \infty$ を得ます。つまり、 $\{S_n\}$ と $\{S_{\alpha_n}\}$ は Lemma 4.6 によって (KTT) -sequences with $\{T_n\}$

and D となります。したがって Lemma 4.5 によって $\{u_n\}$ は有界です。このことから、 $\{L_n u_n\} = \{w_n\}$, $\{A_n w_n\}$, $\{A_n u_n\}$ と $\{B_n u_n\}$ も有界です。 $u \in D$ とすると、Lemma 4.3 と Remark 2 によって、 $c \geq 0$ が存在して $\{\|u_n - u\|\}$ は c に収束します。 $c = 0$ とすれば簡単に結論を得ますので、 $c > 0$ を仮定します。

$\{\|A_n u_n - u_n\|\}$ と $\{\|B_n u_n - u_n\|\}$ が 0 に収束することを示します。 $\{\|u_n - u\|\}$ が $c > 0$ に収束するので、 $\{\|S_n u_n - u_n\|\}$ が 0 に収束することは、 $u_{n+1} = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n) S_n u_n$ であることと Lemma 4.8 (2) より直ちに得られます。

$$w_n = \alpha'_n u_n + (\beta'_n + \gamma'_n) B_n u_n + \gamma'_n (e_n - B_n u_n), \quad u_{n+1} = \alpha_n u_n + (\beta_n + \gamma_n) A_n w_n + \gamma_n (d_n - A_n w_n)$$

は明らかですから

$$\begin{aligned} \|A_n w_n - u\| &= \|A_n w_n - A_n u\| \leq \|w_n - u\| \\ &\leq \|\alpha'_n (u_n - u) + (1 - \alpha'_n) (B_n u_n - u)\| + \gamma'_n \|e_n - B_n u_n\| \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u\| &\leq \alpha_n \|u_n - u\| + (1 - \alpha_n) \|A_n w_n - u\| + \gamma_n \|d_n - A_n w_n\| \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|\alpha'_n (u_n - u) + (1 - \alpha'_n) (B_n u_n - u)\| + \alpha_n \|u_n - u\| \\ &\quad + (1 - \alpha_n) \gamma'_n \|e_n - B_n u_n\| + \gamma_n \|d_n - A_n w_n\| \end{aligned}$$

となります。最後の 2 項は総和可能ですから、Lemma 4.8 (1) によって、 $\{\|B_n u_n - u_n\|\}$ が 0 に収束することが分ります。更に (4.9) より

$$\begin{aligned} \|A_n u_n - S_n u_n\| &= \|A_n u_n - \delta_n A_n w_n - (1 - \delta_n) d_n\| \leq \delta_n \|u_n - w_n\| + (1 - \delta_n) \|A_n u_n - d_n\|, \\ \|w_n - u_n\| &\leq \beta'_n \|B_n u_n - u_n\| + \gamma'_n \|e_n - u_n\|. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \|A_n u_n - u_n\| &\leq \|A_n u_n - S_n u_n\| + \|S_n u_n - u_n\| \\ &\leq \delta_n \beta'_n \|B_n u_n - u_n\| + \delta_n \gamma'_n \|e_n - u_n\| + (1 - \delta_n) \|A_n u_n - d_n\| + \|S_n u_n - u_n\| \\ &\leq \|B_n u_n - u_n\| + \|S_n u_n - u_n\| + \gamma'_n \|e_n - u_n\| + (1 - \delta_n) \|A_n u_n - d_n\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となります。このようにして $\{\|A_n u_n - u_n\|\}$ も 0 に収束します。

A を (ABT)-mapping with $\{r_n\}$ and $\{W_n\}$, B を (ABT)-mapping with $\{s_n\}$ and $\{Y_n\}$ とします。 $\{u_n\}$ が有界であることと A の性質によって

$$\|A u_n - u_n\| \leq \|A u_n - A_n u_n\| + \|A_n u_n - u_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を得ます。したがって、 $\{\|A u_n - u_n\|\}$ は 0 に収束します。同様に、 $\{\|B u_n - u_n\|\}$ も 0 に収束します。 $F(A) = \cap_n F(A_n) = F(W_n)$, $F(B) = \cap_n F(B_n) = F(Y_n)$ ですから、 $D = F(A) \cap F(B) \subset \cap_n F(T_n)$ です。 $\{u_n\}$ は有界ですから、 C の要素に弱収束する部分列が存在します。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A u_n - u_n\| = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B u_n - u_n\| = 0$ と Theorem 3.1 によって、 $\{u_n\}$ の弱収束する部分列の収束先は $D = F(A) \cap F(B)$ の要素です。Theorem 4.7 によって、 $\{u_n\}$ の弱収束する部分列の収束先は同じです。したがって、 $\{u_n\}$ は $D = (\cap_n F(A_n)) \cap (\cap_n F(B_n))$ の要素に弱収束します。□

References

- [1] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi and M. Toyoda. "Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space", *Nonlinear Analysis* **67** (2007), 2350–2360.
- [2] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi and M. Toyoda. "Finding common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space", *Scientiae Mathematicae Japonicae* **66** (2007), 325–335.
- [3] F. E. Browder, "Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces", *Archs. Ration. Mech. Anal.* **24** (1967), 82–90.
- [4] F. E. Browder, "Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces", *Nonlinear functional analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol XVIII, Part2, Chicago, Ill., 1968)*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1973), 251–262.
- [5] R. E. Bruck, "Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.* **179** (1973), 251–262.
- [6] R. E. Bruck, "A simple proof of the mean ergodic theorems for nonlinear contractions in Banach spaces", *Israel J. Math.* **32** (1974), 107–116.
- [7] R. E. Bruck, "On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces", *Israel J. Math.* **38** (1981), 304–314.
- [8] H. Fukahr-Ud-Din and W. Takahashi, "COMMON FIXED POINT ITERATIONS WITH ERRORS FOR TWO NONEXPANSIVE MAPPINGS", *Proceeding of international Conference on N.A.C.A.(Okinawa) J. Math.* **38** (2005), 71–81.
- [9] Y. Kimura and W. Takahashi, "A Generalized Proximal Point Algorithm and Implicit Iterative Schemes for a Sequence of Operators on Banach spaces", *Math. Set-Valued Anal*
- [10] W. R. Mann, "Mean value methods in iteration", *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953), 506–510.
- [11] S. Reich, "On infinite products of resolvents", *Atti Acad. Naz. Lincei* **63** (1977), 338–340.
- [12] S. Reich, "Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces", *J. Math. Anal. Appl.* **67** (1979), 274–276.
- [13] R. T. Rockafellar, "Monotone operators and the proximal point algorithm", *SIAM J. Control Optim.*, **14** (1976), 877–898.
- [14] N. Shioji, "Strong convergence theorems of nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups", *RIMS Kokyuroku Kyoto university*, **1031** (1998), 157–167, (Japanese).
- [15] W. Takahashi, "Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications", *Proceeding of Workshop on Fixed Point Theory (Kzimirz Donly, 1997)*, vol 51, (1997), 277–292.
- [16] W. Takahashi, "Nonlinear Functional Analysis", Yokohama Publishers, 2000.
- [17] W. Takahashi, "Convex Analysis and Approximation of Fixed Points", Yokohama Publishers, 2000 (Japanese).
- [18] W. Takahashi, "Introduction to Nonlinear and Convex Analysis", Yokohama Publishers, 2009.
- [19] W. Takahashi and G. E. Kim, "Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces", *Math. Japon.* **48** (1998), 1–9.
- [20] K.K. Tan and H. K. Xu, "Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process", *J. Math. Anal.* **178** (1993), 301–308.