数理解析研究所講究録
第 1685 巻 2010 年 138-148

HYBRID TYPE METHOD による 非拡大半群に対する強収束定理と共通不動点の存在について

山梨大学教育人間科学部 厚芝 幸子 (SACHIKO ATSUSHIBA)

1. 序

H を実 Hilbert 空間とし, C を H の空でない閉凸部分集合とする. C から C への写像 T が C から C への非拡大であるとは任意の $x,y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

をみたすときであり, $F(T)$ で集合 $\{x \in C : x = Tx\}$ を表す. 非拡大写像の不動点をみつける問題, すなわち, 不動点近似の問題については多くの数学者によって研究され, 幾つかの不動点をみつけるための点列近似法が研究されている. その結果として, [1, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 33] など不動点への強および弱収束定理が多数示されている. そのような中で Nakajo-Takahashi [20] は数理計画法におけるハイブリッド法の考えを用いて, 非拡大写像の不動点をみつけるための点列に関して研究し, 強収束定理を証明した ([17, 23, 26] も参照). [2] では, この定理を可換な非拡大半群に対する強収束定理へ一般化した定理を示している. 一方, Nakajo-Takahashi [20], Halpern [8] の考えをもとに Martinez-Yanes - Xu [19] は以下の点列を導入し, 強収束定理を示した:

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ y_n = \alpha_n x_1 + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{1}$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は H から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である ([3] も参照).

本報告では, Nakajo-Takahashi [20], Halpern [8], Martinez-Yanes - Xu [19] の考えを受けて, 可換な非拡大半群に対する強収束定理を示す ([20, 32] も参照). さらに, Matsushita-Takahashi [18] の考えをもとにして不動点集合が空でないという仮定なしで, 可換な非拡大半群に対して定義される点列の well-definedness について探究する. また, 共通不動点が存在するための必要十分条件も与える ([4]).

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47H09, 49M05.
Key words and phrases. Fixed point, nonexpansive mapping, nonexpansive semigroup, strong convergence, iteration, hybrid method, shrinking method.

2. 準備

本論文では以後, H は実 Hilbert 空間を表し, $x_n \to x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを表し, また $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ も x_n が x に強収束することを表す. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^+$ はそれぞれ, すべての実数からなる集合, すべての非負の実数からなる集合とする. さらに $\mathbb{N}$ はすべての正整数からなる集合を表す.

$S_1 = \{v \in H : \|v\| = 1\}$ とする. C は H の閉凸部分集合とする. すると, 任意の $x \in H$ に対して,

$$\|x - x_0\| = \min_{y\in C} \|x - y\|$$

をみたす C の元 x_0 が唯一存在する. このとき, $P_C x = x_0$ で定義される写像 P_C は H から C の上への距離射影という. x は H の元で u は C の元とする. このとき, $u = P_C x$ であることの必要十分条件は

$$\langle u - y, x - u\rangle \geq 0 \tag{2}$$

が任意の $y \in C$ に対して成立することである ([31] 参照).

以後, S は可換半群とし, $B(S)$ は S 上の有界実数値関数全体からなる Banach 空間とし, そのノルムは supremum-norm とする. また, X は $B(S)$ の部分空間を表す. 以後, 任意の $s \in S$ と $f \in B(S)$ に対して, $\ell_s f \in B(S)$ を

$$(\ell_s f)(t) = f(s + t), \qquad t \in S$$

で定義する. また ℓ_s^* で ℓ_s の共役作用素を表す. $\mu \in X^*$ に対して, $\mu(f)$ は μ の $f \in X$ での値を表すが, $\mu(f)$ を $\mu_t(f(t))$ や $\int f(t)d\mu(t)$ で表すこともある. X が 1 を含むとき, X 上の線形汎関数 μ は $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ をみたすならば X 上の mean という. さらに X は ℓ_s-invariant であるとする, つまり $\ell_s(X) \subset X$ がすべての $s \in S$ に対して成り立つとする. このとき, 任意の $s \in S$ と $f \in X$ に対して $\mu(\ell_s f) = \mu(f)$ が成立するならば, X 上の mean μ は invariant という. $s \in S$ に対して, point evaluation δ_s を $\delta_s(f) = f(s)$ をすべての $f \in B(S)$ に対して成立させるものと定義する. point evaluations の凸結合を S 上の finite mean という. S 上の finite mean は $B(S)$ の部分空間で 1 を含む任意の部分空間 X 上の mean でもある.

C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. f を S から H への関数とし, $\{f(x) : t \in S\}$ の弱閉包が弱コンパクトであることを仮定する. X を $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また任意の $y \in H$ に対して, $t \mapsto \langle f(t), y\rangle$ は X の元とする. このとき, X 上の任意の mean μ に対して $\langle f_\mu, y\rangle = \mu_s\langle f(s), y\rangle$ が任意の $y \in H$ に対して成立する $f_\mu \in C$ を考えられる ([27, 11]).

C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. C から C への写像の族 $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ が次の (i),(ii) をみたすとき, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ は C 上の非拡大半群であるという.

(i) $T(s + t) = T(s)T(t)$ が任意の $t, s \in S$ に対して成立する;

(ii) $\|T(s)x-T(s)y\|\leq\|x-y\|$ が任意の $x,y\in C$ と $s\in S$ に対して成立する.

また, $F(\mathcal{S})$ は $\{T(s):s\in S\}$ の共通不動点, すなわち $F(\mathcal{S})=\bigcap_{s\in S}F(T(s))$ を表す.

C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. $\mathcal{S}=\{T(t):t\in S\}$ を C 上の非拡大半群で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. さらに任意の $x\in C$ に対して $\{T(t)x:t\in S\}$ の弱閉包が弱コンパクトであることを仮定する. X を $B(S)$ の部分空間で $1\in X$ で任意の $s\in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また任意の $x\in C$ と $y\in H$ に対して, $t\mapsto\langle T(t)x,y\rangle$ は X の元とする. x を C の元とする. このとき, X 上の任意の mean μ に対しておお $\langle T_\mu x,y\rangle=\mu_s\langle T(s)x,y\rangle$ が任意の $y\in H$ に対して成立する $T_\mu:C\to C$ を考えられる ([27, 11]). また, T_μ は C から C への非拡大写像になることや $x\in F(\mathcal{S})$ に対して $T_\mu x=x$ が成立することも知られている.

3. HYBRID TYPE METHOD について

非拡大写像の不動点をみつける問題, すなわち, 不動点近似の問題については多くの数学者によって研究され, 幾つかの不動点をみつけるための点列近似法が研究され, 不動点への強および弱収束定理が多数示されている. そのような中で Nakajo-Takahashi [20] は数理計画法におけるハイブリッド法の考えを用いて, 以下の非拡大写像の不動点をみつけるための点列を導入し, 不動点への強収束定理を証明した.

$$\begin{cases} x_1=x\in C,\\ y_n=\alpha_nx_n+(1-\alpha_n)Tx_n,\\ C_n=\{z\in C:\|y_n-z\|\leq\|x_n-z\|\},\\ Q_n=\{z\in C:\langle x_n-z,x_1-x_n\rangle\geq 0\},\\ x_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}x\quad(n\in\mathbb{N}),\end{cases}$$

ここで $P_{C_n\cap Q_n}$ は H から $C_n\cap Q_n$ の上への距離射影である ([17, 23, 26] も参照). [2] では, この定理を可換な非拡大半群に対する強収束定理へ一般化した定理を示している. 一方, Nakajo-Takahashi [20], Halpern [8] の考えをもとに Martinez-Yanes - Xu [19] は以下の点列を導入し, 強収束定理を示した:

$$\begin{cases} x_1=x\in C,\\ y_n=\alpha_nx_1+(1-\alpha_n)Tx_n,\\ C_n=\{z\in C:\|y_n-z\|^2\leq\|x_n-z\|^2+\alpha_n(\|x_1\|^2+2\langle x_n-x_1,z\rangle)\},\\ Q_n=\{z\in C:\langle x_n-z,x_1-x_n\rangle\geq 0\},\\ x_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}x\quad(n\in\mathbb{N}),\end{cases}\tag{3}$$

ここで $P_{C_n\cap Q_n}$ は H から $C_n\cap Q_n$ の上への距離射影である. [3] では, Matsushita-Takahashi [18] の考えをもとにして, 点列 (3) について考察し, $F(T)\neq\emptyset$ という仮定

なしで点列 (3) の well-definedness を確立し, さらに共通不動点が存在するための必要十分条件も与えている. そのような中 [4] では, 可換な非拡大半群に対して以下の点列を導入した: S は可換半群とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ をみたす C 上の非拡大半群とする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $y \in H$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, y\rangle$ が X の元になるものとする. $\{\mu_n\}$ は任意の $s \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \ell_s^*\mu_n\| = 0$ をみたす X 上の means の列とする. また, $\{T_{\mu_n}\}$ は任意の $x \in C$ と $y \in H$ に対して

$$\langle T_{\mu_n}x, y\rangle = (\mu_n)_t\langle T(t)x, y\rangle$$

をみたす C 上の非拡大写像の列とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ をみたす実数列とする. $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ y_n = \alpha_n x + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases} \tag{4}$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は H から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である. この節では, まずこの点列 (4) による可換な非拡大半群の共通不動点への強収束定理について記す ([2, 4]). さらに, Matsushita-Takahashi [18] の考えを受けて, $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ という仮定なしで, その可換な非拡大半群に対して定義される点列 (4) の well-definedness について探究する. また, 共通不動点が存在するための必要十分条件は点列 (4) が有界であることも示す ([4]).

以下のように, Martinez-Yanes - Xu [19] の考えを用いて可換な非拡大半群に対する強収束定理が示せる ([19, 4]).

Theorem 3.1 ([4]). C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. S は可換半群とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ をみたす C 上の非拡大半群とする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $y \in H$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, y\rangle$ が X の元になるものとする. $\{\mu_n\}$ は任意の $s \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \ell_s^*\mu_n\| = 0$ をみたす X 上の means の列とする. また, $\{T_{\mu_n}\}$ は任意の $x \in C$ と $y \in H$ に対して

$$\langle T_{\mu_n}x, y\rangle = (\mu_n)_t\langle T(t)x, y\rangle$$

をみたす C 上の非拡大写像の列とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ であり, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ をみたす実数列とする. $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ y_n = \alpha_n x + (1-\alpha_n) T_{\mu_n} x_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は H から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である. すると $\{x_n\}$ は $P_{F(\mathcal{S})} x_1$ に強収束する.

次に, Matsushita-Takahashi [18] の考えを受けて, $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ の仮定なしで可換な非拡大半群に対して定義される点列の well-definedness を確立する.

Theorem 3.2 ([4]). C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. S は可換半群とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の非拡大半群とする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $y \in H$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, y\rangle$ が X の元になるものとする. $\{\mu_n\}$ は任意の $s \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \ell_s^* \mu_n\| = 0$ をみたす X 上の finite means の列とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ をみたす実数列とする.

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ y_n = \alpha_n x + (1-\alpha_n) T_{\mu_n} x_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は H から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である. すると $\{x_n\}$ は well-defined である.

次に, (4) で定義される点列が有界であることは $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ であることの必要十分条件であることを示す.

Theorem 3.3 ([4]). C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. S は可換半群とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の非拡大半群とする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $y \in H$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, y\rangle$ が X の元になるものとする. $\{\mu_n\}$ は任意の $s \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \ell_s^* \mu_n\| = 0$ をみたす X 上の finite means の列とする. $\{\alpha_n\}$ は

$0 \le \alpha_n \le 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ であり, $\varliminf_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ をみたす実数列とする. $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ y_n = \alpha_n gx + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n\cap Q_n}x \end{cases}$$

ここで $P_{C_n\cap Q_n}$ は H から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である. すると $\{x_n\}$ が有界であることの必要十分条件は $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ である.

4. Shrinking projection type method について

Nakajo-Takahashi [20] の考えをもとに, Takahashi-Takeuchi-Kubota [32] は以下の点列に関して研究し, 強収束定理を証明した:

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, C_1 = C, x_1 = P_{C_1}x_0 \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ここで P_{C_n} は H から C_n の上への距離射影である. 一方,[3] では Halpern [8], Martinez-Yanes - Xu [19], Takahashi-Takeuchi-Kubota [32] の考えを用いて, 以下の点列を導入して, それについて考察した: $\{\alpha_n\}$ は $0 \le \alpha_n \le 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ をみたす実数列とする. $x_0 = x$ は C の任意の点とし, $C_1 = C$, $x_1 = P_{C_1}x_0$ として, $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_1 + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases} \tag{5}$$

ここで P_{C_n} は H から C_n の上への距離射影である. [4] では, 可換な非拡大半群に対する点列を以下のように導入した: S は可換半群とし , $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ をみたす C 上の非拡大半群とする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $y \in H$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, y\rangle$ が X の元になるものとする. $\{\mu_n\}$ は任意の $s \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \ell_s^*\mu_n\| = 0$ をみたす X 上の means の列とする. また, $\{T_{\mu_n}\}$ は任意の $x \in C$ と $y \in H$ に対して

$$\langle T_{\mu_n}x, y\rangle = (\mu_n)_t\langle T(t)x, y\rangle$$

をみたす C 上の非拡大写像の列とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ をみたす実数列とする. $x_0 = x$ は C の任意の点とし, $C_1 = C$, $x_1 = P_{C_1}x_0$ として, $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_1 + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases} \tag{6}$$

ここで P_{C_n} は H から C_n の上への距離射影である.

この節では, まずこの点列 (6) による可換な非拡大半群の共通不動点への強収束定理について記す ([2, 4]). さらに, Matsushita-Takahashi [18] の考えを受けて, $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ という仮定なしで, その可換な非拡大半群に対して定義される点列 (6) の well-definedness について探究する. また, 共通不動点が存在するための必要十分条件も与える ([4]).

以下のように, 可換な非拡大半群に対する強収束定理が示せる ([19, 32, 4] も参照).

Theorem 4.1 ([4]). C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. S は可換半群とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ をみたす C 上の非拡大半群とする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $y \in H$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, y\rangle$ が X の元になるものとする. $\{\mu_n\}$ は任意の $s \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \ell_s^*\mu_n\| = 0$ をみたす X 上の means の列とする. また, $\{T_{\mu_n}\}$ は任意の $x \in C$ と $y \in H$ に対して

$$\langle T_{\mu_n}x, y\rangle = (\mu_n)_t\langle T(t)x, y\rangle$$

をみたす C 上の非拡大写像の列とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ であり, $\varliminf_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ をみたす実数列とする. $x_0 = x$ は C の任意の点とし, $C_1 = C$, $x_1 = P_{C_1}x_0$ として, $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_1 + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ここで P_{C_n} は H から C_n の上への距離射影である. すると $\{x_n\}$ は $P_{F(\mathcal{S})}x$ に強収束する.

また, $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ という仮定なしで点列 (6) の well-definedness に関する以下の定理も示せる.

Theorem 4.2 ([4]). C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. S は可換半群とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の非拡大半群とする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $y \in H$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, y\rangle$ が X の元になるものとする. $\{\mu_n\}$ は任意の $s \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \ell_s^*\mu_n\| = 0$ をみたす X 上の finite means の列とする. $\{\alpha_n\}$ は

$0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ をみたす実数列とする．$x_0 = x$ は C の任意の点とし，$C_1 = C$, $x_1 = P_{C_1}x_0$ として，$\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x_n, \\ C_n = \{z \in C_n : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ここで P_{C_n} は H から C_n の上への距離射影である．すると $\{x_n\}$ は well-defined である．

次に，$F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ であることの必要十分条件も与える．

Theorem 4.3 ([4])**.** C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする．S は可換半群とし，$\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の非拡大半群とする．X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して ℓ_s-invariant であり，また任意の $x \in C$ と $y \in H$ に対して，$t \mapsto \langle T(t)x, y\rangle$ が X の元になるものとする．$\{\mu_n\}$ は任意の $s \in S$ に対して $\lim_{n\to\infty}\|\mu_n - \ell_s^*\mu_n\| = 0$ をみたす X 上の finite means の列とする．$\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ であり，$\varliminf_{n\to\infty}\alpha_n < 1$ をみたす実数列とする．$x_0 = x$ を C の任意の元とし，$C_1 = C, x_1 = P_{C_1}x$ とし，$\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x_n, \\ C_n = \{z \in C_n : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ここで P_{C_n} は H から C_n の上への距離射影である．すると $\{x_n\}$ が有界であることの必要十分条件は $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ である．

5. 応用

この節では Theorems 4.2, 4.3 から得られる定理をいくつか記す (証明については [31] 参照，その他の定理の応用については [31, 4] 参照)．以後，C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする．

Theorem 5.1. T は C から C への非拡大写像とし，$x_0 = x$ は C の元とする．$\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ みたす実数列とする．$C_1 = C$, $x_1 = P_{C_1}x_0$ として，$\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} T^i x_n \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

ここで P_{C_n} は H から C_n の上への距離射影である. すると $\{x_n\}$ は well-defined である. また, $\{\alpha_n\}$ が $\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n < 1$ みたすならば $\{x_n\}$ が有界であることの必要十分条件は $F(T) \neq \emptyset$ である.

Theorem 5.2. T は C から C への非拡大写像とし, $x_0 = x$ は C の元とする. $\{q_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ は $q_{n,m} \geq 0$, $\sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} = 1$ を任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してみたし, かつ $\lim_n \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m+1} - q_{n,m}| = 0$ もみたす実数列とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ みたす実数列とする. $C_1 = C$, $x_1 = P_{C_1}x_0$ として, $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m}T^m x_n \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

ここで P_{C_n} は H から C_n の上への距離射影である. すると $\{x_n\}$ は well-defined である. また, $\{\alpha_n\}$ が $\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n < 1$ みたすならば $\{x_n\}$ が有界であることの必要十分条件は $F(T) \neq \emptyset$ である.

Theorem 5.3. U,T は C から C への非拡大写像で $UT = TU$ であり, $x_0 = x$ は C の元とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ みたす実数列とする. $C_1 = C$, $x_1 = P_{C_1}x_0$ として, $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i,j=0}^{n} T^i U^j x_n \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

ここで P_{C_n} は H から C_n の上への距離射影である. すると $\{x_n\}$ は well-defined である. また, $\{\alpha_n\}$ が $\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n < 1$ みたすならば $\{x_n\}$ が有界であることの必要十分条件は $F(T) \cap F(U) \neq \emptyset$ である.

References

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of nonexpansive semigroups by the Mann iteration process*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska **51** (2) (1997), 1–16.

[2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive semigroups by a hybrid method*, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 231–242.

[3] S. Atsushiba and W. Takahashi, *The sequences by the hybrid type method and the existence of common fixed points of nonexpansive semigroups in a Hilbert space*, submitted.

[4] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by the hybrid type method and the existence of common fixed points of nonexpansive semigroups* , submitted.

[5] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, **280** (1975), 1511–1514.

[6] F. E. Browder, *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces*, Proc. Sympos. Pure Math. **18**, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1976.

[7] H. Brezis and F. E. Browder, *Remarks on nonlinear ergodic theory,* Adv. Math. **25** (1977), 165-177.

[8] B. Halpern, *Fixed points of nonexpansive maps*, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 957–961.

[9] N. Hirano, *Nonlinear ergodic theorems and weak convergence theorems*, J. Math. Soc. Japan **34** (1982), 35–46.

[10] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach Spaces*, Nonlinear Anal. **10** (1986), 229–249.

[11] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, **12** (1988), 1269-1281.

[12] N. Hirano and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, Kodai Math. J. **2** (1979), 11-25.

[13] K. Kido and W. Takahashi, *Mean ergodic theorems for semigroups of linear continuous operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **103** (1984), 387–394.

[14] K. Kido and W. Takahashi, *Means on commutative semigroups and nonlinear ergodic theorems*, J. Math. Anal. Appl. **111** (1985), 585–605.

[15] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series*, Acta Math. **80** (1948), 167–190.

[16] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506–510.

[17] B. Martinet, *Regularisation d'inequations variationnelles par approximations successive*, Rev. Franc. Inform. Rech. Opéer. **4** (1970), 154–159.

[18] S. Matsushita and W. Takahashi, *The sequences by the hybrid method and the existence of fixed points of nonexpansive mappings in a Hilbers space*, Proceedingss of the 8th international Conference on Fixed Point Theory and its Applications, (2008), pp. 109–113.

[19] C. Martinez-Yanesa and H.-K Xu, *Strong convergence of the CQ method for fixed point iteration processes*, Nonlinear Anal., **64** (2006), 2400–2411.

[20] K. Nakajo and W.Takahashi, *Strong Convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279**, (2002), 372-378.

[21] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[22] G. Rodé, *An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **85** (1982), 172–178.

[23] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J.Control and Optim., **14** (1976), 877–898.

[24] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings,* J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71-83.

[25] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **1** (2000), 73–87.

[26] M. V. Solodov and B.F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Programming Ser. A. **87** (2000), 189–202.

[27] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253-256.

[28] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), 55-58.

[29] W. Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity,* Canad. J. Math. **44** (1992), 880-887.

[30] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications,* Nonlinear Anal. **30** (1997), 1287-1293.

[31] W. Takahashi, Nonlinear functional analysis - Fixed point theory and its application, Yokohama Publeishers, 2000.

[32] W. Takahashi, Y. Takeuchi and R. Kubota, Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl. **34** (2008), 276–286.

[33] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings,* Arch. Math., **58** (1992), 486–491.

(S. Atsushiba) DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND PHYSICS, INTERDISCIPLINARY SCIENCES COURSE, FACULTY OF EDUCATION AND HUMAN SCIENCES, UNIVERSITY OF YAMANASHI, 4-4-37 TAKEDA KOFU-SHI, YAMANASHI 400-8510, JAPAN

E-mail address: asachiko@yamanashi.ac.jp