数理解析研究所講究録
第 1685 巻 2010 年 149-158

バナッハ空間における合成積型作用素の総和法による近似精度について

琉球大学 理学部　西白保敏彦 (Toshihiko Nishishiraho)
Faculty of Science, University of the Ryukyus

1. 序

$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とし, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく. D を有向集合とし, $\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表し, $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ を $L^1(\mathbb{R})$ における有界列とする. ここで, $L^1(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可積分関数 χ の全体でノルム

$$\|\chi\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\chi(t)|\, dt$$

をもつ Banach 空間を表す.

$(X, \|\cdot\|_X)$ を Banach 空間とし, $\mathfrak{T} := \{T_\alpha(t) : \alpha \in D, t \in \mathbb{R}\}$ は X からそれ自身への作用素の族で各 $\alpha \in D, f \in X$ に対して, 写像 $t \mapsto T_\alpha(t)(f)$ が $\mathbb{R}$ 上で有界かつ強連続とする. このとき, X 上の合成積型作用素を

$$W_{\alpha,m}(f) := \int_{\mathbb{R}} k_m(t) T_\alpha(t)(f)\, dt \qquad (\forall\, f \in X) \tag{1}$$

によって定義する.

Λ を添字集合とし, $\mathcal{A} = \{a_{\alpha,m}^{(\lambda)} : \alpha \in D, m \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda\}$ は

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{\alpha,m}^{(\lambda)} = 1 \qquad (\forall\, \alpha \in D,\ \lambda \in \Lambda)$$

を満たす非負の実数の族とし

$$L_{\alpha,\lambda}(f) := \sum_{m=0}^{\infty} a_{\alpha,m}^{(\lambda)} W_{\alpha,m}(f) \qquad (\forall\, \alpha \in D,\ \lambda \in \Lambda,\ f \in X)$$

とおく. (1) によって定義された作用素の族 $\mathfrak{W} := \{W_{\alpha,m} : \alpha \in D, m \in \mathbb{N}_0\}$ が X 上の $\mathcal{A}$-総和近似法 であるとは, すべての $f \in X$ に対して

$$\lim_{\alpha} \|L_{\alpha,\lambda}(f) - f\|_X = 0 \qquad \text{unif. in } \ \lambda \in \Lambda \tag{2}$$

が成立することである.

本稿では, 適当な条件の下で収束挙動 (2) に関して, 収束速度を量的に評価し, それらの結果を各種の総和法, マルチプライヤー作用素 (cf. [2], [7], [8], [12]), 斉次 Banach 空間 (cf. [5], [11], [13]) の場合へ応用する (cf. [9], [10]).

2. 近似精度

$f \in X, \delta > 0$ とする. このとき, 各 $\alpha \in D$ に対して

$$\omega_\alpha(f,\delta) := \sup\{\|T_\alpha(t)(f) - f\|_X : 0 < |t| \le \delta\}$$

を f の連続率という. $\omega_\alpha(f,\cdot)$ は, $(0,\infty)$ 上で非負の単調増加関数である. また, 各 $f \in X$ に対して

$$\lim_{(\alpha,t)_0} T_\alpha(t)(f) = f \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{(\alpha,\delta)_{+0}} \omega_\alpha(f,\delta) = 0$$

ここで, 極限操作 $\lim\limits_{(\alpha,t)_0}$ の意味は次のとおりである:

$\mathbb{I}$ は $\mathbb{R}$ における区間, $\{g_{(\alpha,t)}\}_{(\alpha,t)\in D\times\mathbb{I}}$ は X の要素の族, $g \in X$ とする. このとき

$$\lim_{(\alpha,t)_0} g_{(\alpha,t)} = g \quad \underset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\, \epsilon > 0,\ \ \exists\ \ \alpha_0 \in D,\ \ \delta > 0:$$

$$\alpha \ge \alpha_0,\ \alpha \in D,\ 0 < |t| < \delta,\ t \in \mathbb{I} \quad \Longrightarrow \quad \|g_{(\alpha,t)} - g\|_X < \epsilon.$$

連続率について, 次の条件を仮定する: ある定数 $C \ge 1, K > 0$ が存在して

$$\omega_\alpha(f,\xi\delta) \le (C + K\xi)\omega_\alpha(f,\delta) \qquad (\forall\, \alpha \in D, f \in X, \xi,\ \delta > 0) \tag{3}$$

が成立する.

$(B[X], \|\cdot\|_{B[X]})$ は X からそれ自身への有界線形作用素全体の成す Banach 環を表す.

注意 1. 各 $\alpha \in D$ に対して, $\mathfrak{T}_\alpha = \{T_\alpha(t) : t \in \mathbb{R}\}$ が $B[X]$ における強連続な作用素群で

$$K := \sup\{\|T_\alpha(t)\|_{B[X]} : \alpha \in D, t \in \mathbb{R}\} < \infty \tag{4}$$

を満たすならば, (3) は $C = 1$ として成り立つ. 特に, $T_\alpha(t)$ が等長的ならば, (3) は $C = K = 1$ として成り立つ. Banach 空間上の作用素の半群論については, [1], [3], [4] を参照.

各 $\alpha \in D,\ f \in X$ に対して

$$\|W_\alpha(f) - f\|_\Lambda := \sup\{\|W_{\alpha,\lambda}(f) - f\|_X : \lambda \in \Lambda\}$$

とおく. このとき

$$\mathfrak{W} = \{W_{\alpha,m} : \alpha \in D, m \in \mathbb{N}_0\}: \quad \mathcal{A}\text{-総和近似法}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall f \in X,\ \lim_\alpha \|W_\alpha(f) - f\|_\Lambda = 0.$$

以下のおいては, 各 k_m は $L^1(\mathbb{R})$ に属する関数で

$$k_m \ge 0 \ \ (\text{a.e.}), \qquad \int_{\mathbb{R}} k_m(t)\,dt = 1 \qquad (\forall\, m \in \mathbb{N}_0)$$

を満たすとし

$$z_{\alpha,q} := \Big(\sup\Big\{\sum_{m=0}^{\infty} a_{\alpha,m}^{(\lambda)}\mu_m(q) : \lambda \in \Lambda\Big\}\Big)^{1/q} < \infty \quad (\alpha \in D,\ q > 0)$$

と定義する．ここで

$$\mu_m(q) := \int_{\mathbb{R}} |t|^q k_m(t)\,dt < \infty \qquad (m \in \mathbb{N}_0)$$

は k_m の q 次絶対モーメントである．また，$\{\delta_\alpha\}_{\alpha\in D}$ は正の実数からなるネットとする．

定理 1. $\forall\ f \in X,\ \alpha \in D,\ q \geq 1$ に対して

$$\|W_\alpha(f) - f\|_\Lambda \leq (C + K\min\{\delta_\alpha^{-1},\ \delta_\alpha^{-q}\})\omega_\alpha(f, \delta_\alpha z_{\alpha,q})$$

が成立する．

系 1. $\forall\ f \in X,\ \alpha \in D$ に対して

$$\|W_\alpha(f) - f\|_\Lambda \leq (C + K\min\{\delta_\alpha^{-1},\ \delta_\alpha^{-2}\})\omega_\alpha(f, \delta_\alpha z_{\alpha,2})$$

が成立する．

$f \in X,\ \delta > 0$ とする．このとき，

$$\omega_\alpha^*(f,\delta) := \sup\{\|T_\alpha(t)(f) + T_\alpha(-t)(f) - 2f\|_X : 0 < t \leq \delta\}$$

を f の一般連続率という．$\omega_\alpha^*(f,\cdot)$ は，$(0,\infty)$ 上の非負の単調増加関数で

$$\omega_\alpha^*(f,\delta) \leq 2\omega_\alpha(f,\delta)$$

が成立する．従って，

$$\lim_{(\alpha,t)_0} T_\alpha(t)(f) = f \quad \Longrightarrow \quad \lim_{(\alpha,\delta)_{+0}} \omega_\alpha^*(f,\delta) = 0 \qquad (f \in X).$$

次に，一般連続率について，次の条件を仮定する：ある定数 $A,\ B > 0$ が存在して

$$\omega_\alpha^*(f,\xi\delta) \leq (A + B\xi)^2\omega_\alpha^*(f,\delta) \qquad (\forall\ \alpha \in D,\ f \in X,\ \xi,\ \delta > 0) \tag{5}$$

が成立する．

注意 2. 各 $\alpha \in D$ に対して，$\mathfrak{T}_\alpha := \{T_\alpha(t) : t \in \mathbb{R}\}$ が $B[X]$ における強連続な等長作用素群ならば，条件 (5) は $A = B = 1$ として成り立つ．

以下においては，各 k_m は偶関数とし，$z_\alpha = z_{\alpha,2}$ とおく．

定理 2. $\forall\ f \in X,\ \alpha \in D$ に対して

$$\|W_\alpha(f) - f\|_\Lambda \leq \frac{1}{2}\Big(A + \frac{B}{\delta_\alpha}\Big)^2\omega_\alpha^*(f, \delta_\alpha z_\alpha)$$

が成立する.

注意 1 に鑑み, 各 $\alpha \in D$ に対して, $\mathfrak{T}_\alpha$ は $B[X]$ における強連続な作用素群で (4) を満たし, G_α は $\mathfrak{T}_\alpha$ の生成作用素でその定義域を $\mathfrak{D}(G_\alpha)$ とする.

定理 3. $\forall\, \alpha \in D,\ f \in \mathfrak{D}(G_\alpha),\ q \geq 1$ に対して

$$\|W_\alpha(f) - f\|_\Lambda \leq z_{\alpha,q+1}\Big(1 + \frac{K}{\delta_\alpha^q(q+1)}\Big)\omega_\alpha(G_\alpha(f), \delta_\alpha z_{\alpha,q+1})$$

が成立する.

系 2. $\forall\, \alpha \in D,\ f \in \mathfrak{D}(G_\alpha)$ に対して

$$\|W_\alpha(f) - f\|_\Lambda \leq z_\alpha\Big(1 + \frac{K}{2\delta_\alpha}\Big)\omega_\alpha(G_\alpha(f), \delta_\alpha z_\alpha)$$

が成立する.

応用上, 重要な各種の確率密度関数から誘導される $\{k_m\}$ の例については, [9] を参照.

$C_{2\pi}$ は $\mathbb{R}$ 上で定義された周期 2π をもつ連続関数 χ の全体でノルム

$$\|\chi\|_\infty = \max\{|\chi(t)| : |t| \leq \pi\}$$

をもつ Banach 空間を表す. $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ は $C_{2\pi}$ における非負の偶関数列で, その Fourier 級数を

$$h_m(t) \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{h_m}(j)e^{ijt} := 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\theta_m(j)\cos jt \qquad (t \in \mathbb{R})$$

とし,

$$k_m(t) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi}h_m(t) & (|t| \leq \pi) \\ 0 & (|t| > \pi). \end{cases}$$

と定義する. 従って, (1) で定義された作用素は

$$W_{\alpha,m}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_m(t)T_\alpha(t)(f)\,dt \qquad (\forall\, f \in X)$$

となる.

定理 4. $\forall\, f \in X,\ \alpha \in D$ に対して

$$\|W_\alpha(f) - f\|_\Lambda \leq \frac{1}{2}\Big(A + \frac{B\pi}{\sqrt{2}\delta_\alpha}\Big)^2\omega^*(f, \delta_\alpha\zeta_\alpha)$$

が成立する. ここで,

$$\zeta_\alpha := \Big(\sup\Big\{\sum_{m=0}^{\infty} a_{\alpha,m}^{(\lambda)}(1 - \theta_m(1)) : \lambda \in \Lambda\Big\}\Big)^{1/2}.$$

定理 5. $\forall\, \alpha \in D,\ f \in \mathfrak{D}(G_\alpha)$ に対して

$$\|W_\alpha(f) - f\|_\Lambda \le \frac{\pi}{\sqrt{2}}\zeta_\alpha\Big(1 + \frac{K\pi}{2\sqrt{2}\delta_\alpha}\Big)\omega_\alpha(G_\alpha(f), \delta_\alpha\zeta_\alpha)$$

が成立する.

重要な正値総和核を構成する $\theta_m(j)$ の例については, [9] を参照.

3. 各種の総和法

(1°) 無限行列 $A = (a_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}_0}$ による総和法:

$$a_{n,m}^{(\lambda)} := a_{nm} \ge 0 \qquad (\lambda \in \Lambda,\ n, m,\ \in \mathbb{N}_0)$$

(2°) *Petersen-Bell* 型: $\Lambda := \mathbb{N}_0$. 特に,

$$a_{n,m}^{(\lambda)} := \begin{cases} \frac{1}{n+1} & (\lambda \le m \le \lambda + n, \\ 0 & (m < \lambda,\ m > \lambda + n) \end{cases}$$

の場合は, Lorentz [6] による概収束法 (F-総和法) である.

(3°) *Nölund* 型: $\{q^{(\lambda)} : \lambda \in \Lambda\}$ は非負の実数列の族で, $q^{(\lambda)} = \{q_n^{(\lambda)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ とし $Q_n^{(\lambda)} := q_0^{(\lambda)} + q_1^{(\lambda)} + \cdots + q_n^{(\lambda)} > 0$ を満たすとする.

$$a_{n,m}^{(\lambda)} := \begin{cases} \frac{q_{n-m}^{(\lambda)}}{Q_n^{(\lambda)}} & (m \le n), \\ 0 & (m > n). \end{cases}$$

(4°) *Cesàro* 型: $\Lambda \subseteq (0, \infty),\ \beta > -1$,

$$a_{n,m}^{(\lambda)} := \begin{cases} C_{n-m}^{(\lambda-1)} C_m^{(\beta)} / C_n^{(\beta+\lambda)} & (m \le n), \\ 0 & (m > n). \end{cases}$$

但し

$$C_0^{(\nu)} = 1,\ C_n^{(\nu)} = \binom{n+\nu}{n} = \frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}{n!} \qquad (\nu > -1, n \in \mathbb{N}).$$

(5°) *Euler-Knopp-Bernstein* 型: $\Lambda \subseteq [0, 1]$,

$$a_{n,m}^{(\lambda)} := \begin{cases} \binom{n}{m}\lambda^m(1-\lambda)^{n-m} & (m \le n), \\ 0 & (m > n). \end{cases}$$

(6°) *Lototsky* 型: $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を $[0, 1]$ からそれ自身への連続関数列とする.

$$a_{0,0}^{(\lambda)} := 1, \quad a_{n,m}^{(\lambda)} := 0 \qquad (m > n),$$

$$\prod_{i=1}^{n}(xh_i(\lambda) + 1 - h_i(\lambda)) = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}^{(\lambda)} x^m.$$

(7°) *Meyer-König-Vermes-Zeller* 型: $\Lambda \subseteq [0,1)$,

$$a_{n,m}^{(\lambda)} := \binom{n+m}{m} \lambda^m (1-\lambda)^{n+1}.$$

(8°)*Borel-Szász* 型 : $\Lambda \subseteq [0,\infty)$,

$$a_{n,m}^{(\lambda)} := \exp(-n\lambda) \frac{(n\lambda)^m}{m!}.$$

(9°) *Baskakov type*: $\Lambda \subseteq [0,\infty)$,

$$a_{n,m}^{(\lambda)} := \binom{n+m-1}{m} \lambda^m (1+\lambda)^{-n-m}.$$

(10°) *Abel* 型: $\Lambda \subseteq (-1,\infty)$, $0 \le r_n < 1$, $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$,

$$a_{n,m}^{(\lambda)} := (1-r_n)^{\lambda+1} \binom{m+\lambda}{m} r_n^m.$$

(11°) *Balázs* 型: $\Lambda \subseteq [0,\infty)$, t $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ を正の実数列とする.

$$a_{n,m}^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{1}{(1+b_n\lambda)^n} \binom{n}{m} b_n^m \lambda^m & (0 \le m \le n), \\ 0 & (m > n). \end{cases}$$

(12°) *Bleimann-Butzer-Hahn* 型: $\Lambda \subseteq [0,\infty)$,

$$a_{n,m}^{(\lambda)} := \begin{cases} \frac{1}{(1+\lambda)^n} \binom{n}{m} \lambda^m & (0 \le m \le n), \\ 0 & (m > n). \end{cases}$$

4. マルチプライヤー作用素

$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とし, $\mathfrak{P} = \{P_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は $B[X]$ における射影作用素列で次の条件を満たすとする：

(P-1) $P_j P_n = \delta_{j,n} P_n \quad (\forall j, n \in \mathbb{Z})$. ここで, $\delta_{j,n}$ は Kronecker のデルタ関数を表す.

(P-2) $\overline{sp\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} P_j(X)\Big)} = X$.

(P-3) $f \in X,\ P_j(f) = 0,\ \forall\, j \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad f = 0$.

各 $f \in X$ に対して, 形式的な級数

$$f \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j(f) \tag{6}$$

で表し $\mathfrak{P}$ に関する f の Fourier 級数という. 作用素 $L \in B[X]$ が X 上のマルチプライヤー作用素であるとはあるスカラー列 $\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ が存在して

$$L(f) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j(f) \qquad (\forall\, f \in X) \tag{7}$$

が成り立つことである. この場合

$$L \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j$$

と書く.

$\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ を $L^1(\mathbb{R})$ に属する確率密度関数列とし, $\mathfrak{T} = \{T_\alpha(t) : \alpha \in D, t \in \mathbb{R}\}$ は X 上のマルチプライヤー作用素の族で

$$T_\alpha(t) \ \sim \ \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_{\alpha,j}(t) P_j \qquad (\forall\, \alpha \in D,\ t \in \mathbb{R}), \tag{8}$$

$$\sup\{\|T_\alpha(t)\|_{B[X]} : t \in \mathbb{R}\} < \infty \qquad (\forall\, \alpha \in D)$$

とする. ここで, $\mathfrak{V} := \{v_{\alpha,j} : \alpha \in D, j \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数の族で

$$c_{\alpha,m,j} := \int_{\mathbb{R}} k_m(t) v_{\alpha,j}(t)\, dt < \infty$$

を満たすとする. このとき, (1) によって定義された合成積型作用素 $W_{\alpha,m}$ はマルチプライヤー作用素になり

$$W_{\alpha,m} \ \sim \ \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{\alpha,m,j} P_j \qquad (\forall\, \alpha \in D,\ m \in \mathbb{N}_0) \tag{9}$$

が成立する. 従って, 前節までの結果が展開 (8) をもつマルチプライヤー作用素の族 $\mathfrak{W} = \{W_{\alpha,m} : \alpha \in D, m \in \mathbb{N}_0\}$ に適用される.

以下では, 各 $T_\alpha(t)$ が一様有界なマルチプライヤー作用素の族 $\mathcal{T} = \{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ から誘導される場合を考える:

$$T(t) \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j(t) P_j \qquad (\forall\, t \in \mathbb{R})$$

とする. ここで, $\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数列で $v_j(0) = 1$ とする. $\{\epsilon_\alpha\}_{\alpha\in D}$ を正の実数のネットとし,

$$T_\alpha(t) := T(t\epsilon_\alpha) \qquad (\forall\, \alpha \in D,\ t \in \mathbb{R})$$

とする.

特に, $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ をスカラー列とし,

$$v_j(t) := e^{\xi_j t} \qquad (\forall\, j \in \mathbb{Z},\ t \in \mathbb{R})$$

のとき, $\mathcal{T}$ はマルチプライヤー作用素の強連続群になり, その生成作用素を G とすれば

$$G(f) \ \sim \ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \xi_j P_j(f) \qquad (\forall\, f \in \mathfrak{D}(G))$$

が成立する. また,

$$\omega_\alpha(f,\delta) = \omega(f,\delta\epsilon_\alpha) \qquad (f \in X,\ \alpha \in D,\ \delta > 0),$$

$$\omega(f,\xi) := \sup\{\|T(t)(f) - f\|_X : 0 < |t| \le \xi\} \qquad (\xi > 0),$$

$$\omega^*_\alpha(f,\delta) = \omega^*(f,\delta\epsilon_\alpha) \qquad (f \in X,\ \alpha \in D,\ \delta > 0),$$

$$\omega^*(f,\xi) := \sup\{\|T(t)(f) + T(-t)(f) - 2f\|_X : 0 < |t| \le \xi\} \quad (\xi > 0).$$

5. 斉次 Banach 空間

$\mathbb{R}$ 上で定義された周期 2π の Lebesgue 可積分関数からなる Banach 空間 $(X, \|\cdot\|_X)$ が次の条件を満たすとき, X を斉次 Banach 空間という：

(H-1) $\exists\, K > 0 : \|f\|_1 \le K\|f\|_X \quad (\forall f \in X)$.

(H-2) 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して, 移動作用素 $T_t(f)(\cdot) := f(\cdot - t)\ \ (\forall f \in X)$ は $B[X]$ に属し, 等長的である.

(H-3) 各 $f \in X$ に対して, 写像 $t \mapsto T_t(f)$ は $\mathbb{R}$ 上で強連続である.

斉次 Banach 空間の例を幾つか挙げる：

$C_{2\pi}$: $\mathbb{R}$ 上で定義された周期 2π の連続関数 f の全体,

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(t)| : |t| \le \pi\}.$$

$L^p_{2\pi}$ $(1 \le p < \infty)$: $\mathbb{R}$ 上で定義された周期 2π の p 乗絶対 Lebesgue 可積分関数 f の全体,

$$\|f\|_p := \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\,dt\Big)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty).$$

$C^{(n)}_{2\pi}$: $\mathbb{R}$ 上で定義された n 回連続微分可能な関数 f の全体,

$$\|f\|_{C^{(n)}_{2\pi}} := \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\|f^{(j)}\|_\infty.$$

$AC_{2\pi}$: $\mathbb{R}$ 上で定義された周期 2π の絶対連続な関数 f の全体,

$$\|f\|_{AC_{2\pi}} := \|f\|_1 + \|f'\|_1.$$

$lip^\alpha_{2\pi}$ $(0 < \alpha < 1)$: $\mathbb{R}$ 上で定義された周期 2π の連続関数 f で

$$N_\alpha(f) := \sup\Big\{\frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha} : h \ne 0,\ t \in \mathbb{R}\Big\} < \infty,$$

$$\lim_{h\to 0}\Big(\sup\Big\{\frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha} : t \in \mathbb{R}\Big\}\Big) = 0$$

を満たすものの全体,

$$\|f\|_{lip^\alpha_{2\pi}} := \|f\|_\infty + N_\alpha(f).$$

以下において, X を斉次 Banach 空間とし, $\mathcal{T} = \{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ を X 上の移動作用素からなる等長的な強連続群とする. 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して, X 上の射影作用素 P_j を次のように定義する:

$$P_j(f)(t) := \hat{f}(j)e^{ijt} \qquad (\forall\, f \in X,\ t \in \mathbb{R})$$

このとき, $\mathfrak{P} = \{P_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は条件 (P-1), (P-2) および (P-3) を満たし, (6) と (7) はそれぞれ

$$f \quad \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ij\cdot},$$

$$L(t)(f) \quad \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ij(\cdot-t)} \qquad (\forall\, t \in \mathbb{R},\ f \in X)$$

となる. 更に,

$$\omega(f,\delta) = \sup\{\|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_X : 0 < |t| \leq \delta\} \quad (f \in X,\ \delta > 0),$$

$$\omega^*(f,\delta) = \sup\{\|f(\cdot + t) + f(\cdot - t) - 2f(\cdot)\|_X : 0 < t \leq \delta\} \quad (f \in X,\ \delta > 0).$$

が成立する.

References

[1] P. L. Butzer and H. Berens, *Semi-Groups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.

[2] P. L. Buzter, R. J. Nessel and W. Trebels, *On summation processes of Fourier expansions in Banach spaces. I. Comparison theorems*, Tôhoku Math. J., **24** (1972), 127-140; *II. Saturation theorems*, ibid. 551-569; *III. Jackson- and Zamansky-type inequalities for Abel-bounded expansions*, ibid. **27** (1975), 213-223.

[3] K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semi-Groups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag, New York/Berlin/Heidelberg, 2000.

[4] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. **31**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1957.

[5] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley, New York, 1968.

[6] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta Math., **80** (1948), 167-190.

[7] T. Nishishiraho, *Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **33** (1981), 109-126.

[8] T. Nishishiraho, *Saturation of multiplier operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **34** (1982), 13-26.

[9] T. Nishishiraho, *Approximation processes of convolution type operators in Banach spaces*, J. Nonlinear and Convex Analysis, **9** (2008), 215-238.

[10] T. Nishishiraho, *Approximation by summation processes of convolution type operators in Banach spaces*, Proc. Asian Conf. Nonlinear Analysis and Optimization (to appear).

[11] H. S. Shapiro, *Topics in Approximation Theory*, Lecture Notes in Math. **187**, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.

[12] W. Trebels, *Multiplier for (C, α)-Bounded Fourier Expansions in Banach Spaces and Approximation Theory*, Lecture Notes in Math. Vol. **329**, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1973.

[13] H. C. Wang, *Homogeneous Banach Algebras*, Marcel Dekker Inc., New York/Basel, 1977.