

零因子を頂点に持つある性質を満たすグラフ

中部大学現代教育学部 金光三男 (Mitsuo Kanemitsu)
College of Contemporary Education
Chubu University

1. はじめに

零因子グラフの概念は、最初 I.Beck[Be] によって 1988 年に導入され、主として可換環 R の彩色数 $\chi(R)$, 特に R が coloring ($\chi(R) < \infty$ なる R をいう) に関連して考察された。I.Beck は 0 も頂点集合として扱い、クリーク数を $cl(R)$ としたとき、 $\chi(R) = cl(R)$ を予想した。D.D.Anderson と M.Naseer[AN] が 1993 年に $\chi(R) = 6, cl(R) = 5$ となる可換環を与え I.beck の予想の反例を与えた。

その後 10 数年の間、零因子グラフの論文は余り見かけなかったが、1999 年にアメリカの D.F.Anderson と P.S.Livingston [AL] は、 0 を頂点集合から除いて定義した零因子グラフのいくつかの基本性質を研究してその成果を発表した。これ以後も、R. Levy と J.Shapiro[LS] など多くの研究者が零因子グラフについて研究し多くの成果を得た。非可換環に対しては有向グラフが考察され、可換半群に対しても類似の零因子グラフが考察された。また零因子グラフをイデアルに関する零因子グラフまで拡張した研究 (S.P.Redmond[2003]) も出現した。

ここでは、可換環 R に付随した零因子グラフにおいて、異なる二つの頂点が辺をなす条件 $xy = 0$ である条件を、 $x^2 + y^2 = 0$ に変えたグラフであるピタゴラスグラフについて、環 R が整数環 \mathbf{Z} の剰余環 \mathbf{Z}_n の特別な場合に零因子グラフと比較して考察しよう。

2. ピタゴラスグラフの定義

R を可換環とし、その零因子全体を $Z(R)$ で表し、 0 を除いた集合を $Z^*(R)$ とする。すなわち、 $Z^*(R) = Z(R) - \{0\}$ 。

まず D.F.Anderson と P.S.Livingston が定義した零因子グラフについて述べてみよう。

定義 1([AL]) $Z^*(R)$ を頂点集合として、異なる二つの頂点 a, b に対して $ab = 0$ のとき a と b は隣接する (即ち、 a と b が辺をなす) と定義する。このように定義したグラフを零因子グラフといい、 $W(R)$ で表す。

定義 2 $Z^*(R)$ を頂点集合とし、異なる二つの頂点 a, b に対して、 $a^2 + b^2 = 0$ を満たすとき、 a, b は隣接する (辺をなす) と定義したグラフをピタゴラスグラフといい、 $\Gamma(R)$ で表す。

定義 3([AL]) 零因子グラフ $W(R)$ の a, b を頂点とする。 $d(a, b)$ で a と b を結ぶ最短の道の長さとする。この $d(a, b)$ を a と b を結ぶ距離という。頂点を色々と動かし距離の上限を $W(R)$ の直径といい、 $diam(W(R))$ で表す。また、 $W(R)$ に含まれるサイクルの最小の長さを $W(R)$ の内周といい、 $girth(W(R))$ と記す。サイクルが存在しなときは内周は無限大 ∞ とする。

3 ピタゴラスグラフの基本性質

[AL] において、零因子グラフ $W(R)$ は連結グラフで、その直径が3以下、内周はサイクルを含む場合は4以下になることが示された。

$\Gamma(\mathbf{Z}_{12})$ の頂点集合 $V(\Gamma(\mathbf{Z}_{12}))$ は、 $V(\Gamma(\mathbf{Z}_{12})) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ で7個の頂点はすべて孤立点で空グラフである。勿論非連結である。ここで、 $6 = -6, 8 = -4, 9 = -3, 10 = -2$ であることに注意しておく。

定理 1 ピタゴラスグラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_n)$ は連結グラフとは限らない。また $diam(\Gamma(\mathbf{Z}_n)) \leq 2$ 、 $girth(\Gamma(\mathbf{Z}_n)) \leq 4$ または $girth(\Gamma(\mathbf{Z}_n)) = \infty$ となる。

素数 p に対して、容易に分かるように、零因子グラフ $W(\mathbf{Z}_{p^2})$ は完全グラフ K_{p-1} になる。

容易に分かるように、異なる二つの素数 p, q に対して、零因子グラフ $W(\Gamma(\mathbf{Z}_{pq}))$ は完全二部グラフ $K_{p-1, q-1}$ になる。固有多項式 $\phi(\lambda)$ は、

$$\phi(\lambda) = \lambda^{p+q-2} - (p-1)(q-1)\lambda^{p+q-4}$$

となる。2-マッチングの個数および異なる4-サイクルの個数をそれぞれ n_M, n_C と書くと次式が成立する。

$$n_M = 2n_C = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)\lambda^{p+q-4}$$

上で述べた n_C は、高等学校で学習する「組み合わせ」の内容で、 $n_C = {}_{q-1}C_2 \times {}_{p-1}C_2$ によって求めることができる。また、グラフの次数列を (d_1, d_2, \dots, d_n) とするとき、[JK] の公式(下記の公式)で求めても同様な結果になる；

$$n_M = \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^n d_i \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n d_i$$

この結果に対応するピタゴラスグラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_n)$ について記述する。

定理 2 (1) p を素数とする。このとき、 $\Gamma(\mathbf{Z}_{p^2})$ は空グラフまたは完全グラフである。
(2) p, q を異なる素数とする。このとき、 $\Gamma(\mathbf{Z}_{pq})$ は空グラフまたは成分が孤立点または四辺形のみからなる。

ピタゴラスグラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_n)$ は対称グラフとなるので、面白い性質が多く見付かる。

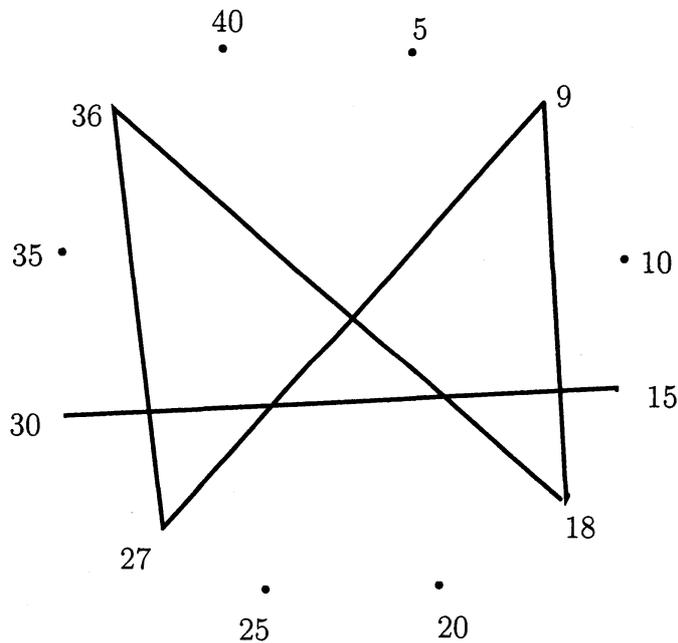
n が偶数のとき、 $\frac{n}{2}$ は $\frac{n}{2} = -\frac{n}{2}$ が成立する。このような頂点 $\frac{n}{2}$ は対称の軸上の頂点であり、ここでは対称点と呼ぶことにする。

例えば、 p を素数としたとき、 $2p = 70$ までは、 $\Gamma(\mathbf{Z}_{2p})$ は対称点以外の頂点は四辺形の頂点上にあるか、そうでなければ空グラフになっている。

$2p$ の形でないものは、四辺形と直線や孤立点などからなるものが存在する。四辺形と三角形と孤立点を成分にもつピタゴラスグラフも存在する。

例 ピタゴラスグラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_{45})$ の図。

これは頂点を表す



この図より、対称グラフであることがわかる。

頂点集合 $V(\Gamma(\mathbf{Z}_{45}))$ の個数は、12個でその内で孤立点は5, 10, 20, 25(= -20), 35(= -10), 40(= -5)の6個である。直線は15 - 30の一本であり、4-サイクルは9 - 18 - 36 - 27 - 9の一個である。

このピタゴラスグラフの固有多項式は、

$$\phi(\lambda) = \lambda^{12} - 5\lambda^{10} + 4\lambda^8$$

である。

この固有多項式は λ^6 で括ることができ、この次数は孤立点の個数と一致する。辺の個数(サイズ)は5であるから λ^{10} の係数は-5となり、三角形の個数は0だから、 λ^3 の係数は0、その次の係数は $n_M = 6, n_C = 1$ であることから、 $n_M - 2n_C = 6 - 2 \times 1 = 4$

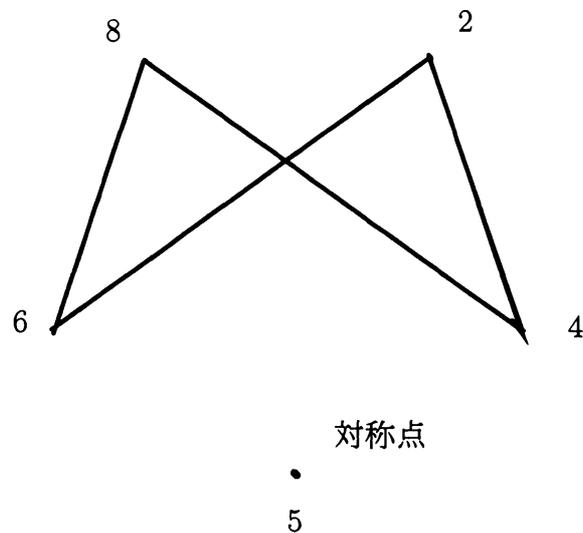
となる。ここで述べた4番目の項の係数が $n_M - 2n_C$ であることは, N.Biggs[Bi] による。

対称点から出る辺が存在すれば三角形が存在する。従って固有多項式の降冪順に整理すれば最高次から4番目の項の係数は0でなく実際現れる。

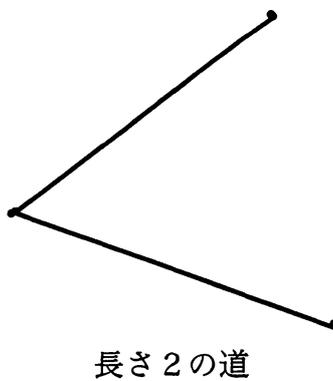
また素数 p に対して, $\Gamma(\mathbf{Z}_{p^2})$ は完全グラフになる。

例としては, $\Gamma(\mathbf{Z}_{25}) = K_4$ は完全グラフである。

例 $\Gamma(\mathbf{Z}_{10})$ のピタゴラスグラフの図。



最後に, $n = 70$ までのピタゴラスグラフの成分で, 下記のような長さ2の道は出てこない。



参考文献

- [AL] D.F.Anderson and P.S.Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra* **217** (1999), 434-447
- [AN] D.D.Anderson and M.Naseer, *J. Algebra* **159** (1993), 500-514
- [Be] I.Beck, Coloring of commutative rings, *J. Algebra* **116** (1988), 208-226
- [Bi] N.Biggs, *Algebraic Graph Theory* (Second Edition), Cambridge 1993
- [JK] Y.Jin and M.Kanemitsu, Beck's graphs associated with \mathbf{Z}_n and their characteristic polynomials, *International Journal of Applied Mathematics and Statistics* **11** (V07) (2007), 81-93
- [LS] R.Levy and J.Shapiro, The zero-divisor graph of a Von Neuman regular ring, *Communications in Algebra* **30** (2) (2002), 745-750
- [R] S.P. redmond, An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring, *Communications in Algebra* **31** (9) (2003), 4425-4443