

# Ornstein-Uhlenbeck 過程での 大スケール揺らぎの統計則について

松本 剛†, 高岡 正憲\*

†京都大学大学院理学研究科, \*同志社大学理工学部

平成 22 年 4 月 5 日

## 1 はじめに

乱流の普遍性に関するこれまでの研究は、小スケール（慣性小領域）のみを対象としてきた。一般に平均流がそうであるように、大スケールの方は境界条件の影響を直接に受けるので個別的であると考えられてきた。小スケールの普遍性を導く Kolmogorov[1] の乱流理論 (K41) に対し、Landau[2] が大スケール揺らぎが顕著であることに基づきその普遍性に疑問を呈したのもこの”常識”からである。これを受けて Obukhov[3] は大スケールの揺らぎについて議論し対数正規性を仮定したが、これは正定値変数に対する近似分布に基づくものであり、メカニズムには言及されていない。対数正規理論の説明としては、スケール間のエネルギー伝達率に対し乗法過程を考え、その対数を取り中心極限定理を適用するという論がしばしば用いられる。

毛利ら [4, 5, 6] は、気象研究所の大型風洞での非常に長時間に渡って速度場のデータを用いて、大スケールで粗視化した揺らぎを調べた。実験データは熱線流速計により測定され、Taylor 仮説により時系列データを空間変動に翻訳して解析された。結果、格子乱流、境界層乱流、噴流乱流において粗視化する長さ  $R$  が速度の積分長  $L$  と同程度かそれより長いとき粗視化した揺らぎは対数正規分布で近似できることを見出した。

1962 年の Kolmogorov[7] や Oboukhov[3] の対数正規理論で期待されるのはエネルギー伝達率・散逸率の対数正規分布であるが、毛利らの研究ではエネルギー（速度の二乗）や速度差の二乗などを粗視化したものも同分布となっている。他方、参考文献 [8, 9, 10] などにも書かれているように、対数正規分布は鉱物学、病理学、気象学、経済学など様々な分野に現れている。また、実験的あるいは経験的に観測された分布が巾分布なのか対数正規分布なのかといった論争がくり返されている。

この大スケールの対数正規則は、何らかの”大数の法則”的なものの現れであろうか？という疑問が本報の出発点である。つまり、乱流速度場あるいは Navier-Stokes

方程式の解であるから対数正規則が見えているのではなく、ランダム変数の和といった一般的な状況で自然と現れるものなのか否かを知りたい。もし、後者が正しいとすると大スケール対数正規則は非常に一般的な法則ということになる。

この対数正規性の起源や普遍性を調べるために、単純な確率過程でも大スケール揺らぎの対数性規性が再現できるのかを数値計算と簡単な解析により調べる。

## 2 Ornstein-Uhlenbeck 過程と数値計算法

粗視化する長さが揺らぎの積分長を越えた辺りから対数正規分布が見られることから、相関の存在が大事だと思われる。Ornstein-Uhlenbeck 過程 (OU 過程) は相関を持つ最もシンプルなランダム過程であり、次式で表される。

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{1}{T}X(t) + c^{1/2}\gamma \quad (1)$$

ここで、 $T$  は緩和時間 (相関時間) であり積分長に対応し、 $c$  は拡散係数、 $\gamma$  は Gaussian 白色雑音でその平均は 0 で分散が  $\frac{1}{dt}$  である。ただし、線形加法過程であり対数正規分布を作り出すメカニズムは内包していない。

この  $X(t)$  の確率密度関数は、次の Fokker-Planck 方程式に従い、

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial x P(x, t)}{\partial x} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad (2)$$

定常分布として正規分布をもつ。

また、 $X(t)$  は具体的に解けて次式で与えられ

$$X(t) = X(0)e^{-t/T} + e^{-t/T} \int_0^t c^{1/2}\gamma e^{s/T} ds \quad (3)$$

統計量の具体的な表現も得られる。例えば、平均と共分散はそれぞれ

$$\langle X(t) \rangle = X(0)e^{-t/T}, \quad \text{cov}(X(s), X(t)) = \frac{cT}{2} e^{-\frac{s+t}{T}} \left( e^{\frac{2\min(s,t)}{T}} - 1 \right) \quad (4)$$

これより、相関関数と相関時間 (= 積分長) がそれぞれ

$$C(\tau) = \frac{\langle X(t+\tau)X(t) \rangle}{\langle X(t)^2 \rangle} = e^{-\tau/T}, \quad \int_0^\infty C(\tau) d\tau = T \quad (5)$$

であることも計算で確認できる。

OU 過程 (1) のシミュレーションには、Gillespie[11] の「exact updating formula」

$$X(t+dt) = X(t)e^{-dt/T} + \sqrt{\frac{cT}{2}(1 - e^{-2dt/T})}n \quad (6)$$

$x(0)$	$T$	$c$	$dt$	data num
0.0	1.0	1.0	$1.0 \times 10^{-3}$	$10^{11}$

表 1: 数値シミュレーションで用いたパラメータ値

を用いた。ここに、 $n$ は $N(0, 1)$ の乱数で、 $[0, 1]$ の1様乱数 $r_1, r_2$ から $s = \sqrt{2 \ln(1/r_1)}$ 、 $\theta = 2\pi r_2$ を作り $n = s \cos \theta$ または $s \sin \theta$ とした。数値計算で用いたパラメータを表2にまとめる。これまでの乱流研究の結果との対応を考えると、Kolmogorovスケール $\eta$ を $dt$ に、相関スケール $L$ を $T$ と思うことになる。

粗視化した物理量は次のように定義する。

$$\zeta_R = X^2|_R = \frac{1}{R} \int_{t-R/2}^{t+R/2} X(s)^2 ds \quad (7)$$

### 3 シミュレーション結果

1点の2次モーメントの大スケール粗視化量をまずは考えることにする。平均 $\langle \zeta_R \rangle$ は粗視化スケール $R$ に関係なく0.5となった。これは式(7)から求めた解析結果 $cT/2$ と一致する。

分散と歪度に対する結果を図1に示す。グラフの横軸は、粗視化スケール $R$ を

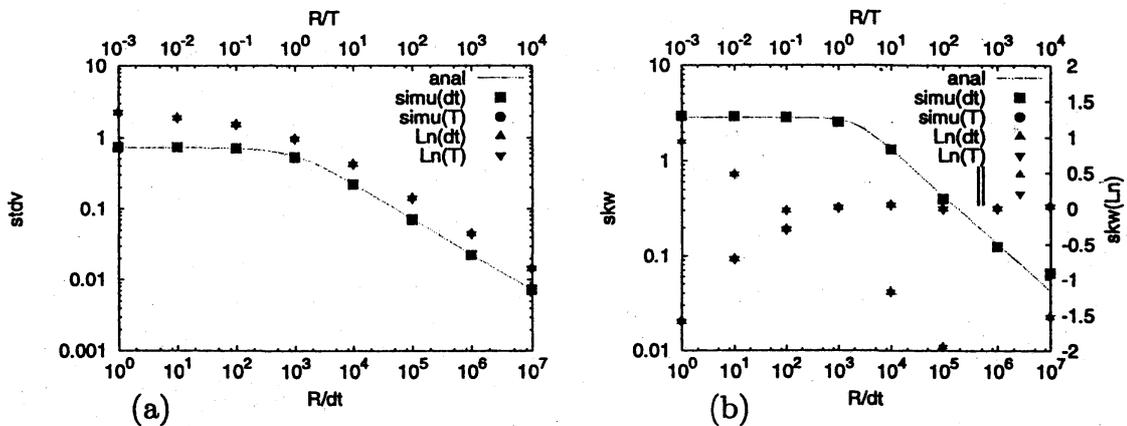


図 1: (a) 分散, (b) 歪度の粗視化スケール依存性

$dt$ で規格化したものと、 $T$ で粗視化したものの2種類とってある。 $\zeta_R$ に対するそれぞれの結果を■と●で、 $\xi_R$ に対するそれぞれの結果を▲と▼で示してある。

全ての $R$ に対して $\xi_R$ の分散の方が $\zeta_R$ に対する分散よりも大きい。 $\xi_R$ の分散は領域 $R < T$ で $R$ に緩やかに依存しているが、領域 $R > T$ では両分散共に $R^{-1/2}$ となっている。

$\zeta_R$ と $\xi_R$ に対する歪度( $S_\zeta$ と $S_\xi$ )の振る舞いは大きく異なる。縦軸の目盛は $\zeta_R$ に対するそれを左軸に、 $\xi_R$ に対するそれを右軸に示してある。領域 $R/T < 1$ では $S_\zeta$

はほぼ一定値をとるが、 $S_\xi$  は負の値をとり  $R$  が小さいほど小さい。領域  $R/T > 1$  では  $S_\zeta$  は  $R^{-1/2}$  で減少するが、 $S_\xi$  はほぼ 0 となる。これらは、ほぼ期待通りの結果となった。また、全領域で  $|S_\xi| \ll |S_\zeta|$  となっている。

$\zeta_R$  と  $\xi_R$  に対する扁平度 ( $F_\zeta$  と  $F_\xi$ ) に対する結果を図 2 に示す。

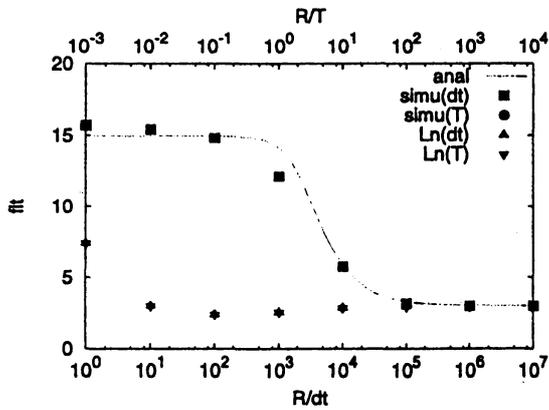


図 2: 扁平度の粗視化スケール依存性

$F_\zeta$  は粗視化スケールを大きくするに連れ  $F_\zeta \approx 15$  から  $F_\zeta \approx 3$  へ領域  $1 \lesssim R/T \lesssim 10$  で遷移している。 $F_\xi$  は  $R/T$  が 1 よりも小さい領域 ( $R \approx 10dt$ ) でもかなり 3 に近い値をとっている。

これより高次のモーメントは大変なので、分布関数により全体的な様子を見ることにする (図 3)。それぞれ、左図は  $\zeta_R$ 、右図は  $\xi_R$  に対する分布関数である。互いに反対方向に歪んでおり、 $R$  が大きくなるに連れて Gauss 分布に漸近している。漸近の仕方は対数をとった方が早い。

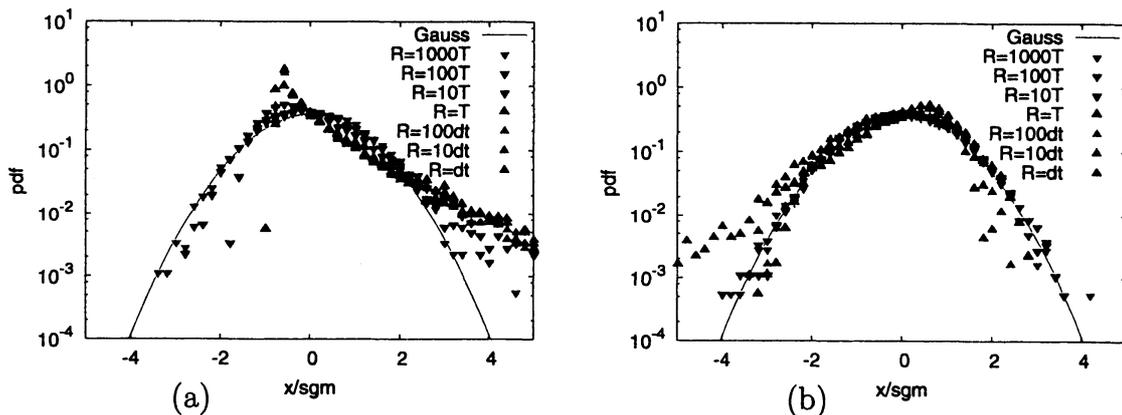


図 3: (a) $\zeta$ , (b) $\xi$  に対する分布関数

## 4 解析的表現と LogNormal 分布

節 2 で見たように OU 過程の解は具体的に書き下すことができる。粗視化した量  $\zeta_R$  についてもある程度解析的な表現が得られる。ここでは紙面の都合で結果のみをまとめる。

アンサンブル平均は

$$\langle \zeta_R \rangle = \frac{cT}{2} \left( 1 + \frac{T}{2R} (e^{-R/T} - e^{R/T}) e^{-2t/T} \right) \quad (8)$$

となり、 $t$  についての平均を  $(0, \infty)$  の範囲で取ると、

$$\langle \zeta_R \rangle = \frac{cT}{2} \quad (9)$$

以下でも同様の操作をする。

分散は

$$\sqrt{\langle \Delta \zeta_R \rangle^2} = \sqrt{\langle \zeta_R^2 \rangle - \langle \zeta_R \rangle^2} = \frac{cT}{2R} \sqrt{T^2(e^{-2R/T} - 1) + 2TR} \quad (10)$$

と求まり、 $R$  が  $T$  に比べて大きい所と小さい所での漸近形はそれぞれ

$$\Rightarrow \frac{cT}{2} \sqrt{\frac{2T}{R}} \quad (R \rightarrow \infty), \quad \Rightarrow \frac{cT}{\sqrt{2}} \quad (R \rightarrow 0) \quad (11)$$

グラフを図 1(a) 中に実線で描いてある。全領域で数値計算の結果と良く一致している。

歪度に対する結果は

$$\frac{\langle (\Delta \zeta_R)^3 \rangle}{\langle (\Delta \zeta_R)^2 \rangle^{3/2}} = \frac{12T^{1/2} (T (e^{-2R/T} - 1) + R (e^{-2R/T} + 1))}{(T (e^{-2R/T} - 1) + 2R)^{3/2}} \quad (12)$$

で、 $R$  が  $T$  に比べて大きい所と小さい所での漸近形はそれぞれ

$$\Rightarrow 3\sqrt{\frac{2T}{R}} \quad (R \rightarrow \infty), \quad \Rightarrow 2\sqrt{2} \quad (R \rightarrow 0) \quad (13)$$

グラフを図 1(b) 中に実線で描いてある。粗視化スケール  $R$  が大きくなり分散が小さくなると少しづれ始めるが、全領域で数値計算の結果と良く一致している。

扁平度に直接的には 8 重積分となるが Rice[12] による相関関数を用いた方法で 4 重積分から求まり、

$$3 + 6 \frac{28T^2 e^{-2R/T} + T^2 e^{-4R/T} + 16R^2 e^{-2R/T} - 29T^2 + 40TR e^{-2R/T} + 20TR}{(T e^{-2R/T} - T + 2R)^2} \quad (14)$$

$R$  が  $T$  に比べて大きい所と小さい所での漸近形はそれぞれ

$$\Rightarrow 3 + \frac{30T}{R} \quad (R \rightarrow \infty), \quad \Rightarrow 15 - \frac{16R^2}{15T^2} \quad (R \rightarrow 0) \quad (15)$$

グラフを図 2 中に実線で描いてある。全領域で数値計算の結果とほぼ一致しているが、ずれが少し顕著になってくる。

他方、対数正規分布関数は  $x > 0$  に対し

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp \left\{ -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (16)$$

ここに、パラメータ  $\mu$  と  $\sigma$  は平均  $E$  や標準偏差  $V$  と次式で結ばれている

$$\mu = \ln E - \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{V}{E^2} \right) \quad \sigma = \ln \left( 1 + \frac{V}{E^2} \right) \quad (17)$$

また、歪度  $S$  と扁平度  $F$  は、 $r = V/E^2$  として、それぞれ

$$\begin{aligned} S &= (\exp \sigma^2 + 2) \sqrt{\exp \sigma^2 - 1} = \sqrt{r}(3 + r) \\ F &= 3 + (\exp \sigma^2 - 1)(6 + 6 \exp \sigma^2 + 3 \exp 2\sigma^2 + \exp 3\sigma^2) \\ &= 3 + r(16 + 15r + 6r^2 + r^3) \end{aligned} \quad (18)$$

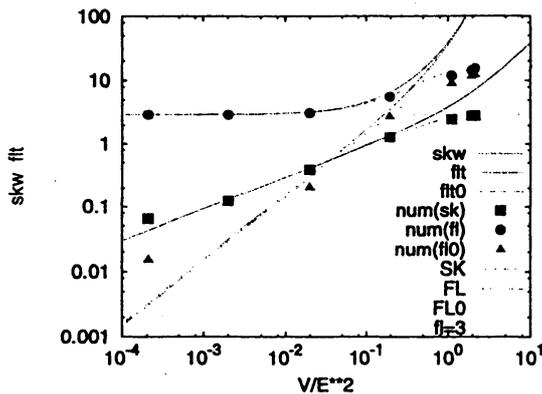


図 4: 歪度, 扁平度, 尖度を  $r$  の関数として整理

OU 過程で得られた分布の対数正規性をもう少し詳しくみるために対数正規分布で成り立つ関係式 (18) を調べる。

数値シミュレーションの結果を  $r = \langle \Delta \zeta_R \rangle^2 / \langle \zeta_R \rangle^2$  の関数として整理すると図 4 のようになる。歪度は  $\blacksquare$ , 扁平度は  $\bullet$  で描いてある。また、正規分布からのずれをみるため尖度も  $\blacktriangle$  で描いてある。OU 過程に対する解析表現 (9) と (10) から  $R$  と  $r$  は  $r = (T^2(e^{-2R/T} - 1) + 2TR)/R^2$  で結ばれており, (12) や (14) から歪度, 扁平度, 尖度を  $r$  の関数として表される。これらのグラフと対数正規分布での関係式 (18) のグラフも図 4 中に描いてある。

数値計算の結果とこれらのグラフは歪度と扁平度については良く一致しているが、尖度については数値計算の結果のずれが顕著である。粗視化スケールを大きくとった極限で、分布関数は中心極限定理より正規分布となるが、この漸近過程を数値計算や実験で調べるにはかなりの精度が必要ながわかる。

OU 過程における解析表現の  $R \rightarrow \infty$  での漸近形 (11) より  $r = 2T/R$  であり, (13) や (15) から歪度や扁平度を  $r$  が十分小さいとして展開した関数形を求めると

$$S_{\zeta} = 0 + \sqrt{r} \left( 3 - \frac{3}{8}r - \frac{27}{128}r^2 \dots \right), \quad F_{\zeta} = 3 + r \left( 15 - \frac{27}{8}r - \frac{21}{8}r^2 \dots \right) \quad (19)$$

正規分布への漸近の仕方をみると, 歪度は対数正規分布と同じ近づき方をするが, 尖度は  $r/16$  ほどずれて対数正規分布とは異なる近づき方をすることがわかる. OU 過程と対数正規分布の漸近形を比べるために, 歪度, 扁平度, 尖度の比  $S_{\zeta}/S$ ,  $F_{\zeta}/F$ ,  $(F_{\zeta} - 3)/(F - 3)$  のグラフを図 5 に描いた.

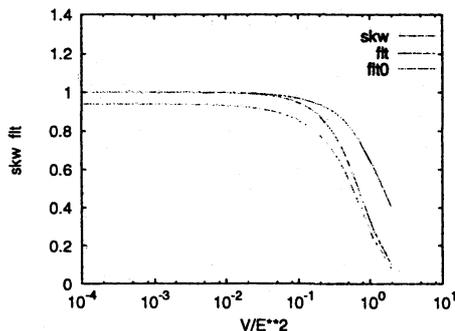


図 5: 歪度と扁平度を対数正規と OU 過程との比

領域  $r < 1/100$  ではほぼ一定の値をとっている. 歪度と扁平度では 1 に漸近していることから, 分布関数などでは両者の区別が難しいことになる. 尖度では一定の割合 (15/16) ずれたまま正規分布に近づくことがわかる.

## 5 まとめ

本研究では, 大型風洞における乱流データの大規模スケールで見られた対数正規規則 [4, 5, 6] に動機を得て, Ornstein-Uhlenbeck 過程 (OU 過程) に従う相関のあるランダム変数  $X(t)$  について, 以下の解析を行った.

OU 過程に従う揺らぎを二乗したもの  $X(t)^2$  をスケール  $R$  で粗視化 (時間平均) した量  $\zeta_R$  (式 (7)) のモーメント量と確率密度関数を  $R$  の関数として数値的に求めた. ここで得られた粗視化量の振舞いは風洞実験の乱流での結果 [4, 5, 6] とほぼ同じであった. すなわち, 粗視化スケール  $R$  が粗視化前のランダム変数の相関長  $L$  と同程度から数十倍程度までの間では, 粗視化量は対数正規分布に非常に近くなる.

そこで我々は, OU 過程が解析的に扱いやすい点を利用して粗視化量  $\zeta_R$  の 3 次と 4 次のモーメントの  $R$  依存性を解析的に求め, どのように対数正規分布に近くなるのかを調べた. これらモーメントの  $R \rightarrow \infty$  での振る舞いと対数正規分布のそれとを比べることにより, 粗視化量  $\zeta_R$  は, ごく近いが厳密には対数正規分布にな

ることなく、対数正規分布に沿ったかたちで正規分布に漸近していることがわかった。より正確には、3次モーメントの leading term は一致するが、4次モーメントのそれは数%の相対残差をもつ。しかしながら、この差は非常に僅かなものである。倍精度の膨大な  $10^{11}$  個の数値計算データでも定量的にとらえられるものではなく、解析表現がなければ議論できる大きさではなかった。また、 $R \sim L$  では粗視化量そのものよりもその対数をとった量の方がより正規分布(対数正規分布)らしく見えるということは、特に  $R \sim L$  の範囲では図3からも分かるように、変数変換による測度の重みが粗視化量そのものの分布の偏りを打ち消しているとも見られる。

以上のことを次のようにやや一般的に言い換えてみる：相関のあるランダム変数(相関スケール  $L$ ) から正定値の揺らぎの粗視化量をつくる。粗視化スケール  $R$  が相関スケール  $L$  と同程度であるときに、正定値揺らぎの粗視化量の確率密度関数は近似的に対数正規分布とみなすことができる。ただし、図1(b)や図2の対数を取ったものの変化の様子を見ると、ほぼ全領域で漸近的振る舞いを示しており、この対数正規性に対し相関が必要不可欠な要素というわけではなく、より一般の正定値の揺らぎについてもよい近似となることが示唆されている。

経済学や生態学など様々な分野で、正定値の揺らぎ量の多くが対数正規分布に従うことが報告されている。一見粗視化は行われていないが、こうした対数正規性の背後には、揺らぎを計量するスケールが相関スケールと同程度であるなどの関係があるかもしれない。あるいは、これらのデータは(巾則分布かとの論争もあるように)結構粗く、もっと緩やかな機構によりそのように見えているだけかもしれない。粗視化の有無にかかわらず、そういう意味で§1に書いた以上に、正定値揺らぎの対数正規性は非常に一般的な近似ということになり、様々な分野で実用的なモデルを考える際に一つの指針となり得る。

本研究の動機となった乱流ではどうだろうか？ Navier-Stokes 方程式に基いた解析表現が可能であればよいが、OU過程で議論したようなモーメント間の表現などは望むべくもない。実験データでは Taylor 仮説により時間と空間の情報が混在してしまっている。相関長を超える程度のスケールということで大スケール性に注目した LES 的観点からの解析がありえるであろうか。モーメントや分布を数値データにより直接的に扱うことは、本研究の結果からすると、その収束性と精度にデリケートな問題があり何らかの工夫が要る。本研究のような確率過程のモデルを用いて各機構からの寄与を理解することにより乱流に近づいていくことも、一つの有用なアプローチだと考えている。

## 6 謝辞

示唆に富む議論をしてくれた気象研究所の毛利氏に感謝する。

## 参考文献

- [1] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Doklad. Akad. Nauk. SSSR*, 30:301, 1941.
- [2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1959.
- [3] A.M. Oboukhov. Some specific features of atmospheric turbulence. *J. Fluid Mech.*, 13:77–81, 1962.
- [4] H. Mouri, M. Takaoka, A. Hori, and Y. Kawashima. On landau's prediction for large-scale fluctuation of turbulence energy dissipation. *Phys. Fluids*, 18:015103, 2006.
- [5] H. Mouri, A. Hori, and M. Takaoka. Fluctuation of statistics among subregions of a turbulence velocity field. *Phys. Fluids*, 20:035108, 2008.
- [6] H. Mouri, A. Hori, and M. Takaoka. Large-scale lognormal fluctuations in turbulence velocity fields. *Phys. Fluids*, 21:065107, 2009.
- [7] A. N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13:82–85, 1962.
- [8] J. Aitchison and J.A.C. Brown. *The Lognormal Distribution*. Cambridge University Press, Cambridge, 1957.
- [9] E. Limpert, W.A. Stahel, and M. Abbt. Log-normal distributions across the sciences: Keys and clues. *BioScience*, 51(5):341, 2001.
- [10] M. Mitzenmacher. A brief history of generative models for power law and lognormal distributions. *Internet Mathematics*, 1(2):226–251, 2003.
- [11] D.T. Gillespie. *Markov Processes: An Introduction for Physical Scientists*. Academic, New York, 1992.
- [12] S.O. Rice. Mathematical analysis of random noise. *Bell System Technical Journal*, 23:282–332, 1944.