

## 平面クエット流におけるヘアピン渦解 の存在範囲

\*関西大学 システム理工学部 板野 智昭, 関 眞佐子,  
秋永 剛

Faculty of Engineering Science, Kansai University

\*\*アストン大学 工学・応用科学科 ソトス ジェネラリス

School of Engineering & Applied Sciences, Aston University

\*\*\*京都大学大学院 理学研究科 藤 定義

Department of Physics and Astronomy, Graduate School of Science,  
Kyoto University

平面クエット流におけるヘアピン状の渦を持つ定常解の存在範囲を調べた。転回点近傍ではレイノルズ数の増加に伴い存在範囲は急速に拡がることが分かった。またこの流れ場にトレーサとして粒子を流した時、秩序構造が可視化される様子についても報告する。

### はじめに

壁面上の乱流領域内部において、秩序構造は主流方向のエネルギーを乱流内部エネルギーへと転換する役割を担っている。秩序構造は流れを乱流状態に維持する主要因としてこれまで多くの研究者によって調査解析されてきた。秩序構造の代表例として低速縞（ストリーク）構造と渦構造が挙げられる。ストリークとは、平均流速よりも遅い流体塊が壁面の近傍に形成される主流方向に縞状に並んだ領域のことを指す。ストリークはスパン方向にレイノルズ数でスケールされる特徴的な間隔で並ぶことが知られている。このストリークが粘性により散逸することなく如何にして維持されているかを考えると、自然に流れ方向に回転軸をもつ渦の存在が想像される。半世紀ほど前、Theodorsen<sup>8)</sup> は境界層乱流中の渦としてヘアピン型の渦モデルを提案した。その名称は馬蹄形渦, ヘアピン渦, バナナ渦, オメガ形渦あるいはラムダ渦などなど, 微妙な形状の差異によって, バリエーションがあるが, これらに共通する特徴として, 流れに対して横方向に鏡対称性を持つ点を挙げるができる。散逸を無視することができれば, ヘアピン型渦構造は類似

\*〒 564-8680 大阪府吹田市山手町 3-3-35

\*\*Aston Triangle, Birmingham B4 7ET, United Kingdom

\*\*\*〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町

の $\Omega$ 型の渦をその上流や下流に次々に生成し、主流方向の流れのエネルギーを乱流境界層全体に分配することができる<sup>7)</sup>。このような渦構造は乱流の実験や数値計算によって多く捉えられてきたが、実験であれば境界条件や可視化手法、数値計算であれば初期条件依存性などにより、いずれの場合も、構造周辺の流れ場を一意に定めることは難しい。

ところで、時間発展する乱流状態を、流れの高次元自由度で作られる相空間中の軌道として考え、秩序構造を、軌道が比較的長時間滞在する相空間中の不安定定常解と考え、乱流を力学系の始点から捉え直す試みが、計算機の進歩に伴ってこの20年ほどで進められてきた。その先駆となったBusseを中心としたグループは、層流解の安定性とその分岐をたどることで異なる流れの間で解を接続する作業を1980年代から盛んに行った。その成果は同定が困難とされてきた平面クエット流における永田の解の発見につながる。更にWaleffe<sup>3, 4)</sup>は、平面ポアズイユ流れに永田の解を接続することに成功した。近年、この解とその維持プロセス<sup>11)</sup>は、平面クエット流中の大規模構造と関係があると目されている<sup>14, 15)</sup>。しかしながら、永田の解のファミリーはスパン方向の鏡面对称性を満たさない。

近年、我々のグループはチャンネルのスパン方向に鏡面对称性を有した解<sup>13)</sup>を発見した。この解は永田の解やその分岐から生まれる解が持たないスパン方向の鏡面对称性を持っているため、前述のTheodorsenによって提唱されたヘアピン構造に似た渦構造を持っており、ヘアピン渦解(Hairpin Vortex Solution, HVS)と命名した。この解は剪断流中のヘアピン形状の渦の流れの情報を一意に与え、ヘアピン渦のモデルとなりうる可能性を指摘してきた。以下では、この解の存在範囲について調べた。

## 定式化

無限に広い平行平板間( $-1 < z < 1$ )を満たす非圧縮性のニュートン流体を考える。適当な無次元化により次のような支配方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{6\epsilon}{\text{Re}} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}. \end{aligned}$$

更に壁面で粘着条件、主流方向( $x$ )およびスパン方向( $y$ )に流れは周期的であることを仮定する。

$$\mathbf{u}(x+L_x, y, z) = \mathbf{u}(x, y, z), \mathbf{u}(x, y+L_y, z) = \mathbf{u}(x, y, z), \mathbf{u}(x, y, \pm 1) = \pm(1-\epsilon)\mathbf{e}_x.$$

以下、我々は支配方程式を満たす定常解を求めるため、解の対称性を考慮しつつ上で与えられた境界条件の下に時間微分項を落とした方程式を解くことにする。場は主流方向とスパン方向にはフーリエ展開、壁に垂直な方向には、 $(1-y)^2$ もしくは $(1-y)^4$ とチェビシエフ多項式の積からなる多項式を用いて表現されるものとする。対称性によって拘束を受けない展開関数の係数を自由度として、方程式から多元二

次方程式を導くことができる。これをニュートン法を用いて数値的に解くことで、様々な  $\epsilon$  に対する流れ場を得ることができる。ここで  $\epsilon = 0$  の場合が PCF に対応することを付け加えておく。

## 解の存在範囲

$\epsilon = 0$  に固定した時のヘアピン渦解の分岐図を示す。周期箱の主流方向長さ  $L_x$  とスパン方向長さ  $L_y$  (いずれもチャンネルの半幅で無次元化) を固定し、 $Re$  を徐々に変化させながら解を接続することで、 $Re$  に対する  $\tau$  の変化を求めた (図 1)。ただし、解の特徴付けには壁面における平均速度勾配  $\tau$  を用い、

$$\tau = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{dU}{dz} \Big|_{z=-1} dx dy$$

と定義する。一般には図中の点線で表現されるようなサドルノード分岐に対応する曲線によって解は示され、解はある臨界レイノルズ数 (曲線上の転回点におけるレイノルズ数) 以上で存在する。臨界レイノルズ数は、与えられた  $(L_x, L_y)$  の値によって異なるため、任意の  $(L_x, L_y)$  の組み合わせに対する臨界レイノルズ数の最小値を求めるためには試行的に  $(L_x, L_y)$  の値を変えながら、臨界レイノルズ数を求め続ける必要がある。これまでの計算で、この最小値は  $(L_x, L_y) = (2.6\pi, 1.5\pi)$  において、 $Re = 139$  と求まっている。この時の転回点の位置を、図中の黒丸で示した。

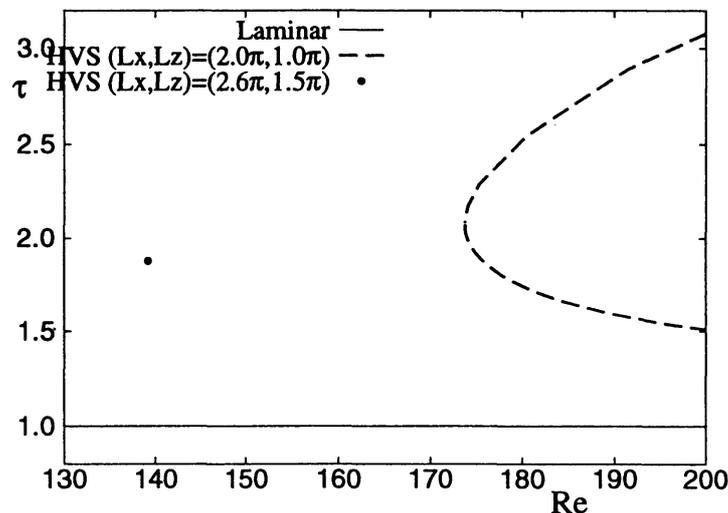


図1 周期箱の主流方向長さ  $L_x$  とスパン方向長さ  $L_z$  を固定した時の、 $Re$  の変化に対するヘアピン渦解の  $\tau$  の変化の様子。

次に、 $Re = 139$  と  $Re = 147$  の場合について、周期箱の  $L_x$  と  $L_z$  を変化させて、ヘアピン渦解の接続を行い、解の存在範囲を調べた。図 2 では  $(L_x, L_z, \tau)$  空間における解の位置 (存在領域) を三面図として示した。

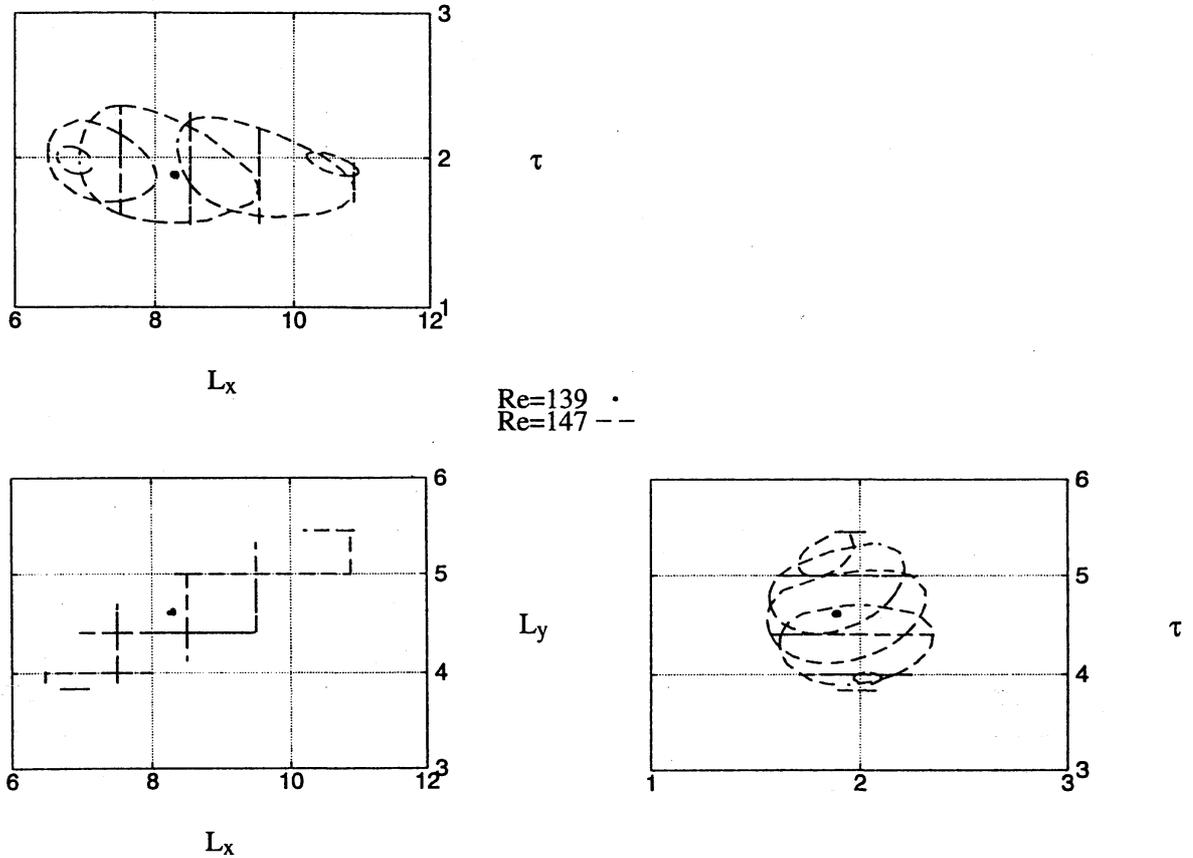


図2  $(L_x, L_z, \tau)$ 空間におけるHVSの存在域. 中央の点状の領域は $Re = 139$ とした時の解の存在範囲, 点線状で示された領域は $Re = 147$ とした時の解の存在範囲に対応する.

$Re = 139, 147$ のいずれの場合においても,  $(L_x, L_z)$ のいずれか一方のパラメータのみを固定することで解の存在域を求めている. 従って, 値は横軸や縦軸に平行に直線状にプロットされる場合が含まれる. しかし,  $Re = 139$ はこの解のサドルノードの転回点付近に相当し, このプロットのスケールでは $(L_x, L_z, \tau)$ 空間における存在域は点状に見えている. 一方,  $Re = 147$ の場合は存在域は図に点線プロットされた領域を囲む卵型の包絡状の閉曲面 (図には記入していない) によって表すことができる. ここではこの包絡状閉曲面を暫定的に”卵の殻”と表現しよう. この場合, ”卵の殻”は $\tau$ の値が大きい方と小さい方の半分ずつの殻からなり, それぞれはサドルノード分岐の上分枝と下分枝に対応する. “卵”の体積は $Re$ の上昇に伴い急激に増加する.

## 流れ場の可視化

求められた HVS 解が、仮に短時間の間でも実験で得られうるとするならば、その流れ場はどのように可視化されるのであろうか？ 従来は、水素気泡法やスモークワイヤ法などを用いて多量の微小な粒子を流れ場の中に混入し、秩序構造の内外に作られる粒子の数密度差(濃淡)をもって壁面上の乱流中における秩序構造の可視化を行うことが多くなされてきた。そこで、我々はヘアピン渦解に一粒子を混入した時の粒子の軌道を計算し、粒子の存在確率から実験で得られる濃淡を推測することにした。

周期箱のサイズ  $(2\pi, \pi)$  の下にレイノルズ数  $Re = 200$  におけるヘアピン渦解中(ただし上分岐)に流体と等密度の球形粒子を単位時間に一定の割合で流したものとし、粒子の運動方程式としてはいわゆる Maxey-Riley 方程式<sup>16)</sup>を用いた。壁面の粘着境界条件の存在は本来であればこの方程式の成立条件に抵触するが、ここではこの点には触れない。また、いわゆるバセットの履歴項はここでは考慮しなかった。また、粒子間の相互作用は無視できるものとする。粒子の速度と位置の時間積分には 2 次の修正オイラー法を用いた。また、粒子の位置における流体の速度場は、粒子の位置を囲む近傍の 8 格子点の速度場をもとに線形補完を用いて計算した。

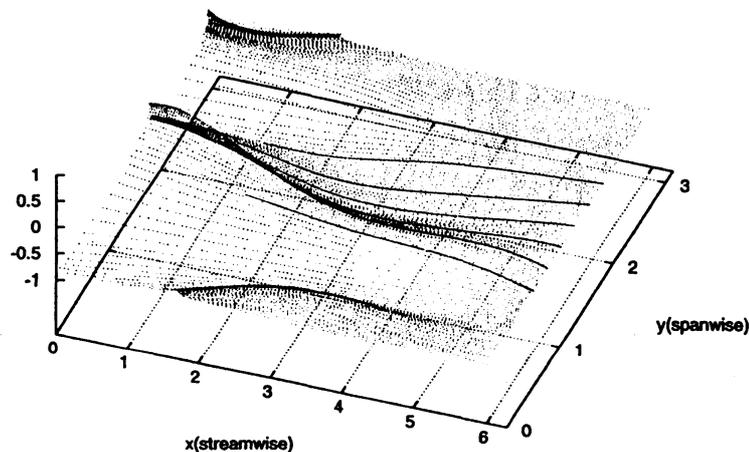


図3  $(L_x, L_z) = (2\pi, \pi)$ ,  $Re = 200$  におけるヘアピン渦解に等密度球形粒子を壁面近傍から一斉に注入した際に観測される粒子数密度の濃淡。参考のために実線で数本の流線を示した。 $z = -1$  に PCF の境界である平板があり、粒子は図に向かって右から左に向けて一定速度で移動する。

$(L_x, L_z) = (2\pi, \pi)$ ,  $Re = 200$  におけるヘアピン渦解に等密度球形粒子を壁面近傍から一斉に注入すると、注入した領域から下流に向けて粒子数密度の濃淡が発生する(図3)。この時濃度が濃くなる部分が低速ストリークの位置に一致する。図は

$(x, y) = (6, -0.9)$  の位置 (壁から無次元化距離で 0.1 の位置) から微小な粒子を流した時に形成される流線群である。 $z = -1$  に平板があり、図に向かって右から左に向けて一定速度で移動している。2 平板間の流体は引きずられるが、特にここで粒子を流した領域は  $-1 < z < 0$  なので、粒子も平均的には右から左に向けて一定速度で移動している。上流 ( $x=6$ ) で一様に分布していた粒子は下流 ( $x = 0$ ) に移動するに従って、 $y = 0$  付近 (周期境界のため  $y = \pi$  と同じ) か  $y = \pi/2$  付近に集積していく様子がみとれる。

対象とする流れは非圧縮性の場合なので、単位体積を占める粒子の濃度が時間や空間位置によって変化することは理論上ありえない。ここで観測されている縞状の濃淡は線分  $(x, y) = (6, -0.9)$  上から単位長さ単位時間あたり一定の割合で粒子を流しているために観測されているのである。粒子が局所的に縞状に集積するための二つの機構が考えられる。一つは主流方向に速度が速い領域では、当然のことながら粒子が速く流れ去ってしまうため、同じ時間間隔で粒子を散布していても、その領域では観測される粒子密度は低くなる。しかしながら、図で可視化されている下流に行くに従って発達する縞上の濃淡は、この機構によって生まれているものではない。なぜならば、壁面近傍ほど  $z = -1$  に存在する平板と同じ速度で流体は  $x$  軸負の方向に流れ去るのだが、平面クエット流の壁面近傍の“低速ストリーク”は壁面速度に近い領域に相当するので、この意味では“低速ストリーク”にある流体は静止系から見ると実は高速に移動しており、上の機構が本当ならば、低速ストリークのある領域で粒子の数密度は低くなるべきであるからである。ここで下流に行くに従って発達する濃淡は、もう一つの機構に依っている。もう一つの機構では、ストリークを形成している縦渦 (主流方向に回転軸を持ち、 $y$ - $z$  断面内の渦) によって粒子の軌道が僅かながら主流方向からずれ、これによりスパン方向位置 ( $y$  の値) に依存して粒子の数密度に関するゆらぎが生まれ、縞状の濃淡として観測されているのである。

## まとめ

平面クエット流におけるヘアピン状の渦を持つ定常解の存在範囲について報告した。転回点近傍ではレイノルズ数の増加に伴い存在範囲は急速に広がることが分かった。またこれとは別に、流れ場にトレーサとして粒子を流した時、秩序構造が可視化される様子についても報告した。トレーサによる低速ストリークの可視化は縦渦による断面流に依ることが分かった。

可視化に用いた場合は乱流が維持されると考えられているレイノルズ数よりも低いレイノルズ数で得られた場である。従って、実験との比較と言う意味では、本来もっと高いレイノルズ数で同じ計算を行うべきであったが、 $Re$  の増加に伴い HVS の上分枝の解像度は急激に落ちるため、可視化結果の提示は断念した。今後、高いレイノルズ数における上分岐を十分な解像度で求める作業を進める予定である。

## 謝辞

本研究の一部は、科学研究費(19760123) および平成 21 関西大学重点領域研究助成制度より助成を受けた。ここに謝意を表す。

## 引用文献

- 1) M. Nagata, *J. Fluids Mech.* 217, 519 (1989).
- 2) R. M. Clever and F. H. Busse, *J. Fluids Mech.* 344, 137 (1997).
- 3) F. Waleffe, *Phys. Rev. Lett.* 81, 4140 (1998).
- 4) F. Waleffe, *Phys. Fluids* 15, 1517 (2003).
- 5) G. Kawahara and S. Kida, *J. Fluid Mech.* 449, 291 (2001).
- 6) J. F. Gibson, J. Halcrow, and P. Cvitanovic, *J. Fluids Mech.* 611, 107 (2008).
- 7) R. J. Adrian, *Phys. Fluids* 19, 41301(1) (2007).
- 8) T. Theodorsen, in *Proc. Second Midwestern Conf. on Fluid Mechanics* (1952), pp. 1-19.
- 9) M. Nagata and F. Busse, *J. Fluids Mech.* 135, 1 (1983).
- 10) M. Nagata and T. Itano, in *Proc. of Conference on Modelling Fluid Flow* (2003), pp. 588-594.
- 11) F. Waleffe, *Phys. Fluids* 2, 76 (1990).
- 12) R. J. Adrian, C. D. Meinhart, and C. D. Tomkins, *J. Fluid Mech.* 422, 1 (2000).
- 13) T. Itano and S. C. Generalis, *Phys. Rev. Lett.* 102, 114501 (2009).
- 14) J. Wang, J. Gibson, and F. Waleffe, *Phys. Rev. Lett.* 98, 204501 (2007).
- 15) Y. Hwang, and C. Cossu, *Phys. Rev. Lett.* 105, 044505 (2010).
- 16) M. R. Maxey, and J. J. Riley, *Phys. Fluids* 26, 883 (1983).