

## 回転球面上の強制 2 次元乱流の漸近状態

京都大学・数理解析研究所  
小布施 祈織 (Kiori Obuse)  
竹広 真一 (Shin-ichi Takehiro)  
山田道夫 (Michio Yamada)

Research Institute for Mathematical Sciences,  
Kyoto University

### 1 はじめに

惑星上の大規模な流れを調べるにあたって用いられる数理モデルには、多数の物理過程の扱い方によって様々なものが存在する。しかしながらそれらのモデルにおける流れの性質、特に流れの長時間後の漸近状態は明確でないことが多い。そこで本研究では 2 次元回転球面モデルにおいて、大規模な流れの長期的な振る舞いとその漸近状態を調べることを目的とする。

2 次元回転球面モデルは、本来は 3 次元的存在である惑星上の大規模な流れが、系の回転と密度成層の効果によって 2 次元的に運動している、とするモデルであり、特に木星など惑星の東西の縞模様と関連して、多くの研究がなされてきた。さらにこのモデルにおいて球の半径  $a$  が十分に大きいときは、回転球面上の大規模な流れをほぼ 2 次元平面的であるとみなして、球の接平面において Colioris 力の緯度への線形依存性を取り入れた  $\beta$  平面近似がしばしば用いられる。 $\beta$  平面は無限領域であるため、空間座標のスケーリングを伴う摂動手法が有効であり、回転球面上での流れのダイナミクスを理論的に考えるためのモデルとなっている。

非回転系の場合、3 次元流体方程式の非線形相互作用（移流項）はエネルギーを保存するが、2 次元流体方程式ではエネルギーとエンストロフィーの両方が保存される。このため（非回転系の）2 次元乱流においては、3 次元の場合と異なり、エンストロフィーが高波数に流れる（エンストロフィーカスケード）と同時にエネルギーが低波数に流れ（エネルギー逆カスケード、時間発展とともに流れ場に大きな構造が形成される。この両方向のカスケードに伴って、エネルギースペクトルの形をエンストロフィーカスケード領域では  $k^{-3}$ 、エネルギー逆カスケード領域では  $k^{-5/3}$  と考える次元解析が Kraichnan [5] と、Leith [6] によって提案され、以後、

多くの数値実験によってこの確認が試みられてきた。そのような中で McWilliams [9] は減衰 2 次元乱流中には孤立秩序渦（コヒーレント渦）が出現することを数値的に見出し、2 次元乱流を衝突・融合を経て次第に大きくなる秩序渦の集団とする描像を提案した。流れの構造の空間スケールから見た場合、2 次元乱流の大きな特徴は、エネルギー逆カスケードによって運動の空間スケールが次第に大きくなることにある。

これに対し、 $\beta$  面上の 2 次元乱流（ $\beta$  面乱流）は非回転系の 2 次元乱流とは大きく異なる性質を持つ。Rhines [11] は  $\beta$  面乱流の数値実験を行い、東向き流と西向き流が南北に並ぶ縞縞構造が発達することを見出した。この結果に対し彼は、移流項の効果が支配的となる波数領域と回転効果が支配的となる波数領域との境界を与える波数（Rhines 波数） $k_\beta$  を導入し、エネルギーの逆カスケードが回転効果によって Rhines 波数周辺で阻止されることで、Rhines スケール（Rhines 波数の逆数）をもつ縞縞構造が形成されると論じた。エネルギー逆カスケードが Rhines 波数で阻止されるという描像はその後、回転系における流れの大規模秩序形成の理解において中心的な役割を担うこととなった。

その後、回転球面上の 2 次元乱流について、Williams [15] が木星の縞模様に関連する数値実験を行った。当時の計算機の制約から彼は場に 8 回対称性を仮定し、木星のパラメータと高波数のランダム強制力を用いて、球面上で東西方向の流れ（帯状流）が南北に並ぶ結果を得た。

このように球面上においても  $\beta$  平面上においても見出された帯状流は、惑星や海洋などの大規模流れに見られる帯状構造に説明を与えるものとして、期待され多くの研究の対象となってきた。

エネルギーの逆カスケード時にエネルギーが東西方向成分に集中することについては、Chekhlov et al. [2], Huang and Robinson [3] などによって調べられ、最近では Balk [1] が  $\beta$  効果に伴う特殊な擬似保存量を用いた説明を試みている。また帯状流の形状については Marcus and Lee [8] や Vallis and Maltrud [14] などによって調べられ、東向きジェットと西向きジェットが速さと太さに関して非対称であることが指摘されている。

惑星大気運動および流体力学の観点から最も興味あることの一つは、このような回転効果（ $\beta$  効果）を含む系における 2 次元乱流の長時間後の流れ形態、すなわち  $t \rightarrow \infty$  の流れの漸近状態である。回転を含まない系では一様等方な初期場のアンサンブルから出発した系は一様等方に留まるが、回転の非等方性効果が存在する系では非等方な漸近状態が実現する。回転球面も  $\beta$  面も、固定境界を伴わないため、これらの流れ場は最も簡単な非等方乱流に属し、乱流理論の観点からも興味深い。また回転球面の場合にはさらに赤道から両極まで場が非一様になるため、最も簡単な非等方非一様乱流の例となる。

回転球面あるいは  $\beta$  面における乱流の漸近状態は、これまでの研究から、ドラッグ（低波数域の散逸機構）の有無および強制力（エネルギー注入機構）の有無によって分類されるように見える。

強制力がなく（自由減衰）ドラッグもない場合の回転球面上の 2 次元乱流については、Yoden and Yamada [16] によって調べられ、漸近的な流れ場は、極域の強い西向きジェットと中低緯度域の弱い東向き流れから形成されることが見出された。このような西向きジェットの形成機構は、大雑把には西向き角運動量が Rossby 波によって極域に輸送されるためと理解されているが、その詳細は現在でも明らかではない。この極域の強い西向きジェットの形成については、Takehiro et al. [13] によって詳細に調べられ、回転角速度  $\Omega$  が大きくなる時、ジェットの強さは  $\Omega^{1/4}$  で増加し、ジェットの幅は  $\Omega^{-1/4}$  で減少することが示されている。これは、 $\Omega \rightarrow \infty$  のとき、流れ場のすべてのエネルギーがこの細い極域西向きジェットに吸収されることを示しており、極端な非一様非等方場の出現を意味している。

一方、ドラッグは無いが強制力がある場合については、Nozawa and Yoden [10] によって数値実験が行われている、彼らは強制力を与える中心波数と回転角速度について 18 種類の組み合わせを選び、長時間計算を実行した。その結果、強制力の波数が Rhines 波数よりも大きな場合には、強制力がない場合と対照的に、流れ場には強い極域西向きジェットは形成されず、中低緯度には多数本の東西方向の流れ（帯状流）が南北に並ぶことが見出された。彼らの用いた強制力は履歴をもつランダム強制力であったが、これに対し時間的にホワイトノイズとなる強制力を用いた計算が  $\beta$  平面上で Chekhlov et al. [2] によって行われ、帯状流は最終的に大きな 2 本のジェットとなることが見出された。この結果は、古典的な Rhines の議論のようにエネルギー逆カスケードは Rhines 波数で止められるわけではなく、Rhines 波数を越えてさらに低波数までエネルギーが輸送されることを示しており興味深い。

強制力およびドラッグを含む場合については、Vallis and Maltrud [14], Huang and Robinson [3] などに調べられ、履歴を伴うランダム強制力を用いた場合には、 $\beta$  平面上においても球面上においても幾本もの帯状流が並んだ状態が長時間維持されることが報告されている。これに対して Huang et al. [4] は強制力として時間的にホワイトノイズとなるものを、ドラッグとして波数の負の中乗に比例する粘性を用いて球面上での計算を行い、この場合には逆カスケードが最低波数まで進むことを報告した。そこで彼らは、Nozawa and Yoden [10] で維持された縞上構造の原因として、履歴を持った強制を指摘している。通常のドラッグが帯状流に及ぼす影響は Manfroi and Young [7] においても議論され、ドラッグのない場合には考えている領域全体に 1 つのジェットが形成され、ドラッグが弱い場合には縞状の帯状流が形成されることが述べられている。さらにドラッグの増加に伴い、大域安定解が入れ替わることも指摘されている。

本研究では、このような帯状流の漸近状態に注目し、履歴を持ったランダム強制力を用いた場合について Nozawa and Yoden [10] の数値実験を再考し、帯状流の振る舞いを数値実験および弱非線形方程式を用いて調べる。§2 では回転球面上において 2 次元強制乱流の長時間積分を行い、その漸近状態を報告する。§3 では背景に乱流を伴う帯状流のダイナミクスについて述べる。

## 2 回転球面上での2次元乱流の漸近状態

### 2.1 モデル

ここでは Nozawa and Yoden[10] の計算を再検討し、履歴を伴う小規模なランダム強制力によって駆動される場合について、長時間後の漸近状態を数値的に議論する。用いる支配方程式は、経度  $\phi$  sin 緯度  $\mu$  座標系で書かれた非圧縮性2次元順圧流体の回転球面上での無次元渦度方程式、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = F + \nu (\nabla^2 + 2) \zeta, \quad (1)$$

である。ここで  $t$  は時間、 $\psi$  は流れ関数、 $\zeta \equiv \nabla^2 \psi$  は渦度であり、 $\Omega$  は無次元化された球の回転角速度、 $\nu$  は無次元動粘性係数、 $F = F(\phi, \mu, t)$  は強制渦度関数である。  $J(A, B)$  は Jacobian 演算子:  $J(A, B) \equiv (\partial A / \partial \phi)(\partial B / \partial \mu) - (\partial A / \partial \mu)(\partial B / \partial \phi)$  を表す。粘性項の中の  $2\nu\zeta$  は系の全角運動量を保存するために必要であり、例えば Silberman[12] で議論されている。また、無次元化は、球の半径を長さスケール、(球の回転角速度) $^{-1}$  を時間スケールとして行っている。

渦度強制関数  $F$  には Nozawa and Yoden[10] と同様に、小規模で一様等方な、履歴を伴うランダム強制関数

$$F(\phi, \mu, j\Delta t) = RF(\phi, \mu, (j-1)\Delta t) + \sqrt{(1-R^2)}\hat{F}(\phi, \mu, j\Delta t), \quad (2)$$

を考える。  $\Delta t$  は時間ステップ幅、  $j$  は時間ステップ番号、  $R = 0.982$  は記憶係数である。  $\hat{F}$  はランダムな渦度のソースであり、波数空間での狭いバンド状の領域  $n_f - \Delta n \leq n \leq n_f + \Delta n$ 、  $\Delta n = 2$  においてのみ与えられ、各時間ステップにおいて、

$$\hat{F}(\phi, \mu, j\Delta t) = \sum_{n=n_f-\Delta n}^{n_f+\Delta n} \sum_{\substack{m=-n \\ m \neq 0}}^n \hat{F}_n^m(j) Y_n^m(\phi, \mu), \quad (3)$$

に従って生成される。ここで  $Y_n^m$  は全波数  $n$  東西波数  $m$  の球面調和関数であり、  $\hat{F}_n^m$  は展開係数である。ランダムで一様な  $\hat{F}$  を生成するために、  $\hat{F}_n^m$  ( $m \geq 0$ ) の位相は  $[0, 2\pi]$  でランダム一様に分布させ、  $\hat{F}_n^m$  ( $m \geq 0$ ) の振幅は  $\|F\| = \sqrt{\langle \hat{F}^2 \rangle}$  の制約の下でランダムに決定する。ここで  $\langle \dots \rangle$  は球面平均を意味する。  $\hat{F}$  は実関数であるので、  $\hat{F}_n^{-m}$  ( $m > 0$ ) は  $\hat{F}_n^m$  ( $m > 0$ ) の複素共役となる。

数値計算に用いる式(1)内のパラメータは、全て Nozawa and Yoden [10] と同じ値を用いる。このとき、動粘性係数は  $\nu = 3.46 \times 10^{-6}$  となり、球の回転角速度  $\Omega$  は5つの異なる値:  $\Omega = 0.5\pi, \pi, 2\pi, 4\pi$ , そして  $8\pi$ , を、強制力の中心波数  $n_f$  は異なる3つの値:  $n_f = 20, 40$ , and  $79$ , をとる。  $\hat{F}$  の平均自乗振幅  $\|F\|$  は、各  $n_f$  に対して、表1に示すように定める。

計算には球面調和関数を用いたスペクトル法を用い、例えば流れ関数  $\psi$  は次のように展開される。

$$\begin{aligned}\psi(\phi, \mu, t) &= \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{m=-n}^n \psi_n^m(t) Y_n^m(\phi, \mu) \\ &= \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{m=-n}^n \psi_n^m(t) P_n^m(\mu) \exp(im\phi).\end{aligned}$$

ここで  $\psi_n^m$  は展開係数である。スペクトル法の切断波数は  $N_T = 199$ 、空間格子点数は経度方向に 600、緯度方向に 300、とする。これは aliasing エラーを取り除くのに充分大きい。時間積分は、時間ステップ幅が  $\Delta t = 0.05$  である 4 次の Runge-Kutta 法を用いて、渦度ゼロの初期条件から行う。積分時間は Nozawa and Yoden [10] の約 100 から 500 倍までとした(表1)。本研究では以上の条件で、15 種類の数値シミュレーションを行った<sup>1</sup>。なお、シミュレーション番号は Nozawa and Yoden [10] のものとの対応関係を残すために 2-6, 8-12, そして 14-18 としてあることに注意されたい(表1)。

## 2.2 シミュレーション結果

初期場をゼロとし、回転角速度および与える強制力の波数を変えた 15 種類の時間積分を行うと、流れ場の時間発展の初期段階では Nozawa and Yoden [10] の結果を再現し、多数本の東向きジェットと西向きジェットが南北に交互に並ぶ帯状構造、あるいは、両極付近に集中した西向きジェットを伴う構造が現れた (Fig1)。しかし、さらに時間積分を進めると (Nozawa and Yoden[10] の 100 倍から 500 倍)、全ての計算において、上記の帯状構造の実現後、さらに、流れのスペクトル成分分布が殆ど変化しない段階を経た後、急激なジェットの融合・消滅が観察された。その結果、いずれの場合も最終的に少数本 (2 本または 3 本) の東西ジェットが形成されることが見出された (Fig2)。ここでジェットとは、角運動量の経度方向成分の経度方向平均  $\overline{[L_{lon}]}$  を意味し、

$$\overline{[L_{lon}]} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{lon} \sqrt{1-\mu^2} d\phi,$$

$u_{lon} = -\sqrt{1-\mu^2} (\partial\psi/\partial\mu)$  は速度の経度方向成分、である。

上記の 15 種類の数値計算では、長時間後の漸近状態として、12 種類で 2 本のジェットが得られた。しかし回転角速度と強制力の波数が共に大きい 3 種類 (run 16 ~ 18) の場合には、3 本のジェットが非常に長い時間安定に維持されることが見出された。この状態に人為的にいくつかの摂動を与えても、ジェットの本数は 3 本のまま維持された。この結果は、長時間後の漸近状態におけるジェットの本来の本数は与える強制力の強さと波数に依存することを示唆している。

表 1:  $\Omega$ ,  $n_f$ ,  $\|F\|$ , および積分時間. run 番号は Nozawa and Yoden [10] でのものに対応する.

run 番号	$\Omega$	$n_f$	$\ F\ $	積分時間
2	$0.5\pi$			$1 \times 10^5$
3	$\pi$			$1 \times 10^5$
4	$2\pi$	20	$1.412 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^5$
5	$4\pi$			$1 \times 10^5$
6	$8\pi$			$1 \times 10^5$
8	$0.5\pi$			$1 \times 10^5$
9	$\pi$			$1 \times 10^5$
10	$2\pi$	40	$3.929 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^5$
11	$4\pi$			$2.5 \times 10^5$
12	$8\pi$			$1.6 \times 10^5$
14	$0.5\pi$			$1 \times 10^5$
15	$\pi$			$1 \times 10^5$
16	$2\pi$	79	$1.415 \times 10^{-1}$	$5.3 \times 10^5$
17	$4\pi$			$5.2 \times 10^5$
18	$8\pi$			$5.7 \times 10^5$

流れの運動エネルギーは時間積分の初期段階において単調に増加するが、多くの場合において、1度もしくは数度、エネルギーが殆ど増加しない(もしくは減少する)状態を経験する。しかしさらに時間積分を続けると、エネルギーは再び急激に増加し始める (Fig3)。興味深いことに、このエネルギーの停滞・増加とジェットとの融合・消滅には明快な対応関係がある: エネルギーの増加が停滞する期間にはジェットは形状はほぼ維持されており、エネルギーの急激な増加が再び起こる時点でジェットとの融合・消滅が起こる。しかしながらそのメカニズムは明らかではない。

従来、東西ジェットが比較的長時間安定に存在している状況でのエネルギー値の停滞がしばしば、流れの漸近状態への到達の目安として用いられてきた。しかしながら本研究の計算結果は、いったんエネルギー値の停滞状態が見られても、さらに時間積分を進めると再びエネルギーの増加を伴うジェットとの融合・消滅が起きることを示している。従ってエネルギー値の停滞は、漸近状態の目安として必ずしも充分ではない。

<sup>1</sup>数値計算の収束性は、異なる時間ステップ幅:  $\Delta t = 0.025$  および異なる切断波数と空間格子点数:  $N_T = 341$ , 空間格子点数  $1024 \times 512$  を用いた計算を行って確認してある。

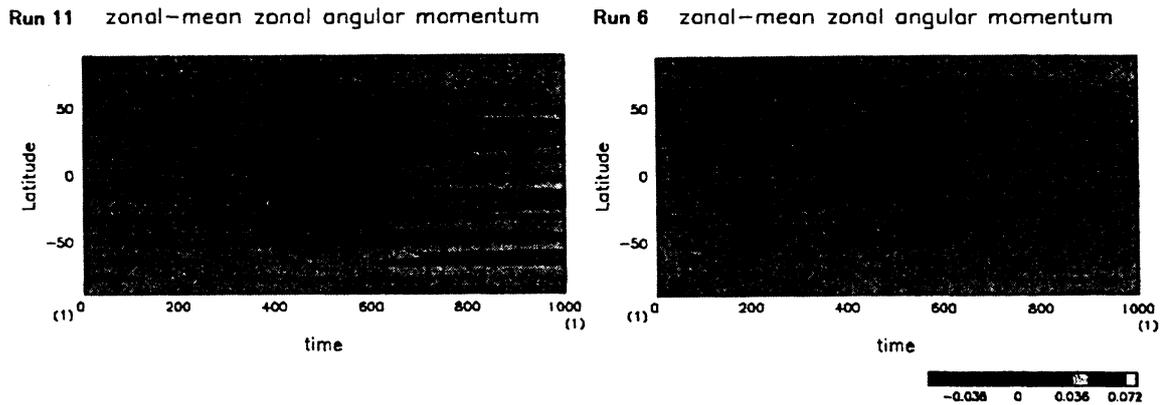


図 1:  $t = 0 \sim 1000$  におけるジェットの時間変化の典型例. 横軸は無次元時間, 縦軸は緯度であり, 紫～青は西向きジェットを, 赤～黄色は東向きジェットを表す. Nozawa and Yoden[10] でのシミュレーションと整合的な, 多数本の東向きジェットからなる縞状構造 (左, run 11) と極域付近に集中した西向きジェットからなる構造 (右, run 6) が確認される.

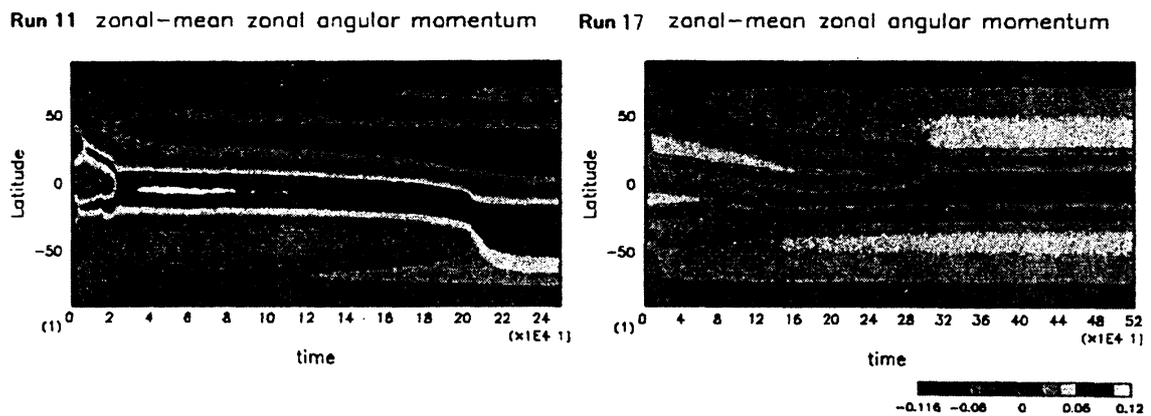


図 2: ジェットの長時間変化の典型例. 横軸は無次元時間, 縦軸は緯度であり, 紫～青は西向きジェットを, 赤～黄色は東向きジェットを表す. 縞状構造を形成する多数本のジェットは急激な融合・消滅を繰り返す, 最終的には 2 本 (左, run 11) もしくは 3 本 (右, run 17) のジェットから成る漸近状態を実現する.

回転球上での流れを考える際には, 非線形効果と回転効果がつりあうところの波数である Rhines 波数が重要な役割を果たす. 波数空間において, Rhines 波数よりも高波数側では非線形効果が支配的であり, Rhines 波数よりも低波数側では回転効果が優勢となっている. それ故, 十分に高波数な領域で与えられたエネルギーは 2 次元非回転系に特有なエネルギー逆カスケードによって低波数領域へと進むが, Rhines 波数周辺まで達すると回転効果によって逆カスケードを阻止される. その

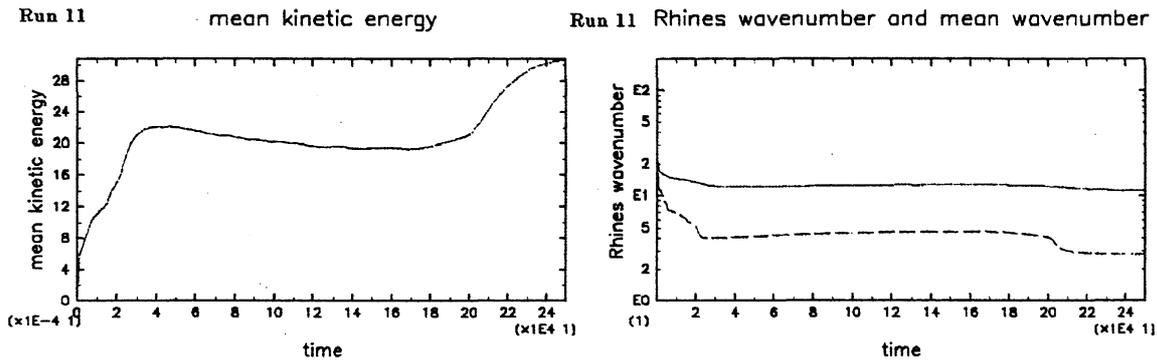


図 3: 左:エネルギーの時間変化の典型例 (run 11). 右:Rhines 波数 (実線) と平均波数 (破線) の時間変化 (run 11) の典型例.

結果, Rhines 波数に対応する空間スケールを持つ多数本の西向きジェットと東向きジェットを持つ帯状構造が形成され, 維持される, と一般には説明される.

しかしながら本研究での数値計算結果によると, 流れの代表的な波数であるエネルギーの重みをかけた平均波数

$$n_{mean}(n, t) \equiv \frac{\sum_{n=1}^{N_T} n \langle \mathcal{E}_{tot}(n, t) \rangle}{\sum_{n=1}^{N_T} \langle \mathcal{E}_{tot}(n, t) \rangle},$$

は, 時間積分の非常に初期の段階において Rhines 波数

$$n_{\beta}(t) \equiv \sqrt{\frac{\langle \beta \rangle}{2U_{rms}(t)}},$$

を下回り, それにもかかわらずさらに逆カスケードを続ける. ここで, 球面での Rhines 波数および平均波数の定義における  $U_{rms}$ ,  $\langle \beta \rangle$ ,  $\langle \mathcal{E}_{tot}(n, t) \rangle$  はそれぞれ  $U_{rms}(t) \equiv \sqrt{2\mathcal{E}(t)}$ , Coriolis パラメータの緯度方向微分である  $\beta$  の球面平均, および全波数  $n$  における球面平均エネルギー  $\langle \mathcal{E}_{tot}(n, t) \rangle$  である. その結果, 本計算で得られた漸近状態では, 流れの平均波数は 2 または 3 周辺という, Rhines 波数よりも充分小さな値に達している (Fig3)

強制力が履歴を持たない場合について, Huang et al. [4] らはエネルギー逆カスケードが Rhines 波数よりも小さな波数にまで進むことを指摘しているが, 本計算は, 強制力が履歴を持つ場合についても逆カスケードが同様の性質をもつこと, すなわち, 回転球面上の強制順圧 2 次元乱流におけるエネルギー逆カスケードは Rhines 波数を超えて進むことを示している. またこのことは, 回転球面上の非圧縮性強制順圧 2 次元流は, 長時間後の漸近状態を考えると, 木星などに見られる

多数本の東西ジェットをもつ惑星大気運動のモデルとしては適当でないことを示唆している。

本研究の漸近状態において、実際の流れ場は強い東西流に支配されている。しかしながら Rhines スケールよりも大きな南北スケールをもつ層流ジェットは線形安定となるため、上記のジェット本数の減少は層流ジェットの順圧不安定だけでは説明することができない。従って東西ジェットの融合・消滅には、その背景に存在する乱流の効果が本質的に重要である。

### 3 背景に乱流効果を持った帯状流の安定性と最終状態

§2において述べたように、回転球面上での2次元乱流では、多数本の東向きジェットと西向きジェットが楕に並ぶ縞状構造が形成されるが、これらの東西ジェットは時間の経過とともに融合・消滅を繰り返し、最終的には小数本(2本もしくは3本)のジェットからなる構造が実現される。しかしながら Rhines 波数よりも小さな代表的全波数を持ったジェットの融合を単純な層流の順圧不安定によって説明することは出来ない。

そこでここでは  $\beta$  面上において、背景の乱流の効果をモデル化した東西ジェットの性質を、弱非線形解析及び数値解析を用いて調べる。

#### 3.1 問題設定

先行研究である Manfroi and Young [7] は、 $\beta$  平面上において、適当な強制力の下で  $\sin(mx)$  型の南北方向の流れに東西方向の流れを重ねた基本流

$$(u, v) = \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = (U, m\Psi_0 \sin mx)$$

が実現されていると仮定し、その超臨界状態に現れる変動流を弱非線形解析によって調べている。ここで、 $u$  と  $v$  はそれぞれ基本流の速度の  $x, y$  方向成分である。Manfroi and Young [7] は基本流の Reynolds 数  $R$  が臨界 Reynolds 数  $R_c$  を微小量だけ上回り、微小量  $\epsilon$  を用いて

$$R = R_c(1 + \epsilon^2),$$

と表される場合を仮定し、微小量  $\epsilon$  を用いて、変動流の流れ関数  $\psi$ 、基本流の  $x$  方向速度  $U$ 、および  $\beta$  パラメータに対する摂動展開

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \epsilon\psi_1 + \epsilon^2\psi_2 + \dots, \\ U &= U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \dots, \\ \beta &= \beta_0 + \epsilon\beta_1 + \epsilon^2\beta_2 + \dots, \end{aligned}$$

および空間座標と時間に対する多重尺度展開

$$\eta \equiv \epsilon y, \quad \tau \equiv \epsilon^4 t, \quad \xi \equiv \epsilon^6 x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon^6 \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \epsilon \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \epsilon^4 \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

を行い、小規模な空間変化を持つ基本流によって駆動された、 $x, \xi$  に依らない変動流の  $O(1)$  成分  $U$  の支配方程式

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = -(2 - \gamma^2) \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 3 \frac{\partial^4 U}{\partial \eta^4} - 2\gamma \frac{\partial^2 U^2}{\partial \eta^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 U^3}{\partial \eta^2}, \quad (4)$$

を導いた。ここで  $\gamma$  は

$$\gamma \equiv \beta_1 - U_1.$$

で定義される。式 (4) の詳しい導出は Manfroi and Young [7] 参照のこと。

### 3.2 定常解とその安定性、最終状態

Manfroi and Young [7] では、この弱非線形方程式 (4) を用いてランダムな初期条件から数値実験を行い、多数本のジェットから成る縞状構造が速やかに形成された後、それらのジェットはゆっくりと融合・消滅を繰り返し、最終的には 1 つのジェットとなることを見出した。

本研究ではまず、式 (4) について、Manfroi and Young [7] の数値実験において現れた東西ジェットに対応する定常解  $U_0(\eta)$  を解析的に見出した。 $\eta \rightarrow \pm\infty$  において定数  $U_w$  へと収束する、即ち  $U_0 \rightarrow U_w$  となる定常解  $U_0(\eta)$  は

$$U_{0east}(\eta) = \frac{a_{east}^2 U_R \tanh^2 \left[ \frac{(U_R - U_w) a_{east}}{6} \eta \right] - U_E}{a_{east}^2 \tanh^2 \left[ \frac{(U_R - U_w) a_{east}}{6} \eta \right] - 1},$$

$$a_{east} \equiv \sqrt{\frac{U_E - U_w}{U_R - U_w}},$$

$$U_{0west}(\eta) = \frac{a_{west}^2 U_E \tanh^2 \left[ \frac{(U_E - U_w) a_{west}}{6} \eta \right] - U_R}{a_{west}^2 \tanh^2 \left[ \frac{(U_E - U_w) a_{west}}{6} \eta \right] - 1},$$

$$a_{west} \equiv \sqrt{\frac{U_R - U_w}{U_E - U_w}},$$

と表される。ここで、 $U_{0east}, U_{0west}$  はそれぞれ東向きジェットと西向きジェットを表し、 $U_E, U_R$  は

$$U_E = 2\gamma - U_w - \sqrt{-2U_w^2 + 4\gamma U_w + \gamma^2 + 6},$$

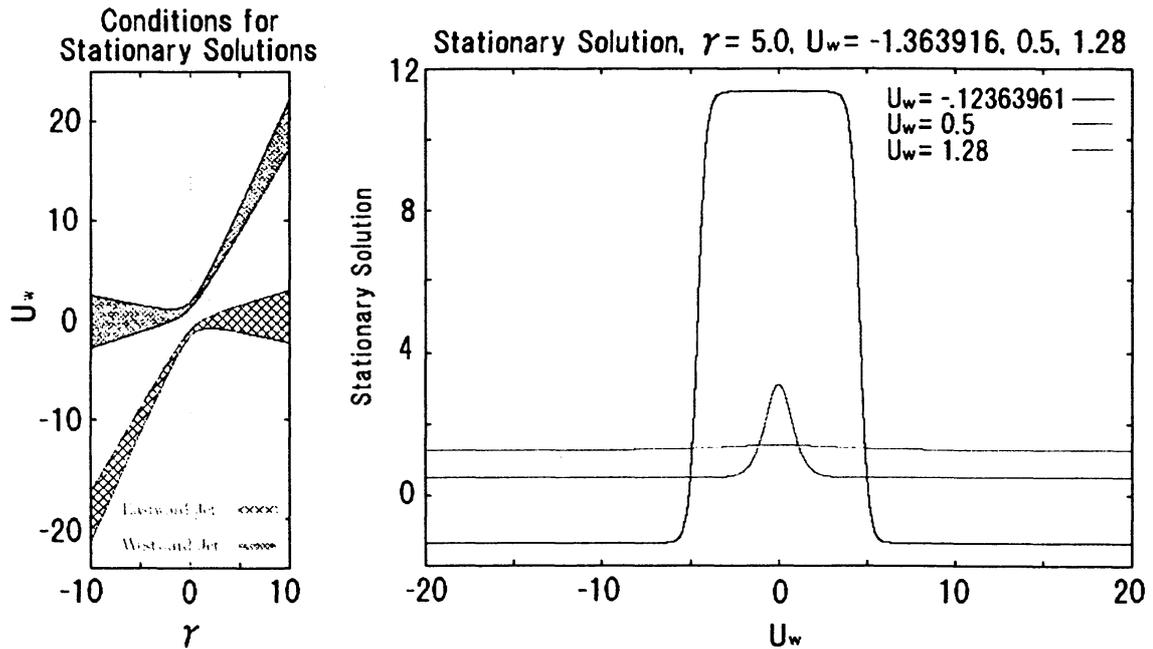


図 4: 左:定常解  $U_0$  を実現するパラメータ領域  $(\gamma, U_w)$  とその境界. 赤と緑の格子模様領域がそれぞれ東向きジェットと西向きジェットを実現するパラメータ領域である. 右:定常解  $U_0$  の例.  $(\gamma, U_w) = (5.0, -1.363961)$ : 青,  $(5.0, 0.5)$ : 緑,  $(5.0, 1.28)$ : 赤.

$$U_R = 2\gamma - U_w + \sqrt{-2U_w^2 + 4\gamma U_w + \gamma^2 + 6},$$

で定義される. この定常解  $U_0$  は,

$$\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{6(\gamma^2 + 2)} < U_w < \gamma + \frac{1}{2}\sqrt{6(\gamma^2 + 2)},$$

および

$$U_w < \gamma - \frac{1}{2}\sqrt{2(\gamma^2 + 2)} \quad \text{or} \quad U_w > \gamma + \frac{1}{2}\sqrt{2(\gamma^2 + 2)},$$

が満たされるパラメータ領域においてのみ実現される (図 4). 図 4 に定常解の例を示す.

これらの定常解  $U_0$  の線形安定性を数値的に調べると, すべての定常解が線形不安定であることが見出された.  $\exp(\sigma\tau)$  の形を持つ摂動を与えた場合の固有値方程式

$$\sigma g = [-(2 - \gamma^2) + (2U_0^2 - 4\gamma U_0)] \frac{d^2 g}{d\eta^2} - 3 \frac{d^4 g}{d\eta^4},$$

$$g \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \eta \rightarrow \pm\infty,$$

を Fourier スペクトル法を用いて数値的に解き,  $\sigma$  を求めると, 図 5 に示すように, 全ての固有値の最大実部は正の値をとることが見出された. また図 ?? に示すように, 固有値は境界付近で 2 次の振る舞いをする事が確認された.

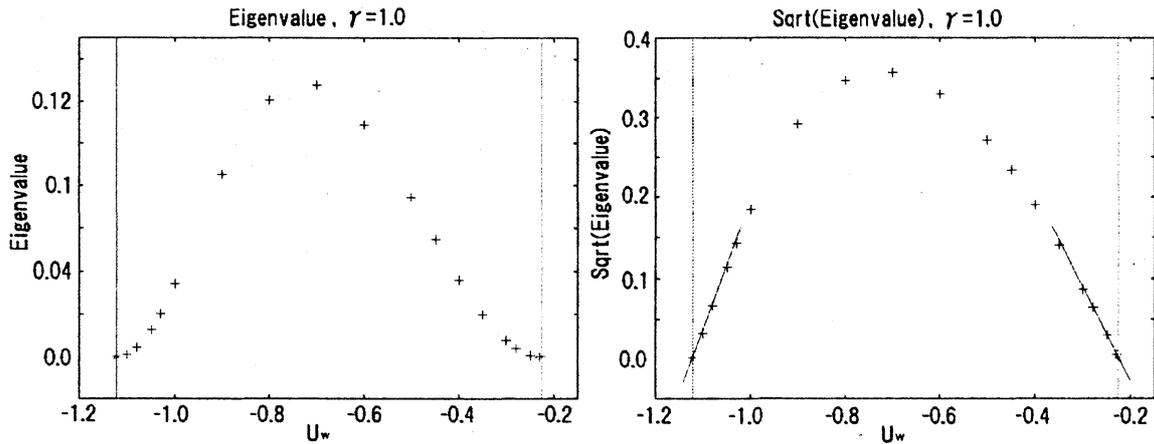


図 5: 左: $\gamma = 1.0$  に対する固有値  $\sigma$  の最大実部 (赤のポイント). 紫と水色の線はパラメータ領域の境界線を表し, 緑と青のポイントはデータから求めたゼロ点を表す. 右: $\gamma = 1.0$  に対する固有値  $\sigma$  の最大実部の平方根 (赤のポイント). 紫と水色の線はパラメータ領域の境界線を表す. 緑と青の線はデータを用いてフィットした直線であり, 緑と青のポイントはそこから求めたゼロ点である.

境界付近での 2 次の振舞は, 摂動展開を用いて一部解析的にも示すことが可能である. 境界

$$U_w = \gamma - \frac{1}{2}\sqrt{2(\gamma^2 + 2)},$$

および

$$U_w = \gamma + \frac{1}{2}\sqrt{2(\gamma^2 + 2)},$$

付近においては  $\sigma_1$  と境界上の  $U_w$  である  $U_{wc}$  を用いて

$$\sigma = 9\sigma_1(U_{wc} - U_w)^2,$$

と表されることが示され, この曲線は数値計算で得られたデータと良く一致する (図 6). また, 境界

$$U_w = \gamma - \frac{1}{2}\sqrt{6(\gamma^2 + 2)},$$

および

$$U_w = \gamma + \frac{1}{2}\sqrt{6(\gamma^2 + 2)},$$

付近では,  $\sigma \leq 0$  となることが示される.

さらに, この不安定性の時間発展を数値的に調べた結果, 摂動を受けた定常ジェットは最終的に一様流になることが確かめられた (図 7). これは Manfroi and Young [7] の数値実験に見られるジェットの消滅と整合的である. このことは, 東西ジェットの融合・消滅には, その背景に存在する乱流の効果が本質的に重要であることを示唆しており, 前述の回転球面上におけるジェットの融合・消滅の機構を示唆している.

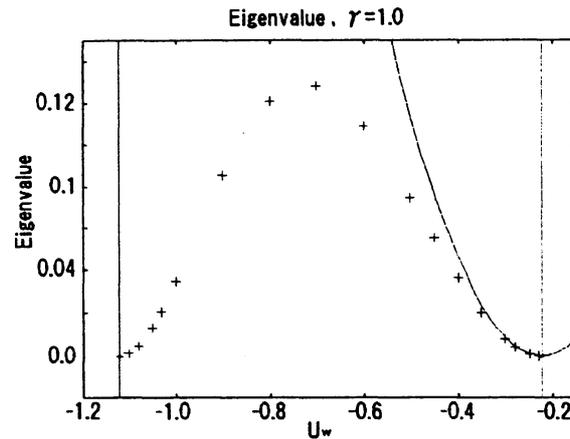


図 6:  $\gamma = 1.0$  に対する固有値  $\sigma$  の最大実部 (赤のポイント) と境界付近での理論曲線 (青い線). 紫と水色の線はパラメータ領域の境界線を表し, 緑と青のポイントはデータから求めたゼロ点を表す.

## 4 おわりに

本研究では, 回転する 2 次元球面上における非圧縮流において, 履歴を伴う小規模なランダム強制力によって駆動される非圧縮流の長時間後の漸近状態を数値的に調べた.

流れ場の時間発展の初期段階では Nozawa and Yoden [10] と同様に, 従来の知見と整合的な多数の東向き流と西向き流が南北に交互に並ぶ帯状構造, あるいは, 極付近に集中した東西ジェットを伴う構造が現れた. しかしながらさらに時間積分を進めると, エネルギーが全く増加せず, 流れのスペクトル成分分布も大きく変化しない段階を経た後に急激に帯状流の融合が生じ, どの場合も最終的に少数 (2 本あるいは 3 本) のジェットが形成されることが見出された.

さらに, 背景に小スケールの流れが存在する下でのジェットの振る舞いを調べるため,  $\beta$  平面上の南北周期流の上に形成される東西ジェットのモデル (Manfroi and Young [7]) を用いた. 弱非線形摂動展開によって得られる東西ジェット流の発展方程式の定常解を解析的に求め, その安定性を数値的・解析的に調べた. その結果, このモデルにおける東西ジェットはすべて線形不安定であり, 不安定化の結果ジェットが領域全体に拡散することを見出した. このことは, 東西ジェットが背景の小スケール流れの効果によって不安定化することを示しており, 球面上において多数本のジェットが時間発展とともに互いに融合・消滅することと整合的である.

上記の計算で得られた漸近状態では, 非線形効果と回転効果がつりあうところの Rhines 波数  $n_\beta$  が流れの代表的な全波数 (2 あるいは 3) よりも大きな値に留まっており, エネルギーの逆カスケードが Rhines 波数を超えて進んでいる. このことは履歴を持たない強制を用いた Huang et al. [4] の結果とあわせ, 一般に 2 次元回転球面上においては強制の種類に依らず, Rhines 波数よりも小さな波数へと逆カ

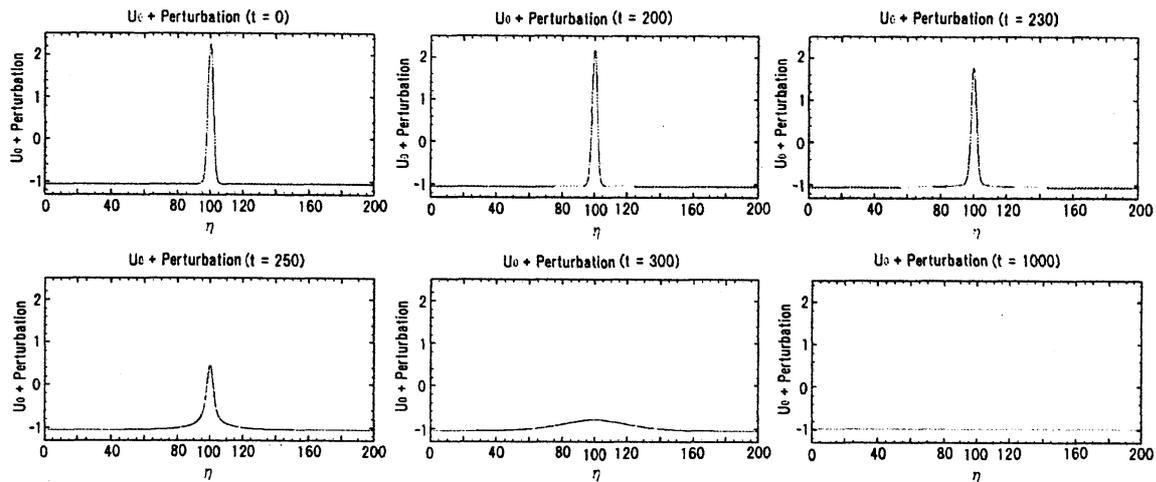


図 7: 不安定固有関数を摂動として与えられた定常解  $U_0$  ( $(\gamma, Uw) = (1.0, -1.05)$ ) の時間変化. 時刻は上段左から順に  $t = 0, 200, 230$ , 下段左から順に  $t = 250, 300, 1000$  である.

スケードが進む可能性を示唆している.

本研究で見出された回転球面上の 2 次元非圧縮流の漸近状態が少数の東西ジェットによって構成される流れ場となるという事実は, 回転球面上の 2 次元モデルが木星など多数の東西ジェットをもつ惑星大気運動のモデルとしては適当でないことを示唆している. 多数の東西ジェットの存在する状態を説明するためには, 2 次元非圧縮流に動径方向の表面変位の運動を取り入れた回転球面上の浅水モデル, あるいは完全に 3 次元的な流体モデルで考察してみる必要があるであろう.

## 参考文献

- [1] A. M. Balk, "Angular distribution of Rossby wave energy," *Phys. Lett. A* **345** 154 (2005)
- [2] A. Chekhlov, S. A. Orszag, S. Sukoriansky, B. Galperin, and I. Staroselsky, "The effect of small-scale forcing on large-scale structures in two-dimensional flows," *Physica D* **98** 321 (1996)
- [3] H-P. Huang and W. A. Robinson, "Two-dimensional turbulence and persistent zonal jets in a global barotropic model," *J. Atmos. Sci.* **55** 611 (1998)
- [4] H-P. Huang, B. Galperin, and S. Sukoriansky, "Anisotropic spectra in two-dimensional turbulence on the surface of a rotating sphere," *Phys. Fluids* **13** 225 (2001)

- [5] R. K. Kraichnan, "Inertial ranges in two-dimensional turbulence," *Phys. Fluids* **10** 1417 (1967)
- [6] C. E. Leith, "Diffusion approximation for two-dimensional turbulence," *Phys. Fluids* **11** 671 (1967)
- [7] A. J. Manfroi, and W. R. Young, "Slow evolution of zonal jets on the beta plane," *J. Atmos. Sci.* **56**, 784 (1999)
- [8] P. S. Marcus, and C. Lee, "Jupiter's Great Red Spot and zonal winds as a self-consistent, one-layer, quasigeostrophic flow," *Chaos* **4** 269 (1994)
- [9] J. C. McWilliams, "The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow," *J. Fluid Mech.* **146** 21 (1983)
- [10] T. Nozawa and S. Yoden, "Formation of zonal band structure in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere," *Phys. Fluids* **9** 2081 (1997)
- [11] P. B. Rhines, "Waves and turbulence on a beta-plane," *J. Fluid Mech.* **69** 417 (1975)
- [12] I. Silberman, "Planetary waves in the atmosphere," *J. Meteor.* **11** 27 (1953)
- [13] S. Takehiro, M. Yamada, and Y. Hayashi, "Energy accumulation in easterly circumpolar jets generated by two-dimensional barotropic decaying turbulence on a rapidly rotating sphere," *J. Atmos. Sci.* **64** 4084 (2007)
- [14] G. K. Vallis and M. E. Maltrud, "Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography," *J. Phys. Oceanogr.* **23** 1346 (1993)
- [15] G. P. Williams, "Planetary circulations:1. barotropic representation of Jovian and Terrestrial turbulence," *J. Atmos. Sci.* **35** 1399 (1978)
- [16] S. Yoden and M. Yamada, "A Numerical experiment on two-Dimensional Decaying turbulence on a rotating sphere," *J. Atmos. Sci.* **50** 631 (1993)