数理解析研究所講究録
第 1722 巻 2010 年 146-153

$U(n,1)$ の標準 Whittaker 加群の組成列について

青山学院大学理工学部　谷口健二 (Kenji TANIGUCHI)
Aoyama Gakuin University

1 序

G を実簡約型リー群，$G=KAN$ をその岩沢分解とする．N の非退化ユニタリ指標 $\psi: N\to \boldsymbol{C}^{\times}$ から誘導された表現

$$C^{\infty}(G/N;\psi):=\{f:G\xrightarrow{C^{\infty}}\boldsymbol{C}|f(gn)=\psi(n)^{-1}f(g),\ g\in G,n\in N\}$$

を Whittaker 関数の空間という．

表現論の自然な問題として，表現が与えられたとき，その構造を決定するというものがある．Whittaker 関数の空間の場合，G の表現をこの空間の一番下，つまり部分表現として実現する，いわゆる Whittaker 模型の理論については多くの深い結果が知られているが，上の方の subquotient を含めた全体の構造については，ほとんど知られていないと言っても過言ではない．

Whittaker 関数の空間は非常に大きな空間であるので，扱いやすい大きさに切り分け，できるだけ indecomposable に近い (あるいはできるだけ主系列表現と大きさが近い) ものにしておく必要があろう．そこで自然な条件として，以下のものを考える．

(1) 無限小指標 χ を持つ：$L(z)f=\chi(z)f$, $(z\in Z(\mathfrak{g}))$. ここで L は左移動を表す．

(2) Moderate growth である．

(3) K-finite である．

(4) $M:=Z_K(A)$ の部分群 $M^{\psi}:=\{m\in M|\psi(mnm^{-1})=\psi(n),\ n\in N\}$ は自然に $C^{\infty}(G/N;\psi)$ に右から作用するので，その作用で切り分け，M^{ψ} の既約表現 σ に従うものを取り出す．

条件 (1), (2), (3) を満たす関数のなす空間を $C^{\infty}(G/N;\psi)_{K,\chi}^{\mathrm{mod}}$ で表し，M^{ψ} の既約有限次元表現 σ の表現空間を $V_{\sigma}^{M^{\psi}}$ で表す．条件 (4) に従って $C^{\infty}(G/N;\psi)_{K,\chi}^{\mathrm{mod}}$ を M^{ψ} の右作用で切り分けると

$$C^{\infty}(G/N;\psi)_{K,\chi}^{\mathrm{mod}}\simeq\bigoplus_{\sigma\in\widehat{M^{\psi}}}\mathrm{Hom}_{M^{\psi}}(V_{\sigma}^{M^{\psi}},C^{\infty}(G/N;\psi)_{K,\chi}^{\mathrm{mod}})\otimes V_{\sigma}^{M^{\psi}}$$

となるが，$\mathrm{Hom}_{M^\psi}(V_\sigma^{M^\psi}, C^\infty(G/N;\psi)_{K,\chi}^{\mathrm{mod}})$ は

$$\begin{aligned} I_{\psi,\chi,\sigma} := \{f : G \xrightarrow{C^\infty} V_{\sigma^*}^{M^\psi} \mid & \\ & f(gmn) = \psi(n)^{-1}\sigma^*(m)^{-1}f(g),\ \ g \in G, m \in M^\psi, n \in N; \\ & L(z)f = \chi(z)f,\ \ z \in Z(\mathfrak{g}); \\ & \text{left } K\text{-finite and of moderate growth}\} \end{aligned}$$

（ただし $(\sigma^*, V_{\sigma^*}^{M^\psi})$ は σ の双対表現）と同型である．この表現をここでは標準 Whittaker 加群と呼ぶ．

主系列表現は極小放物型部分群 $P_{\min} = MAN$ の右からの作用を指定した誘導表現であるが，$I_{\psi,\chi,\sigma}$ では右からの $M^\psi N$ の作用が指定されており，無限小指標と moderate growth 条件によって A 上の挙動も決まると考えてよいので，$I_{\psi,\chi,\sigma}$ は主系列表現にある程度近い表現と考えられる．そのため主系列表現と $I_{\psi,\chi,\sigma}$ の組成列について，類似点・相違点を比較することには意味があるであろう．

例として部分表現について考えよう．Whittaker 模型を持つような既約表現，つまり $I_{\psi,\chi,\sigma}$ の部分表現として実現可能な既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群は Gelfand-Kirillov 次元が $\dim N$ と等しいものに限られるが ([3])，主系列表現では他の小さな $(\mathfrak{g}, K)$-加群も部分加群になりうる．これは主系列表現と $I_{\psi,\chi,\sigma}$ との組成列の違いが原因であり，組成列の相違点が明らかになれば，Whittaker 模型の理論について，今までとは違った理解が可能になると期待される．

一方，後述する本稿の結果より，主系列表現と $I_{\psi,\chi,\sigma}$ の組成列には類似点も見られるため，$I_{\psi,\chi,\sigma}$ の組成列の研究が進めば，主系列表現の組成列の理論，つまりいわゆる Kazhdan-Lusztig 予想にその結果を応用できることも期待される．

このような背景の下で，$I_{\psi,\chi,\sigma}$ の $(\mathfrak{g}, K)$- 加群構造の決定問題を考えたいのだが，まだ一般的な結果はほとんど得られていない．そこで本稿では萌芽的な試みとして，$G = SL(2, \boldsymbol{R})$ と $G = U(n,1)$ の場合に具体的な計算から得られた結果を概説する．

2 認容性

一般の群 G に対して成り立つような性質は，まだほとんど得られていないが，少なくともそれほど大きくはないことがわかる．$I_{\psi,\chi,\sigma}$ は $C^\infty(G/N;\psi)_{K,\chi}^{\mathrm{mod}}$ の部分加群と同型なので，後者の K-type の重複度を評価しよう．先ほどと同様に K の既約表現 τ の表現空間を V_τ^K で表し，τ の双対表現を τ^* とすると，$C^\infty(G/N;\psi)_{K,\chi}^{\mathrm{mod}}$ の K-type 分解は

$$\begin{aligned} C^\infty(G/N;\psi)_{K,\chi}^{\mathrm{mod}} &\simeq \bigoplus_{\tau \in \widehat{K}} \mathrm{Hom}_K(V_\tau^K, C^\infty(G/N;\psi)_{K,\chi}^{\mathrm{mod}}) \otimes V_\tau^K \\ &\simeq \bigoplus_{\tau \in \widehat{K}} C_{\tau^*}^\infty(K\backslash G/N;\psi)_\chi^{\mathrm{mod}} \otimes V_\tau^K \end{aligned}$$

となる．ここで

$$C^\infty_{\tau^*}(K\backslash G/N;\psi)^{\mathrm{mod}}_\chi := \{f : G \xrightarrow{C^\infty} V^K_{\tau^*} \mid \\ f(kgn) = \psi(n)^{-1}\tau^*(k)f(g),\ \ g \in G, k \in K, n \in N; \\ L(z)f = \chi(z)f,\ \ z \in Z(\mathfrak{g}); \\ \text{left } K\text{-finite and of moderate growth}\}$$

とした．この分解により，$C^\infty_{\tau^*}(K\backslash G/N;\psi)^{\mathrm{mod}}_\chi$ への $Z(\mathfrak{g})$ の作用を考えれば，

$$\dim \mathrm{Hom}_K(V^K_\tau, C^\infty(G/N;\psi)^{\mathrm{mod}}_{K,\chi}) \leq \#W(G,A)\dim V^K_{\tau^*}$$

(但し $W(G,A)$ は little Weyl 群) がわかるので，次が得られた．

命題 2.1 $I_{\psi,\chi,\sigma}$ の各 K-type の重複度は有限である．よって有限の長さを持つ．

命題の後半は $I_{\psi,\chi,\sigma}$ が無限小指標を持つことから直ちに従う．

3 計算方針

一般論はこれ以上得られていないので，ここから先は G を $SL(2,\boldsymbol{R})$ または $U(n,1)$ として $I_{\psi,\chi,\sigma}$ の構造を決めていく．計算方法は「力ずく」である．つまり $Z(\mathfrak{g})$ の元の $C^\infty_{\tau^*}(K\backslash G/N;\psi)^{\mathrm{mod}}_\chi$ への作用を，行列式型中心元を用いて具体的に書き下すことで微分方程式を立て，それを解いて $I_{\psi,\chi,\sigma}$ の元 (の一部) を求める．ここで $G = SL(2,\boldsymbol{R}), U(n,1)$ の場合，既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群の分類と，各既約加群の K-type の分布が具体的にはっきりとわかっている ([2])．それによれば，各既約加群の K-type は重複度 1 で現れ，無限小指標を固定すれば，ある既約加群の「端」にある K-type は，他の既約加群には現れないことがわかる．そのため，まず指定した K-type に対して微分方程式の解を求めれば，どの既約加群が $I_{\psi,\chi,\sigma}$ の組成因子に重複度いくつで現れるかがわかる．次に，ある既約加群の「端」にある K-type τ に対する $C^\infty_{\tau^*}(K\backslash G/N;\psi)^{\mathrm{mod}}_\chi$ の元を $\mathfrak{g}$ の作用 (これは Dirac 作用素を使えば具体的に書ける) で他の既約加群の「端」にある K-type へと動かす様子が，K-type の重複度が 1 であることから容易に見て取れる．この K-type の移動が零写像か否かで組成列の順番がわかるのである．

以下簡単のため，無限小指標 χ は regular であるとする．

命題 3.1 $G = SL(2,\boldsymbol{R})$ または $U(n,1)$ とする．

(1) 無限小指標が regular なとき，$I_{\psi,\chi,\sigma}$ はただ一つの単純部分加群をもつ．

(2) χ が integral ではないとき $I_{\psi,\chi,\sigma}$ は既約である．この既約表現は，主系列表現のうち，(a) MAN の既約有限次元表現 σ^{MAN} で $\sigma^* \subset \sigma^{MAN}|_{M^\psi}$ を満たすものから誘導され，(b) 無限小指標が χ であるようなものの $(\mathfrak{g},K)$-加群に同型である．

注 3.2 この命題は，M の既約表現の M^ψ への制限が重複度 1 になるという $SL(2,\boldsymbol{R})$, $U(n,1)$ の特殊事情が大きく寄与したため成り立つものであり，一般の G に対してはほとんど成り立たない．

命題 3.1 により，あとは無限小指標として integral なものを考えれば十分である．

4　$G = SL(2,\boldsymbol{R})$ の場合

この場合，$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \boldsymbol{R} \right\}$ とできるので，N の非退化指標として $\psi \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\sqrt{-1}\xi x}$, $\xi > 0$ を採用する．

このとき $M \simeq M^\psi \simeq \{\pm 1\}$ であるので，M と M^ψ の既約表現を同一視し，どちらも σ で表す．$\{\pm 1\}$ の既約表現は自明な表現と符号の二つであるが，自明な表現を $+1$, 符号表現を -1 で表すことにする．

Regular integral な無限小指標を $\Lambda \in \boldsymbol{Z}_{>0}$ と同一視し，$\rho = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}|_{\mathrm{Lie}(N)}) \in \mathrm{Lie}(A)^*$ とすると，主系列表現 $\mathrm{Ind}_{MAN}^G(\sigma \otimes e^{\Lambda+\rho})$ は $\Lambda \not\equiv \sigma + 1 \mod 2$ のとき既約であり，$\Lambda \equiv \sigma + 1 \mod 2$ のとき可約である．

無限小指標 Λ を持つ既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群の同値類は

(1) 既約主系列表現 π_{01}^-

(2) 既約有限次元表現 π_{01}^+

(3) 正則と反正則離散系列表現 π_0, π_1

で尽くされ，$\Lambda \in \boldsymbol{Z}_{>0}$ としたので，可約な主系列表現の組成列はよく知られているように

$$\mathrm{Ind}_{MAN}^G(\sigma \otimes e^{\Lambda+\rho}) \simeq \begin{tikzcd}[column sep=small] & \pi_{01}^+ \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \pi_0 & & \pi_1 \end{tikzcd} \qquad \mathrm{Ind}_{MAN}^G(\sigma \otimes e^{-\Lambda+\rho}) \simeq \begin{tikzcd}[column sep=small] \pi_0 \arrow[dr] & & \pi_1 \arrow[dl] \\ & \pi_{01}^+ & \end{tikzcd}$$

である．ここで $A \to B$ という記号は，『既約因子 A の元を既約因子 B に写すような，0-写像ではない $\mathfrak{g}$ の作用があるが，逆は 0-写像しかない』ことを意味する．以下同様の記号で組成列を表す．

$SL(2,\boldsymbol{R})$ の場合，標準 Whittaker 加群の組成因子は主系列表現と同じであるが，組成列の順番は以下のようになる:

定理 4.1 $G = SL(2,\boldsymbol{R})$ とし，無限小指標 χ は regular integral であるとする．$\sigma \in \widehat{M^\psi}$ が可約 (resp. 既約) な主系列表現に対応するとき，

$$I_{\psi,\chi,\sigma} \simeq \begin{array}{c}\pi_0\\ \downarrow\\ \pi_{01}^+\\ \downarrow\\ \pi_1\end{array} \qquad I_{-\psi,\chi,\sigma} \simeq \begin{array}{c}\pi_1\\ \downarrow\\ \pi_{01}^+\\ \downarrow\\ \pi_0\end{array} \qquad (\text{resp.} \quad I_{\psi,\chi,\sigma} \simeq \overline{\pi_{01}^-})$$

が成り立つ．

5 $G = U(n,1)$ $(n \geq 2)$ の場合

次に $G = U(n,1)$ のときの結果を述べるために，既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群の分類を復習しておこう．詳細については [1] を参照されたし．

$G = U(n,1)$ のとき，$K \simeq U(n) \times U(1)$, $M \simeq U(n-1) \times U(1)$, $M^\psi \simeq U(n-2) \times U(1)$ である．G のコンパクト Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}$ を $\boldsymbol{C}^{n+1}$ と同一視し，$\boldsymbol{C}^{n+1}$ の標準基底をとれば，regular integral な無限小指標 Λ を

$$\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n+1}) \in \boldsymbol{Z}^{n+1}, \qquad \Lambda_1 > \Lambda_2 > \cdots > \Lambda_{n+1}$$

と同一視できる．このとき $0 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-i$ に対し，$\sigma_{i,j}^M \in \widehat{M} \simeq \widehat{U(n-1)} \times \widehat{U(1)}$ を，highest weight が

$$(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_i, \Lambda_{i+2}, \ldots, \Lambda_{n-j+1}, \Lambda_{n-j+3}, \ldots, \Lambda_{n+1}) - \rho_M$$

(ただし ρ_M は Lie(M) の "rho") であるような $U(n-1)$ の既約表現と weight $\Lambda_{i+1} + \Lambda_{n-j+2}$ の $U(1)$ の既約表現のテンソル積とする．また，Lie(A) の適当な基底を用いて Lie$(A)^*$ の元を $\boldsymbol{R}$ と同一視して $\nu_{i,j} = \Lambda_{i+1} - \Lambda_{n-j+2}$ とすると，無限小指標が Λ であるような主系列表現で A-part のパラメータが正であるようなものは $\pi_{i,j} := \mathrm{Ind}_{MAN}^G(\sigma_{i,j}^M \otimes e^{\nu_{i,j}+\rho})$ で尽くされる．

以上の準備の下で，既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群は以下のように分類される．

(1) 主系列表現 $\pi_{i,j}$ はただ一つの既約商 $\overline{\pi}_{i,j}$ を持ち，$\{\overline{\pi}_{i,j} | 0 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-i\}$ は既約 non-tempered $(\mathfrak{g}, K)$-加群の同値類の代表元をなす．

(2) 既約 tempered $(\mathfrak{g}, K)$-加群は離散系列表現であり，それらのの同値類の代表元として，$\{\pi_i =: \overline{\pi}_{i,n+1-i} | 0 \leq i \leq n\}$ というものが取れる．ここで $\pi_0 = \overline{\pi}_{0,n+1}$ と $\pi_n = \overline{\pi}_{n,1}$ が正則・反正則離散系列である．

注 5.1 (1) 既約有限次元表現は $\overline{\pi}_{0,1}$ であり，その Gelfand-Kirillov 次元は 0 である．

(2) $i=0$ かつ $2 \leq j \leq n+1$ のときと $1 \leq i \leq n$ かつ $j=1$ のとき，$\overline{\pi}_{i,j}$ の Gelfand-Kirillov 次元は n である．

(3) それ以外の場合，つまり $1 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq n+1-i$ のとき，$\overline{\pi}_{i,j}$ の Gelfand-Kirillov 次元は $2n-1 = \dim N$ であるので，松本久義氏の結果 ([3]) により，$I_{\psi,\Lambda,\sigma}$ の唯一の既約部分加群になりうるのはこれらのみである．

標準 Whittaker 加群との比較のために，先ほどの $SL(2,\boldsymbol{R})$ のときと同様に，主系列表現の組成列を書いておこう．

$$\pi_{i,j} = \mathrm{Ind}_{MAN}^{G}(\sigma_{i,j}^{M} \otimes e^{\nu_{i,j}+\rho}) \quad \simeq \quad \begin{tikzcd} & \overline{\pi}_{i,j} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \overline{\pi}_{i,j+1} \arrow[dr] & & \overline{\pi}_{i+1,j} \arrow[dl] \\ & \overline{\pi}_{i+1,j+1} & \end{tikzcd}$$

但し，$i+j=n$ のときは $\overline{\pi}_{i+1,j+1}$ はないものとする．主系列表現の A-part のパラメータ $\nu_{i,j}$ を -1 倍した $\mathrm{Ind}_{MAN}^{G}(\sigma_{i,j}^{M} \otimes e^{-\nu_{i,j}+\rho})$ の組成列は，上の図の上下をひっくり返したものである．

本稿の主結果は次の定理である．

定理 5.2 $G=U(n,1)$ $(n \geq 2)$ で無限小指標 χ は自明とする．$I_{\psi,\chi,\sigma}$ の単純部分加群になりうる既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群は $i \geq 1$ かつ $j \geq 2$ を満たすような $\overline{\pi}_{i,j}$ のみである．このような $\overline{\pi}_{i,j}$ を単純部分加群に持つような $\sigma \in \widehat{M^{\psi}}$ はただ一つに決まり，σ を $M^{\psi} \simeq U(n-2) \times U(1)$ の既約表現と見たときの highest weight は

$$(\overset{1}{1},\ldots,\overset{j-2}{1},\overset{j-1}{0},\ldots,\overset{n-i-1}{0},\overset{n-i}{-1},\ldots,\overset{n-2}{-1};-j+i+1)$$

である．この σ に対し

$$I_{\psi,\chi,\sigma} \quad \simeq \quad \begin{tikzcd} \overline{\pi}_{i-1,j+1} \arrow[d] \arrow[drr] & & \overline{\pi}_{i-1,j-1} \arrow[dll] \arrow[drr] & & \overline{\pi}_{i+1,j+1} \arrow[dll] \arrow[drr] & & \overline{\pi}_{i+1,j-1} \arrow[dll] \arrow[d] \\ \overline{\pi}_{i-1,j} \arrow[drrr] & & \overline{\pi}_{i,j+1} \arrow[dr] & & \overline{\pi}_{i,j-1} \arrow[dl] & & \overline{\pi}_{i+1,j} \arrow[dlll] \\ & & & \overline{\pi}_{i,j} & & & \end{tikzcd}$$

が成り立つ．

注 5.3 この定理では無限小指標を自明としているので，$\overline{\pi}_{i,j}$ を単純部分加群に持つような $I_{\psi,\chi,\sigma}$ の σ はただ一つに定まったが，一般の regular integral な無限小

指標の場合には，一つには定まらない．一般の場合，σ の highest weight が

$$(q_1,\ldots,q_{n-2};\sum_{k=1}^{n+1}\Lambda_k-\sum_{k=1}^{n-2}q_k)\qquad \text{ただし}$$

$$1\le k\le j-2 \quad\Rightarrow\quad -(\Lambda_{n+2-k}+\frac{n}{2}-k)\ge q_k\ge-(\Lambda_{n+1-k}+\frac{n}{2}-k-1)$$

$$j-1\le k\le n-i-1 \quad\Rightarrow\quad -(\Lambda_{n+1-k}+\frac{n}{2}-k)\ge q_k\ge-(\Lambda_{n-k}+\frac{n}{2}-k-1)$$

$$n-i\le k\le n-2 \quad\Rightarrow\quad -(\Lambda_{n-k}+\frac{n}{2}-k)\ge q_k\ge-(\Lambda_{n-1-k}+\frac{n}{2}-k-1)$$

を満たすとき，$\overline{\pi}_{i,j}$ は $I_{\psi,\chi,\sigma}$ の唯一の単純部分加群となる．

6 最後に

この研究は始めたばかりで，本稿を見ればわかるように，まだ具体例で実験を行っている段階である．そのため，問題設定，言い換えれば標準 Whittaker 加群 $I_{\psi,\chi,\sigma}$ の定義，が§1で述べたものでよいのか自体，まだよくわからない．Whittaker 関数の空間全体の構造解析を考えれば,「(1) 無限小指標を持つ」という条件を「(1)' 一般化無限小指標を持つ」とした方がよいのだが，こうすると加群の長さが無限となってしまい，表現論の一般論に乗りにくいと考えたので (1) の条件を採用した．

一方，今回扱った群は実階数が 1 なので，普遍包絡環の中心元全ては使わずに，Casimir 作用素一本で切り取る (大島流？) という問題設定にも意味がある．即ち，§1 の条件 (1) を

(1)" Casimir 作用素の固有関数である

に置き換えても，問題としている加群は有限の長さを持つ．この条件にすると，Casimir 作用素の固有値が，自明な無限小指標に対応するときの Whittaker 加群の組成列は

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & & \overline{\pi}_{i,j} \arrow[dlll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & & & \\
 & \overline{\pi}_{i-1,j} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & \overline{\pi}_{i,j+1} \arrow[dlll] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & \overline{\pi}_{i,j-1} \arrow[dlll] \arrow[dl] \arrow[drrr] & & \overline{\pi}_{i+1,j} \arrow[dlll] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\overline{\pi}_{i-1,j+1} \arrow[dr] \arrow[drrr] & & \overline{\pi}_{i-1,j-1} \arrow[dl] \arrow[drrr] & & \overline{\pi}_{i,j}^{\oplus 2} \arrow[dlll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & \overline{\pi}_{i+1,j+1} \arrow[dlll] \arrow[dr] & & \overline{\pi}_{i+1,j-1} \arrow[dlll] \arrow[dl] \\
 & \overline{\pi}_{i-1,j} \arrow[drrr] & & \overline{\pi}_{i,j+1} \arrow[dr] & & \overline{\pi}_{i,j-1} \arrow[dl] & & \overline{\pi}_{i+1,j} \arrow[dlll] & \\
 & & & & \overline{\pi}_{i,j} & & & &
\end{tikzcd}$$

となり，$I_{\psi,\chi,\sigma}$ よりも対称性が高く (palindromic)，綺麗な形をしている．ただ，実階数が 2 以上の場合に，普遍包絡環の中心元の中から，微分方程式の解空間が有

限次元となるように，実階数と同じ個数の代数的に独立な元を選ぶ自然な方法が思いつかないので，実階数一般への拡張を視野に入れると，こちらの問題設定には無理があるように感じられ，今回は採用しなかった．しかしうまく自然な設定ができれば，面白い問題になるのではないかと期待している．

最後に，研究の途中で話を聞いて貴重な意見を下さった，山下博氏，西山享氏，阿部紀行氏 (コメントを頂いた順) に感謝します．

参考文献

[1] Collingwood, D. H. : *Representations of rank one Lie groups*, Research Notes in Mathematics, 137. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[2] Kraljević, H. : Representations of the unversal covering group of the group $SU(n, 1)$, Glas. Mat. Ser. III **8(28)** No. 1 (1973), 23–72.

[3] H. Matumoto, Whittaker vectors and the Goodman-Wallach operators, Acta math. **161** (1988), 183–241.