

数列空間 c への有界関数族に対する 単調拡張子の存在について

高崎経済大学・経済学部

(Faculty of Economics, Takasaki City University of Economics)

山崎 薫里 (Kaori YAMAZAKI)

本稿では, 論文 [11] の背景の紹介と解説を行う.

1 歴史

以下, 線形位相空間はすべて, 実線形位相空間を表すものとする. X を位相空間, Y を線形位相空間とする. $C(X, Y)$ を X から Y への連続関数全体, $C_\infty(X, Y)$ を X から Y への有界連続関数全体とする. ここで, 関数 $f: X \rightarrow Y$ が有界であるとは, f による X の像 $f(X)$ が有界集合である (すなわち, Y の原点の任意の近傍 U に対し, 実数 r を $f(X) \subset rU$ となるようにとれる) ことである. 特に, $C(X) := C(X, \mathbb{R})$, $C_\infty(X) := C_\infty(X, \mathbb{R})$ と決める.

X を位相空間, A をその部分空間, Y を線形位相空間とする. 写像 $u: C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$ が 拡張子 (= 拡張作用素, an extender) であるとは, 任意の $f \in C(A, Y)$ について $u(f)|_A = f$ となることをいう. 拡張子 $u: C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$ は, 任意の $f \in C(A, Y)$ に対して $u(f)(X) \subset \text{conv} f(A)$ となるとき, 凸拡張子 (= 凸包拡張作用素, a conv-extender) であると呼ばれる. ここで, $\text{conv} f(A)$ は $f(A)$ の凸包を表す. また, 任意の $f \in C(A, Y)$ に対して $u(f)(X) \subset \overline{\text{conv}} f(A)$ となるとき, u は 閉凸拡張子 (= 閉凸包拡張作用素, a $\overline{\text{conv}}$ -extender) であると呼ばれる. ここで, $\overline{\text{conv}} f(A)$ は $f(A)$ の閉凸包を表す.

拡張子について, 次の 2 つの定理が基本となるものである.

定理 1.1 (Borsuk の拡張定理, [3]). X を距離空間, A を X の可分閉集合とする. このとき, $\|u\| = 1$ となる線形拡張子 $u: C_\infty(A) \rightarrow C_\infty(X)$ が存在する.

定理 1.2 (Dugundji の拡張定理, [5]). X を距離空間, A を X の閉集合, Y を局所凸線形位相空間とする. このとき, 線形凸拡張子 $u: C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$ が存在する.

凸拡張子は閉凸拡張子であり, 閉凸拡張子 $u: C_\infty(A) \rightarrow C_\infty(X)$ の作用素ノルム $\|u\| = 1$ となる. Dugundji の定理は, Borsuk の拡張子を以下の 4 つの意味で進展させているといえる.

- 部分空間 A の可分性の条件を必要としない.
- “凸包保存” に閉性の条件を要求しない.
- “有界連続関数族” から “連続関数族” へ対象を広げた.
- “実数値関数族” から “線形位相空間を値にとる関数族” に対象を広げた.

ここで, X が GO-空間 (a generalized ordered space) であるとは, X は全順序集合 $(X, \leq)$ と集合として一致し, X の位相は $\leq$ による順序位相より細かく, 凸集合よりなる基をもつときをいう ([9]). 位相空間 X とその部分空間 A に対し, 集合として X であり位相が $\{U \cup V : U \text{ は } X \text{ の開集合, } V \subset X \setminus A\}$ で与えられる位相空間を, X_A で表す ([6]). $X = \mathbb{R}$ (実数直線), $A = \mathbb{Q}$ (有理数全体の集合) として構成された Michael 直線 $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ はよく知られた GO-空間の例である.

定理 1.3 (Heath-Lutzer, [8]). 任意の GO-空間 X と, その閉集合 A に対して, 線形閉凸拡張子 $u : C_{\infty}(A) \rightarrow C_{\infty}(X)$ が存在する.

定理 1.3 に関して, 次が知られている.

注 1 線形凸拡張子 $u : C_{\infty}(\mathbb{Q}) \rightarrow C_{\infty}(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}})$ は存在しない (van Douwen, [4]). すなわち, 定理 1.3 において, 線形閉凸拡張子の “閉性” は本質的である.

注 2 線形閉凸拡張子 $u : C(\mathbb{Q}) \rightarrow C(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}})$ は存在しない (Heath-Lutzer, [8]). すなわち, 定理 1.3 において, $C_{\infty}(A)$ の “有界性” は本質的である.

注 3 ノルム空間 Y について, 任意の GO-空間 X とその任意の閉部分空間 A が線形閉凸拡張子 $u : C_{\infty}(A, Y) \rightarrow C_{\infty}(X, Y)$ をもつための必要十分条件は, Y は反射的であることである (Banach-Banach-Yamazaki [1]). すなわち, 定理 1.3 の “実数” 値関数族は, “反射的なバナッハ空間” (l_p , $1 < p < \infty$ など) を値にとる関数族に拡張できるが, “反射的でないバナッハ空間” (c_0, c, l_1 など) を値にとる関数族には拡張できない.

ここで, c_0 は 0 に収束する実数列からなる (スーパノルムをもつ) 数列空間, c は収束する実数列からなる (スーパノルムをもつ) 数列空間を表わす. 注 1, 2, 3 は, 上述の Borsuk から Dugundji の定理への 4 つの進展の内の後 3 つに対応する. すなわち, 距離空間 X よりも GO-空間 X に対する拡張子は, その一般化の振る舞いが複雑であるといえる.

拡張子 $u : C(A) \rightarrow C(X)$ の単調性 (すなわち, “ $f \leq g$, $f, g \in C(A) \Rightarrow u(f) \leq u(g)$ ” という性質) の研究が, これまでなされてきた ([4], [7], [10]). Borsuk から Dugundji の定理への一般化に見られるように, (順序の入った) 線形位相空間 Y への単調拡張子 $u : C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$ に研究を進化させることは自然である. ここで, Y を半順序 $\leq$ の入った位相空間, A を X の部分

空間とする. 拡張子 $u : C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$ が 単調 (monotone) であるとは, $f \leq g$ となる任意の $f, g \in C(A, Y)$ について $u(f) \leq u(g)$ となることである.

半順序の入った線形位相空間 $(Y, \leq)$ が 順序位相ベクトル空間 (an ordered topological vector space) であるとは, 以下の3条件を満たすときをいう.

- (1) $x \leq y, x, y, z \in Y$ ならば, $x + z \leq y + z$
- (2) $x \leq y, x, y \in Y, r \geq 0$ ならば, $rx \leq ry$
- (3) 正錐 $\{y \in Y : y \geq 0\}$ は閉集合

半順序の入った線形位相空間として, “順序位相ベクトル空間” を設定する利点は, “順序位相ベクトル空間 Y について, 線形閉凸拡張子 $u : C(A, Y) \rightarrow C(X, Y)$ は単調拡張子である” という基本性質を導くことができることにある. 定理 1.3 の注 3 を考慮すると, 反射的でない順序位相ベクトル空間 Y について, 次の問題を考えることは自然である.

問 1.4. Y をノルム空間で反射的でない順序位相ベクトル空間とする. 任意の GO-空間 X とその任意の閉集合 A について, 単調拡張子 $u : C_\infty(A, Y) \rightarrow C_\infty(X, Y)$ が存在するか?

問 1.4 に関し, 典型的な反射的でないノルム空間 $Y = l_1, c_0, c$ について, 状況は以下のように異なるものであった. ここで, $Y = l_1, c_0, c$ には自然な半順序 “ $x = (x_n)_{n \in \omega}, y = (y_n)_{n \in \omega} \in Y$ について, $x \leq y \Leftrightarrow x_n \leq y_n (n \in \omega)$ ” が入っているものとする.

- $Y = l_1$ の場合, 問 1.4 は肯定的である ([1, Theorem 9.1]).
- $Y = c_0$ の場合, 問 1.4 は否定的である ([1, Corollary 6.3]).
- $Y = c$ の場合, 問 1.4 は未解決である. 実際, [1, Question 6.4] で “単調拡張子 $u : C_\infty(\mathbb{Q}, c) \rightarrow C(\mathbb{R}_\mathbb{Q}, c)$ が存在するか?” が問題として提出されていた.

本稿では, この最後の問題 ([1, Question 6.4]) が否定的であることを示す.

[1] の問題の背景等の日本語の文献としては, [2] がある.

2 結果

拡張定理を, GO-空間 X のみでなく広い空間のクラスに応用するために, 以下のような形で主定理を与える. $A \subset X$ について, $C_A(X, Y)$ は, A の任意の点において X で連続であるような関数 $f : X \rightarrow Y$ 全体を表す.

定理 2.1 (主定理). X を位相空間, A をその Tychonoff な部分空間, Y を半順序の入った位相空間, $Y_0 \subset Y$ とする. もし, 単調拡張子 $u : C(A, Y_0) \rightarrow C_A(X, Y)$ が存在するならば, A が X において強 Choquet であるか, または, Y_0 は Y において概 ω -減少交叉性をもつ.

A が X において強 Choquet であることの定義 ([1]) を与える. X を位相空間, A をその部分空間とする. 2 人のプレイヤー I と II によって, 次のようなゲームが行われる.

- 0-1. プレーヤー I は, $a_0 \in A$ となる a_0 と, a_0 の X における近傍 U_0 を選ぶ.
- 0-2. これに応じて, プレーヤー II は, $V_0 \subset U_0$ となるような a_0 の X における近傍 V_0 を選ぶ.
(n 回のイニングにおいて)
- n -1. プレーヤー I は, $a_n \in V_{n-1} \cap A$ となるような a_n と, $U_n \subset V_{n-1}$ となるような a_n の X における近傍 U_n を選ぶ.
- n -2. プレーヤー II は, $V_n \subset U_n$ となるような a_n の X における近傍 V_n を選ぶ.
(このようにプレーを続ける.)

$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \omega} U_n \subset X \setminus A$ となるとき, プレーヤー I がゲーム $G_r(A, X)$ の勝者 (a winner) であり, そうでないときにはプレーヤー II が勝者であると決める. A が X において強 Choquet (strong Choquet in X) であるとは, プレーヤー II がゲーム $G_r(A, X)$ における必勝法をもつときをいう.

次に, Y_0 は Y において概 ω -減少交叉性をもつことの定義 ([11]) を与える. Y を半順序の入った位相空間とする. 連続関数 $\gamma : [0, \infty) \rightarrow Y$ は, 任意の $n \in \omega$ と任意の $t \geq n$, $t \in [0, \infty)$ について $\gamma(n) \leq \gamma(t)$ であるとき, ω -増加半直線 (an ω -increasing ray) といわれる ([1]). 同様に, 連続関数 $\gamma : [0, \infty) \rightarrow Y$ は, 任意の $n \in \omega$ と任意の $t \geq n$, $t \in [0, \infty)$ について $\gamma(n) \geq \gamma(t)$ であるとき, ω -減少半直線 (an ω -decreasing ray) といわれる ([11]). $Y_0 \subset Y$ について, 任意の ω -増加半直線 $\gamma_1 : [0, \infty) \rightarrow Y_0$, 任意の ω -減少半直線 $\gamma_2 : [0, \infty) \rightarrow Y_0$ で $\gamma_1(r_1) \leq \gamma_2(r_2)$, $r_1, r_2 \in [0, \infty)$ となるものと, Y の任意の G_δ -sets $\{G_n^i\}_{n \in \omega}^{i=1,2}$ で $\gamma_i(n) \in G_n^i$, $n \in \omega$, $i = 1, 2$ となるものに対し, $\bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{b_1 \in G_n^1, b_2 \in G_n^2} \{y \in Y : b_1 \leq y \leq b_2\} \neq \emptyset$ が成り立つとき, Y_0 は Y において概 ω -減少交叉性 (almost ω -decreasing intersection property) をもつという ([11]).

$\mathbf{0} = (0, 0, 0, \dots)$, $\mathbf{1} = (1, 1, 1, \dots) \in c$ とおく. $Y_0 := \{y \in c : \mathbf{0} \leq y \leq \mathbf{1}\}$ は c において概 ω -減少交叉性をもたない ([11]). よって, $C(A, Y_0) \subset C_\infty(A, c)$ に注意すると, 定理 2.1 より次が得られる.

系 2.2. X を位相空間, A を Tychonoff な部分空間とする. もし単調拡張子 $u : C_\infty(A, c) \rightarrow C_A(X, c)$ が存在するならば, A は X において強 Choquet である.

$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ において強 Choquet でない ([10], [1]). また, $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ の位相の入れ方より, $C_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, c) = C(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}, c)$ である. よって, [1, Question 6.4] の否定解を与える以下の結果が得られる.

系 2.3. 単調拡張子 $u : C_\infty(\mathbb{Q}, c) \rightarrow C(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}, c)$ は存在しない.

References

- [1] I. Banach, T. Banach and K. Yamazaki, *Extenders for vector-valued functions*, Studia Math. 191 (2009), 123–150.
- [2] I. Banach, T. Banach and K. Yamazaki, 線形拡張子を用いた反射的バナッハ空間の特徴づけ, 一般・幾何学的トポロジーの研究動向と諸問題, 京都大学数理解析研究所講究録, 1634 (2009), 35–40.
- [3] K. Borsuk, *Über Isomorphie der Funktionalräume*, Bull. Internat. Acad. Polon. Ser. A (1933), 1–10.
- [4] E. K. van Douwen, *Simultaneous extension of continuous functions*, Ph. D. Thesis, Free Univ. of Amsterdam, 1975.
- [5] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math. 1 (1951), 353–367.
- [6] R. Engelking, *General Topology*, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [7] G. Gruenhage, Y. Hattori and H. Ohta, *Dugundji extenders and retracts on generalized ordered spaces*, Fund. Math. 158 (1998), 147–164.
- [8] R. W. Heath and D. J. Lutzer, *Dugundji extension theorems for linearly ordered spaces*, Pacific J. Math. 55 (1974), 419–425.
- [9] D. J. Lutzer, *On generalized ordered spaces*, Dissertation Math. 89 (1977).
- [10] I. S. Stares and J. E. Vaughan, *The Dugundji extension property can fail in ω_μ -metrizable spaces*, Fund. Math. 150 (1996), 11–16.
- [11] K. Yamazaki, *Monotone extenders for bounded c -valued functions*, Studia Mathematica, 199 (2010), 17–22.