数理解析研究所講究録
第1729巻 2011年 84-94

ランダムネスの一般化
Generalizing randomness

宮部賢志
KENSHI MIYABE
京都大学 数理解析研究所
RIMS, KYOTO UNIVERSITY *

目次

要約

ランダムネスの理論は、主にランダムな2進無限列を計算の側面から具体的に定義し、その性質を調べる分野である。前半ではMartin-Löfランダムネスがランダムの概念として自然な性質を持っていることを紹介する。後半ではランダムネスが定義される空間を一般化する試みをいくつか紹介すると共に、筆者の最近の結果を述べる。

1 始めに

テーマは「ランダム」とは何か、である。「何かがランダムである」とは何を意味するのだろうか。おそらく多くの人は次のようなイメージを思い浮かべたのではないだろうか。

*kmiyabe@kurims.kyoto-u.ac.jp

「でたらめ」「規則がない」「予測できない」「確率的」

ランダムという言葉は日常用語としても使われ、人それぞれにいろいろなイメージを持っているだろう。確率や統計の分野では基本的な概念として定義されているかのように出てくる。しかし、「ランダムとは何か」と改めて問われるとなかなかに答えづらい。以下では、ランダムの概念が数学的にどのように定義されたかについての歴史を見ていく。

最初に注意しなければならないことがある。「ランダムな系」や「random variable(確率変数)」のようにランダムな現象が現れるようなシステムを指して、ランダムと呼ぶことがある。しかしよく考えると、「それは本当にランダムなのか」「確率的ならばランダムなのか」という問題が起ってきて、実はランダムの定義になっていないことが分かる。ここで「ランダムを定義する」とは「具体的な列や点がランダムかどうかを定義する」ことを指している。

前半は主にMartin-Löfランダムネスについて述べる。これはランダムネスの理論 (algorithmic randomness) の導入ともなっている。詳細は最近出版されたランダムネスの理論の教科書 [4, 13] などを参照されたい。後半では、計算可能解析 (computable analysis) を基礎として、ランダムネスの定義される空間がカントール空間から一般の空間に拡張された歩みについて述べる。

2 ランダムの定義を求めて

2.1 von Misesの試み

ランダムな列を定義する最初の試みはvon Mises [21] の1919年の論文まで遡る。von Misesは当時、確率論の数学的定式化を試みていた。(現在よく知られている測度論的確率論は、Kolmogorovの「確率論の基礎概念」[9] が発端になっており、その出版は1933年である。) von Misesは確率論の定式化のためにはランダムの概念の定式化が必要だと考えた。そこで最も単純な例として、0と1の無限列のうちでランダムな列を定義することを試みる。ランダムな列ならば、0と1が出てくる頻度はそれぞれ1/2に収束するだろう。しかし、1/2に収束すればランダムとは言えない。例えば、

$$0101010101010101010101010101010101010101010101010101010101010101010101\cdots$$

のように、0と1が出てくる頻度はそれぞれ1/2に収束するが、明らかにランダムとは言えない列が存在する。一方、「どの部分列においても0と1が出てくる頻度が1/2に収束する列」は存在しない。そこで、すべての「適当な」部分列において1/2に収束する列をコレクティーフと呼び、ランダムな列の定義として提案した。しかしvon Mises自身は、部分列の選び方 (selection rule) について数学的な定義を与えなかった。

しばらくして、1930年代、TuringやChurchらにより「計算」という概念が定義された。Churchはこの計算の概念を部分列の選び方として採用してはどうかと提案した。こうしてvon Misesの定義は数学的に厳密なものとなった。しかし、Ville [20] によりそこで定義されたコレクティーフの中でランダムな列としては不自然な性質を持つものがある (重複対数の法則を満たさない) ことが指摘された。ランダムな列の定義はなかなかに困難だったのである。

2.2 計算可能性

上記のvon Misesの例からも判るように、計算可能性が定義されて初めてランダムの概念が定義される。そこで簡単に計算可能性の定義を振り返る。この分野はしばらく帰納的関数論 (recursion theory) と呼ばれていたが、Soare [17] により用語の呼び方の変更が提案され、現在では計算可能性理論 (computability theory) と呼ばれている。この分野の外観として [1]、教科書としては [16, 3] がある。

計算可能の概念の定式化はチューリング [18] によって提唱されたチューリングマシンによる。チューリングマシンは、無限の長さの入出力テープと、読み書きするヘッド、内部状態からなり、データの読み書き、内部状態の変更、ヘッドの移動が行える。「入力テープに書かれた文字列」から、「マシンが停止状態になった時の出力テープに書かれた文字列」への関数が、計算可能な関数として定義される。この定義は帰納的関数やラムダ計算で記述される再帰関数とも一致する。直感的にはC言語などによってそのプログラムが書けることと思って問題ない。

自然数を適当に文字列にエンコードすることで、自然数から自然数への関数が定義される。自然数の集合 A が計算可能であるとは、A の特徴関数 ($n \in A$ なら 1 を返し、$n \notin A$ なら 0 を返す関数) が計算可能であることを言う。このとき集合 A は決定可能であると言う。自然数の集合 B が計算可枚挙 (c.e.=computably enumerable) であるとは、計算可能な部分関数 $f :\subseteq \mathbb{N} \to \{0,1\}$ があって、その定義域が B となることを言う。このとき集合 B は半決定可能であると言う。2 進無限列の計算可能性も、自然数の集合と同一視することで得られる。

2.3 Martin-Löf ランダムネス

1966 年、Martin-Löf [11] は「テスト」と呼ばれる概念を使って、ランダムの概念の一つの数学的定式化を与えた。この「テスト」の概念を説明するために以下の実験を考えよう。ある 2 進無限列 A に対して、最初の n 桁を $A \upharpoonright n$ で表す。その $A \upharpoonright n$ に現れる 1 の個数は、ランダムならば $n/2$ に近いであろう。$n/2$ から大きくはずれる確率は非常に小さい。逆に $n/2$ から大きくはずれているならばランダムではないだろう。そこで確率の非常に小さい部分に含まれていればランダムではないと判定する。このようにランダムかどうかをテストして、すべてのテストを通過する列をランダムな列と呼ぶことにしよう。ここでもテストは (ある意味で) 計算可能なテストだけを許すのである。

厳密な定義を与えるためにいくつか準備をする。ここでは Martin-Löf の原論文の形ではなく、現在一般的に表現されている形で与える。2 進無限列の空間であるカントール空間 2^ω を考える。有限文字列 σ と有限または無限文字列 τ に対して、σ が τ の接頭辞になっていることを $\sigma \preceq \tau$ で表す。有限文字列 $\sigma \in 2^*$ に対して、シリンダー集合が $[\sigma] = \{A \in 2^\omega \ : \ \sigma \preceq A\}$ で定義される。μ を 2^ω 上の測度で $\mu([\sigma]) = 2^{-|\sigma|}$ を満たすものとする。開集合 U が c.e. であるとは、$U = \bigcup\{[\sigma] \ : \ \sigma \in S\}$ となる c.e. 集合 S が存在することを言う。

定義 1
<u>Martin-Löf テスト</u>とは、一様に c.e. の開集合の列 $\{U_n\}$ で $\mu(U_n) \leq 2^{-n}$ を満たすものを言う。列 A が Martin-Löf テスト $\{U_n\}$ に<u>合格する (pass)</u> とは、$A \notin \bigcap_n U_n$ となることを言う。すべての Martin-Löf テストに合格する列を <u>Martin-Löf ランダムな列</u>と呼ぶ。

ここで定義されたランダムの概念を Martin-Löf ランダムネスと呼ぶ。

注意 1
「ランダムネス」という言葉は、「ランダムの概念」または「ランダム性」を指して使われている。ランダムの概念は計算可能性や定義の仕方によっていくつも提唱されている。その中で Martin-Löf によって提唱されたランダムの概念が Martin-Löf ランダムネスである。

テストによる定義は「わずかな列しか持たないような特別な性質を持たない」ことを表現しており、「典型性」(typicalness) の定式化と言われる。Martin-Löf ランダムネスにはランダムの概念として自然な性質がある。例えば、適当に選ばれた列はランダムであって欲しいと思うだろう。実際、以下の性質が成り立つ。

定理 2
Martin-Löf ランダムな列の集合は測度 1 を持つ。

また、万能チューリングマシンが存在することから、次のことが言える。

定理 3
万能 Martin-Löf テストが存在する。

すなわち Martin-Löf ランダムかどうかの判断は実は万能テスト一つだけで判断できる。どうやら Martin-Löf ランダムネスはランダムの概念の定式化として最低限満たすべき性質は満たしているようである。

2.4 Kolmogorov 複雑性

Martin-Löf ランダムネスは本当に自然なランダムの概念だろうか。ランダムの概念の適切な定式化は、計算可能関数の Church-Turing のテーゼのように、最終的には仮説でしかない。しかしもし全く別の発想でランダムネスを定義して、それが同値であれば、自然な定式化であることを信じられるかもしれない。

テストによる方法は典型的であることを定式化したものだった。ランダムな列は記述が大変で、圧縮が不可能であるというのも自然なイメージだろう。実際、Martin-Löf ランダムネスは圧縮不可能性による特徴付けが存在する。

今、30 回コイントスをしてその表と裏を記録する実験を 2 回行った。その記録した結果が以下であったとする。

(A) 01101 00011 01101 11101 11001 11010　　　(B) 00000 00000 00000 00000 00000 00000

(A) ならば信じられるのに対し、(B) は信じられないだろう。しかしどちらの確率も $1/2^{30}$ である。(A) と (B) は何が異なるのだろうか。一つの説明としては、(B) は規則的で短い表現があるほどであるから。逆に (A) は複雑で短い表現がなさそうである。そこで、複雑かどうかを最短の記述の長さで測ることができそうである。そしてランダムな列は最初の有限桁が複雑な列として定義できそうである。

今、prefix-free という概念を導入する。なぜ prefix-free が導入されたのかなどの歴史の詳細については [10] などを参照されたい。ある集合が prefix-free であるとは、任意の 2 つの要素についてどちらかがどちらかの接頭辞になっていないことを言う。ある関数が prefix-free であるとは、その定義域が prefix-free であることを言う。prefix-free であれば部分関数となることに注意する。

定義 4
$f : 2^* \to 2^*$ を *prefix-free* で計算可能な関数とする。有限文字列 $\sigma \in 2^*$ の f に対する *Kolmogorov* 複雑性を、

$$K_f(\sigma) = \min\{|\tau| \ : \ f(\tau) = \sigma\}$$

で定義する。

複雑性は関数 f に依存するが、定数の差を除いて最適なものが存在する。

定理 5
ある prefix-fre な部分計算可能関数 U が存在して以下を満たす。すなわち任意の部分計算可能関数 f に対して、ある定数 d が存在し、すべての σ で、

$$K_U(\sigma) \le K_f(\sigma) + d$$

を満たす。

そのような U_1, U_2 に対して、$K_{U_1}(\sigma)$ と $K_{U_2}(\sigma)$ は定数しか異ならない。よって、そのような U を一つ固定して、$K = K_U$ とする。上限として以下の事実が知られている。

定理 6
ある d が存在して、すべての σ に対し、

$$K(\sigma) \leq |\sigma| + K(|\sigma|) + d$$

以上の準備の元で、圧縮不可能性を元にランダムネスを定義したい。そしてできればそれが Martin-Löf ランダムと同値であって欲しい。実際それは成り立つのである。

定理 7
2 進無限列 $A \in 2^\omega$ が Martin-Löf ランダムであることと以下が同値。

$$(\exists d)(\forall n)K(A \upharpoonright n) \geq n - d$$

このことは圧縮不可能性で定義したランダムネスが、典型性で定義したランダムネスと一致することを意味する。一見何の関係もなさそうな二つの概念が同値になるのは、ランダムネスの概念として適切であるからとは言えないだろうか。

2.5 マルチンゲール

実はもう一つ別の特徴付けが存在する。それはマルチンゲールによる特徴付けで、予測不可能性を定式化したものである。

今、次のようなゲームを考えよう。コインを投げて表か裏かを予想することを繰り返し行う。ある人が有限の所持金から始めて、表と裏に所持金を分配して賭ける。賭ける金額は実数値としよう。つまり、現在の日本であれば 1 円という最小単位があるが、ここでは実数値ならいくらでも良いことにする。ただし借金はできない。表か裏かの予想が当たれば賭けた金額の 2 倍がもらえ、ハズレた方に賭けた金額は没収される。このゲームは公平なゲームだと言って良いだろう。もしこのコインの表裏の出方に偏りがあったり、規則があれば、所持金を増やすことができる。逆にそのような規則がなく、ランダムであれば、所持金を増やすことはできないと思って良いだろう。以上のことを定式化すると以下のようになる。

定義 8
非負の実数の集合を $\mathbb{R}^+$ で表す。関数 $d : 2^* \to \mathbb{R}^+$ が <u>マルチンゲール</u> であるとは、以下を満たすことを言う。すなわち

$$d(\sigma) = \frac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}$$

ここで $\sigma 0$ と $\sigma 1$ は、有限文字列 σ に対してそれぞれ 0 と 1 を結合させてできる文字列を表す。この条件は「公平な条件」(fairness condition) と呼ばれている。このマルチンゲールは公平な賭けにおける所持金の推移を表している。所持金が増えればその賭けの戦略は成功だったと言えるだろう。

定義 9
マルチンゲール d が 2 進無限列 $A \in 2^\omega$ で <u>成功する</u> とは、

$$\sup_n d(A \upharpoonright n) = \infty$$

となることを言う。

さらにテストや複雑性の時と同様に、計算可能性の制限を加える必要がある。

定義 10
関数 $f : 2^* \to \mathbb{R}^+$ が c.e. であるとは、

$$\{\langle \sigma, p \rangle \ : \ f(\sigma) > p \in \mathbb{Q}\}$$

が *c.e.* であることを言う。

すなわち各値が有理数で下から近似できることを言う。このため下側半計算可能 (lower semi-computable) とも呼ばれる。

以上の準備で、以下のように Martin-Löf ランダムネスのマルチンゲールによる特徴付けが得られる。

定理 11 (Schnorr [15])
A が Martin-Löf ランダムであることと、すべての c.e. マルチンゲールが A で成功しないことが同値となる。

直感的にはランダムであれば所持金は有限倍までしか増やせないということを言っている。実は「成功」の条件を $\lim_n d(A \upharpoonright n) = \infty$ に置き換えても同値性は成り立つことが知られている。

これで 3 つの方法で定義されたランダムの概念が同値になることが分かった。

2.6 独立性定理

ランダム性と独立性には深い関係がある。

ある列がランダムであれば、その一部分もランダムであろう。一部分から見て他の部分はランダムであろう。例えば偶数番目と奇数番目が常に同じ列はランダムではない。偶数部分から見て奇数部分がランダムではないからである。逆に一部分から見て他の部分がランダムであればランダムであろう。このことを定式化したのが以下の定理である。

奇数番目が A、偶数番目が B となるような列を $A \oplus B$ で表す。また Martin-Löf ランダムな列の集合を MLR で表す。A から見て Martin-Löf ランダムな列の集合は MLR^A で表す。

定理 12 (van Lambalgen 1987 [19])
$A \oplus B \in MLR \iff A \in MLR$ かつ $B \in MLR^A$

この定理は通常、van Lambalgen の定理と呼ばれているが、ここでは独立性定理と呼ぶことにする。なぜ対称ではないのかと思われる方があるかもしれないが、

$$A \oplus B \in \mathrm{MLR} \iff A \in \mathrm{MLR}^B \text{かつ } B \in \mathrm{MLR}^A \iff A \in \mathrm{MLR} \text{ かつ } B \in \mathrm{MLR}^A$$

が成り立つということだと理解すれば分かりやすいと思う。いずれにせよ、ランダムな列ならば成り立って欲しい性質を示していることが分かるだろう。Martin-Löf ランダムネス以外にも多くのランダムの概念が提唱されてきたが、この独立性定理は適切なランダムの概念かどうかの一つの指標と考えられている。

今まで、Martin-Löf ランダムネスの性質として、

- ランダムな点の集合の測度が 1
- 万能テストが存在する
- テスト、複雑性、マルチンゲールによる特徴付けが存在する
- 独立性定理が成り立つ

を見てきた。どれも Martin-Löf ランダムネスがランダムの概念として自然であることを示唆するものである。ここで挙げた以外にも様々な性質が知られている。

3 ランダムネスの一般化

前半ではカントール空間上のランダムネスの概念である Martin-Löf ランダムネスについて述べた。後半ではこの概念が位相空間上に一般化され、上で述べた性質が成り立つかどうか調べられた試みについて見ることにする。

3.1 実数関数上のランダムネス

現実世界でのランダムな運動と言えばブラウン運動を思い浮かべる人が多いだろう。ブラウン運動の数理モデルとしては確率論の枠組みで定義されるウィーナー過程がある。数理科学の様々な分野に現れて重要な役割を果たしている。ウィーナー過程 W_t は次の3つの条件で特徴づけられる。

- $W_0 = 0$
- W_t はほとんど確実に連続
- W_t は独立増分を持ち、$0 \leq s < t$ を満たす任意の s, t に対し、$W_t - W_s$ は正規分布 $N(0, t-s)$ に従う。

このウィーナー過程によって導かれる $f(0) = 0$ を満たす連続関数 f からなる関数空間上の確率分布をウィーナー測度と呼ぶ。ウィーナー過程のサンプルパスはウィーナー測度でのランダムな関数と思うことができるだろう。

Asarin と Prokrovskii [2] はテストと複雑性によるアプローチでそのランダムな関数を定義することに成功した。詳細は [5] などを参照して欲しい。しかしこの特徴付けは、

- 実数関数という計算可能性が定義しやすい空間上で、
- ランダムウォークによる近似が可能 (ドンスカーの定理)

という特種な条件により成り立つものである。一般の位相空間上にランダムネスを定義するためには、少なくともまず位相空間上の計算可能性がきちんと定義されなければならない。

3.2 位相空間上の計算可能性

位相空間上の計算可能性については計算可能解析の分野の結果を使うことにする。計算可能解析 (computable analysis) は、実数から実数への計算可能性を考察するための理論として始まった。いくつかの流派があるが、ランダムネスとの相性の良さから、representation のアプローチをとる TTE(Type-2 Theory of Effectivity) をここでは選ぶ。TTE は T_0 で second-countable な位相空間に拡張され、その開基に文字列での表現 (notation) を与えることで計算可能性を入れたものが計算可能位相空間 (computable topological space) である。詳しくは [23] などを参照されたい。ただし、computable topological space という用語が指すものが繰り返し修正されている。現在のところ [24] が最終版と思って、この論文に沿って話を進める。

最初に有限文字列上の計算可能性を無限文字列を許すように拡張する。Σ を文字の集合とし、$Y_0, Y_1 \in \{\Sigma^*, \Sigma^\omega\}$ とする。関数 $f :\subseteq Y_0 \to Y_1$ が計算可能であるとは、あるタイプ2マシンで計算可能であることを言う。タイプ2マシンとは、チューリングマシンで、入力または出力が無限の場合を許すものである。ただし、出力は一方向に制限されている。Σ^* に離散位相を、Σ^ω には $\{w\Sigma^\omega : w \in \Sigma^*\}$ を開基とする位相を入れる。すべての計算可能な関数は連続となる。

この Σ^* または Σ^ω を名前とすることで、一般の集合にも計算可能性を入れることができる。ここでは、計算可能位相空間について見ることにする。

定義 13 (計算可能位相空間 (computable topological space))
計算可能位相空間 とは、4 つ組 $\mathbf{X} = (X, \tau, \beta, \nu)$ で、

- (X, τ) は T_0 の位相空間、
- $\nu :\subseteq \Sigma^* \to \beta$ は τ の開基 β への関数、
- $dom(\nu)$ は計算可能、
- 以下を満たす *c.e.* 集合 $S \subseteq (dom(\nu))^3$ が存在する

$$\nu(u) \cap \nu(v) = \bigcup \{\nu(w) \ : \ (u, v, w) \in S\}$$

を満たすものを言う。

例えば、実数は通常の位相と有理数を端に持つ区間の集合を開基とすることで、計算可能位相空間になる。さらに計算可能位相空間上の点、開区間、閉区間の表現 (representation) が定義される。ここでは点の表現 δ と開区間の表現 θ のみ説明する。

$$x = \delta(p) \iff (\forall w \in \Sigma^*)(w \ll p \iff x \in \nu(w))$$

$$W = \theta(p) \iff (w \ll p \Rightarrow w \in \mathrm{dom}(\nu)) \text{ かつ } W = \bigcup \{\nu(w) \ : \ w \ll p\}$$

ここで、$p \in \Sigma^\omega$ は文字列の列をエンコードしたものであり、$w \ll p$ は $w \in \Sigma^*$ がその列に現れることを表す。例えば、各点の δ 表現とはその点を含むすべての開基の名前のリストである。通常の位相の実数の表現 δ を特に ρ と書き、開基 $\{(x, \infty) \ : \ x < \infty\} \cup \{\phi, \mathbb{R}\}$ からなる位相の表現を $\rho_<$ と書く。

ある点が計算可能な δ 表現を持つとき、その点は δ 計算可能であると言う。ρ 計算可能な実数は様々な方法で定義される計算可能な実数に一致する。2 つの計算可能位相空間 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ に対して、$f : X_1 \to X_2$ が (δ_1, δ_2)-計算可能であるとは、ある計算可能な関数 $h :\subseteq \Sigma^\omega \to \Sigma^\omega$ があって、p が x の δ_1 表現の時、$h(p)$ が $f(x)$ の δ_2 表現となることを言う。

3.3 位相空間上のテストによるランダムネス

Martin-Löf ランダムネスはテスト、複雑性、マルチンゲールの 3 つのアプローチから定義できた。Zvonkin と Levin [25] はこのうちテストの方法は一般の空間に拡張できると提唱した。Hertling と Weihrauch [7] はこれに従い、計算可能位相空間上でのランダムな点を定義した。このランダムネスもいくつか自然な性質が成り立つ。例えば、ランダムな点の集合の測度は 1 である。一方で、以下のような不自然な振る舞いも指摘された。計算可能位相空間上で万能テストが存在するための十分条件が、開基の有限和の測度が、その開基の名前から実数への関数と見たときに上側半計算可能となることである。ところが計算可能な測度は下側半計算可能であるという状況証拠が [22] などで示されていた。素朴に考えれば、測度が計算可能であれば万能テストが存在するという命題が成り立って欲しいのだが、そうはならないようなのである。この謎は後に解決されることになる。

3.4 計算可能距離空間上のランダムネス

一般の空間上でのランダムネスは、複雑性による特徴付けを持つか？自然なランダムの概念かどうかを判定する重要な基準である。

Gács [6] は計算可能距離空間上のランダムネスを考察した。計算可能距離空間とは距離空間に計算可能性を入れたもので、自然に計算可能位相空間になる。距離空間への制限なので、テストによるランダムネスは自然に定義される。さらに、コンパクトの場合に複雑性による特徴付けを与えた。しかしその式はとても複雑なものであった。

Hoyrup と Rojas[8] は計算可能距離空間の測度に関して詳細な議論を行うことで、一般の計算可能距離空間とその上の計算可能な測度に対して、複雑性による特徴付けを与えることに成功した。ところが彼らの特徴付けは計算可能距離空間にしか適用できないものであり、また恣意的に開基を取り替える必要があった。

3.5 計算可能位相空間上のランダムネス

計算可能位相空間上でのランダムネスは、複雑性による特徴付けを持つか？これは定義されたランダムネスが自然なものかという問題でもある。

まず、テストによる方法の定義を書き下す。様々な空間で微妙に表現が異なるが、本質的にはみな同じである。ここでは [24] を元した宮部 [12] の表現を引用する。

定義 14
$\mathbf{X}$ を計算可能位相空間とし、μ をその上の測度とする。$\mathbf{X}$ 上のテストとは、一様 θ 計算可能な開集合の列 $\{U_n\}$ で、$\mu(U_n) \leq 2^{-n}$ とする。点 $x \in X$ が測度 μ ランダムとは、すべてのテストに対し $x \notin \bigcap U_n$ となることを言う。

すぐに分かることだが、ランダムな点の集合の測度は 1 である。

まず宮部 [12] はマルチンゲールによる特徴付けを与えた。カントール空間上のマルチンゲールはすでに定義を与えたが、今度は測度空間上のマルチンゲールを使う必要がある。

定義 15
フィルター付き測度空間 $(X, \mathcal{B}, \{\mathcal{A}_n\}, \mu)$ において、$\{f_n\}$ が マルチンゲール であるとは、$\int f_n d\mu < \infty$ で、すべての $A \in \mathcal{A}_n$ に対して、

$$\int_A f_{n+1} d\mu = \int_A f_n d\mu$$

となるものを言う。

このマルチンゲールは測度論で使われるものであり、細かい定義は [14] などを参照されたい。確率論で使われるマルチンゲールとは少し表現が異なるが、測度論的な意味で同値である。しかし以下で行うように計算可能性に関する制限を加えた場合、同値になるかどうかは分かっていない。

定理 16
$x \in X$ が測度 μ ランダムであることと、すべての非負の一様 $(\delta, \overline{\rho_<})$ 計算可能なマルチンゲール $\{f_n\}$ に対し $\sup_n f_n(x) < \infty$ となることは同値である。

これは任意の計算可能位相空間と任意の測度で成り立つことに注意する。すなわち測度が計算可能である必要はない。

さらに複雑性による特徴付けができる十分条件を以下のように与えた。

定理 17
計算可能位相空間 $\mathbf{X}$ とその上の測度 μ が以下を満すとする。

- 開基が完全 *(complete)*、

- 測度 μ は計算可能、
- *almost decidability* と *almost disjointness* を持つ。

この時、$x \in X$ が測度 μ ランダムであることと、以下が同値。$\xi(u) = \nu(u)^c$ として、

$$x \in \xi(u) \Rightarrow K(u) \geq -\log \mu\xi(u) - O(1)$$

ここでは、それぞれの定義は与えないが、簡単に補足をしておく。開基の完全性は単純な形で特徴付けを与えるためのもので、本質ではない。almost decidability と almost disjointness は、(共に測度にも依存するがだいたいにおいて) 位相の性質であり、計算可能距離空間とその上の計算可能な測度では共に成り立つ性質である。今までの複雑性の定義と異なるのが、閉集合を考えていることである。そのため条件なしでの同値性は成立しない。しかし上のようなある種の位相的性質と測度の計算可能性を仮定すれば、同値性が成立する。

ここで複雑性 K は万能なものを取っていることを思い出して欲しい。複雑性による特徴付けは、ある意味でテストであって、万能テストのようなものである。つまり万能という概念は測度ランダムネスよりもむしろ複雑性ランダムネスの特徴である。2つのランダムネスが同値となるときに測度ランダムネスにも万能テストが存在する。またこの同値性から、測度の上側半計算可能性が導かれるのである。これが例の謎への答えである。以上のことから、この同値性が成立するような場合には、自然なランダムネスであると言えないだろうか。

実はこの主張を裏付ける状況証拠がもう一つある。上記の定義は自然に相対化される。すなわち点 x に対して、x ランダムネスが定義できる。そして独立性定理が以下の形で成立する。

定理 18
μ_1, μ_2 をそれぞれ計算可能位相空間 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 上の測度とする。$\overline{\mathbf{X}}$ をそれらの積空間とし、$\overline{\mu}$ を μ_1, μ_2 から導かれる測度とする。X_2 と μ_2 が *almost decidability* と *almost disjointness* を満たし、μ_2 が計算可能であれば、$\langle x_1, x_2 \rangle$ が $\overline{\mu}$ ランダムであることと、x_1 が μ_1 ランダムかつ x_2 が $x_1 - \mu_2$ ランダムであることが同値。

このことから almost decidability と almost disjointness は自然なランダムネスが定義されるための十分条件だと言えるだろう。これが緩められるかどうかは分かっていない。計算可能距離空間に制限すべきだと言うひとがあるかもしれないが、計算可能距離空間であることを示すのは大変な場合もあり、必要な場合には仮定するという使い方が良いではなかろうか。

今後、カントール空間上のランダムネスで調べられた様々な性質が一般の空間に拡張できるかどうか、そのための位相的性質などを調べる必要がある。また位相幾何学や解析学、確率論などで知られている定理とランダムネスの関係など、分野を横断した研究が期待される。

参考文献

[1] K. Ambos-Spies and P. Fejer. Degrees of unsolvability. Unpublished preprint., 2006.

[2] E. A. Asarin and A. V. Prokovskiy. Primeenenie kolmogorovskoi slozhnosti k anlizu dinamiki upravlemykh sistem. *Automatika i Telemekhanika*, 1:25–33, 1986.

[3] S. B. Cooper. *Computability theory.* CRC Press, 2004.

[4] R. Downey and D. R. Hirschfeldt. *Algorithmic Randomness and Complexity.* Springer, Berlin, 2010.

[5] W. Fouché. Arithmetical representations of brownian motion i. *Journal of Symbolic Logic*, 65(1):421–442, 2000.

[6] P. Gács. Uniform test of algorithmic randomness over a general space. *Theoretical Computer Science*, 341:91–137, 2005.

[7] P. Hertling and K. Weihrauch. Randomness spaces. In *Automata, Languages and Programming, Proceedings of the 25th International Colloquium, ICALP'98*, pages 796–807. Springer-Verlag, 1998.

[8] M. Hoyrup and C. Rojas. Computability of probability measures and martin-löf randomness over metric spaces. *Information and Computation*, 207(7):830–847, 2009.

[9] A. Kolmogorov. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Springer, 1933.

[10] M. Li and P. Vitányi. *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications.* Graduate Texts in Computer Science. Springer-Verlag, New York, 2007.

[11] P. Martin-Löf. The definition of random sequences. *Information and Control*, 9(6):602–619, 1966.

[12] K. Miyabe. Algorithmic randomness over general spaces. submitted.

[13] A. Nies. *Computability and randomness.* Oxford University Press, USA, 2009.

[14] R. L. Schilling. *Measures, integrals and martingales.* Cambridge University Press, 2005.

[15] C. Schnorr. A unified approach to the definition of a random sequence. *Mathematical Systems Theory*, 5:246–258, 1971.

[16] R. I. Soare. *Recursively enumerable sets and degrees.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer, Berlin, 1987.

[17] R. I. Soare. The history and concept of computability. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 140:3–36, 1999.

[18] A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 420:230–265, 1936.

[19] M. van Lambalgen. *Random sequences.* PhD thesis, University of Amsterdam, 1987.

[20] J. Ville. Étude critique de la notion de collectif. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1939.

[21] R. von Mises. Grundlagen der wahrscheinlichkeistrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 5:52–99, 1919.

[22] K. Weihrauch. A foundation for computable analysis. In D. S. B. et al., editor, *Combinatorics, Complexity, and Logic*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, pages 66–89, Singapore, 1997. Springer-Verlag. Proceedings of DMTCS'96, Auckland.

[23] K. Weihrauch. *Computable Analysis: an introduction.* Springer, Berlin, 2000.

[24] K. Weihrauch and T. Grubba. Elementary computable topology. *Journal of Universal Computer Science*, 15(6):1381–1422, 2009.

[25] A. K. Zvonkin and L. A. Levin. The complexity of finite objects and the development of the concepts of information and randomness by means of the theory of algorithms. *Russian Math. Surveys*, 25(6):83–124, 1970.