数理解析研究所講究録
第1729巻 2011年 163-166

Riceの定理のアナロジーについて

吉川 紘史 (東京工業大学 情報理工学研究科 数理・計算科学専攻)
横山 啓太 (東北大学 理学研究科)

概要

本稿の目的は、Rice の定理 [3] の一階述語論理におけるアナロジーを考察することである。アナロジー自体は過去に I. C. Oliveira と W. A. Carnielli が提案 [1] しているが、失敗 [2] に終わっている。本稿では新たに、Rice の定理のアナロジーとなる Rice 性という概念が本質的決定不能性と同等なことを示す。

1 定義

まず、主張集合と Rice 性という二つの概念を導入する。主張集合はインデックス集合のアナロジーになっており、Rice 性が Rice の定理のアナロジーになっている。すなわち、ある理論 $\mathscr{T}$ が Rice 性を持つならば、$\mathscr{T}$ において Rice の定理のアナロジーが成り立つ、と解釈できる。次節以降で、Rice 性を持つことと本質的決定不能であることの同値性を示す。

定義 1.1. 理論 $\mathscr{T}$ に対し、$\mathsf{Th}(\mathscr{T})$ および $\mathsf{Rf}(\mathscr{T})$ を

$$\mathsf{Th}(\mathscr{T}) = \{\alpha \mid \mathscr{T} \vdash \alpha\}$$
$$\mathsf{Rf}(\mathscr{T}) = \{\alpha \mid \mathscr{T} \vdash \neg\alpha\}$$

と定める。

定義 1.2 (決定可能性). 理論 $\mathscr{T}$ に対し $\mathsf{Th}(\mathscr{T})$ が計算可能であるとき $\mathscr{T}$ は**決定可能 (decidable)** であるといい、そうでないとき $\mathscr{T}$ は**決定不能 (undecidable)** であるという。とくに $\mathscr{T}$ の無矛盾拡大が全て決定不能なとき、$\mathscr{T}$ は**本質的決定不能 (essentially undecidable)** であるという。

定義 1.3 (主張集合). 理論 $\mathscr{T}$ および文の集合 S が、任意の文 α, β について

$$\mathscr{T} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta \implies [\alpha \in S \iff \beta \in S]$$

を満たすとき、S を $\mathscr{T}$ 上の**主張集合**という。とくに S が空集合または全体集合のとき S は**自明 (trivial)** であるといい、それ以外のとき S は**非自明 (nontrivial)** であるという。

命題 1.4. 任意の理論 $\mathscr{T}$ について、$\mathsf{Th}(\mathscr{T})$ および $\mathsf{Rf}(\mathscr{T})$ は $\mathscr{T}$ 上の主張集合となる。

命題 1.5. 理論 $\mathscr{T}$ の拡大上の主張集合は、$\mathscr{T}$ 上の主張集合でもある。

定義 1.6 (Rice 性). 理論 $\mathscr{T}$ 上の非自明な主張集合が全て計算不能なとき、$\mathscr{T}$ は **Rice 性**を持つという。

2 Rice 分離

Rice 性を持つことと本質的決定不能なことが同値であることを示すにあたり、Rice 分離という中間的な概念を導入する。任意の無矛盾な理論 $\mathscr{T}$ が

$$\mathscr{T} \text{ が Rice 性を持つ} \implies \mathscr{T} \text{ が Rice 分離不能である} \implies \mathscr{T} \text{ が本質的決定不能である}$$

を満たすことは定義から容易に分かる。さらに補題 2.5 と補題 3.1 により逆も示せるため、定理 3.2 すなわち

$$\mathscr{T} \text{ が Rice 性を持つ} \iff \mathscr{T} \text{ が Rice 分離不能である} \iff \mathscr{T} \text{ が本質的決定不能である}$$

が導かれる。

定義 2.1 (Rice 分離). 理論 $\mathscr{T}$ に対し、$\mathscr{T}$ 上の計算可能な主張集合 S が存在して

$$\mathsf{Th}(\mathscr{T}) \subseteq S \subseteq \overline{\mathsf{Rf}(\mathscr{T})}$$

を満たすとき、$\mathscr{T}$ は **Rice 分離可能**であるという。またこのとき S は $\mathscr{T}$ を **Rice 分離**するという。$\mathscr{T}$ が Rice 分離可能でないとき、$\mathscr{T}$ は **Rice 分離不能**であるという。

命題 2.2. Rice 分離可能な理論は無矛盾である。

命題 2.3. 理論 $\mathscr{T}$ のある拡大が集合 S により Rice 分離されるならば、$\mathscr{T}$ も S により Rice 分離される。

補題 2.4. 理論 $\mathscr{T}$ 上の計算可能な主張集合 S が、ある文 γ を含み $\bot$ を含まないとする。このとき $S^\star$ を

$$S^\star = \{\delta \mid (\gamma \wedge \delta) \in S\}$$

とおくと、$S^\star$ は $\mathscr{T} \cup \{\gamma\}$ および $\mathscr{T}$ を Rice 分離する。

証明 明らかに $S^\star$ は計算可能である。また、任意の文 α, β について

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}, \gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta &\implies \mathscr{T} \vdash (\gamma \wedge \alpha) \leftrightarrow (\gamma \wedge \beta) \\
&\implies \Big[(\gamma \wedge \alpha) \in S \iff (\gamma \wedge \beta) \in S\Big] \\
&\implies \Big[\alpha \in S^\star \iff \beta \in S^\star\Big]
\end{aligned}$$

が成り立つため $S^\star$ は $\mathscr{T} \cup \{\gamma\}$ 上の主張集合である。さらに任意の文 δ について

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}, \gamma \vdash \delta &\implies \mathscr{T} \vdash \gamma \leftrightarrow (\gamma \wedge \delta) \\
&\implies (\gamma \wedge \delta) \in S \\
&\implies \delta \in S^\star
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}, \gamma \vdash \neg\delta &\implies \mathscr{T}, \gamma, \delta \vdash \bot \\
&\implies \mathscr{T} \vdash (\gamma \wedge \delta) \to \bot \\
&\implies \mathscr{T} \vdash (\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow \bot \\
&\implies (\gamma \wedge \delta) \notin S \\
&\implies \delta \notin S^\star
\end{aligned}$$

が成り立つため、$S^\star$ が $\mathscr{T} \cup \{\gamma\}$ を (したがって $\mathscr{T}$ も) Rice 分離していることが分かる。 ■

補題 2.5. 任意の無矛盾な理論 $\mathscr{T}$ について次が成り立つ。

$$\mathscr{T} \text{ が Rice 分離不能} \implies \mathscr{T} \text{ が Rice 性を持つ}$$

証明 対偶を示す。ある無矛盾な理論 $\mathscr{T}$ が Rice 性を持たないとする。このとき $\mathscr{T}$ 上の非自明な計算可能主張集合 S が存在する。また $\overline{S}$ も $\mathscr{T}$ 上の非自明な計算可能主張集合である。よって S と $\overline{S}$ のうち $\perp$ を含まない方に補題 2.4 を適用することで、$\mathscr{T}$ が Rice 分離可能であると分かる。 ■

3 本質的決定不能性との関係

Rice 分離不能な理論が本質的決定不能であることは既に述べた通りだが、逆も成り立つことを補題 3.1 により示す。具体的には、理論 $\mathscr{T}$ を Rice 分離する集合から $\mathscr{T}$ の決定可能な無矛盾拡大を構成する方法を示す。この結果により定理 3.2 が導かれる。

補題 3.1. 任意の理論 $\mathscr{T}$ について次が成り立つ。

$$\mathscr{T} \text{ が本質的決定不能} \implies \mathscr{T} \text{ が Rice 分離不能}$$

証明 対偶を示す。理論 $\mathscr{T}$ が集合 S により Rice 分離されているとする。このとき文全体の計算可能な列 $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$ を取り、列 $\{S_n\}_{n\in\omega}, \{\hat{S}_n\}_{n\in\omega}, \{\mathscr{T}_n\}_{n\in\omega}$ および理論 $\mathscr{T}^+$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}
S_0 &= S \\
S_{n+1} &= \begin{cases} \{\delta \mid (\gamma_n \wedge \delta) \in \hat{S}_n\} & \gamma_n \in \hat{S}_n \text{ のとき} \\ \{\delta \mid (\neg\gamma_n \wedge \delta) \in \hat{S}_n\} & \text{それ以外のとき} \end{cases} \\
\hat{S}_n &= S_n \cup \{\delta \mid \delta \notin S_n \ \& \ \neg\delta \notin S_n\} \\
X_0 &= \emptyset \\
X_{n+1} &= \begin{cases} X_n \cup \{\gamma_n\} & \gamma_n \in \hat{S}_n \text{ のとき} \\ X_n \cup \{\neg\gamma_n\} & \text{それ以外のとき} \end{cases} \\
\mathscr{T}^+ &= \bigcup_{n\in\omega} X_n
\end{aligned}$$

により定める。すると任意の $n \in \omega$ について次の補題 A および補題 B が成り立つ。

補題 A. S_n が $\mathscr{T} \cup X_n$ を Rice 分離するならば、$\hat{S}_n$ も $\mathscr{T} \cup X_n$ を Rice 分離する。

証明 S_n が $\mathscr{T} \cup X_n$ を Rice 分離しているとする。このとき S_n は計算可能集合なので、明らかに $\hat{S}_n$ も計算可能集合である。また $\mathscr{T} \cup X_n \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ を満たす任意の文 α, β について次が成り立つ。

- $\alpha \in S_n$ の場合
  S_n が $\mathscr{T} \cup X_n$ 上の主張集合なので $\beta \in S_n$ であり、したがって $\hat{S}_n$ の定義により

  $$\alpha \in \hat{S}_n \ \& \ \beta \in \hat{S}_n$$

  が成り立つ。

- $\alpha \notin S_n$ かつ $\neg\alpha \in S_n$ の場合
  S_n が $\mathcal{T} \cup X_n$ 上の主張集合なので $\beta \notin S_n$ かつ $\neg\beta \in S_n$ であり、したがって $\hat{S}_n$ の定義により
$$\alpha \notin \hat{S}_n \ \& \ \beta \notin \hat{S}_n$$
  が成り立つ。
- $\alpha \notin S_n$ かつ $\neg\alpha \notin S_n$ の場合
  S_n が $\mathcal{T} \cup X_n$ 上の主張集合なので $\beta \notin S_n$ かつ $\neg\beta \notin S_n$ であり、したがって $\hat{S}_n$ の定義により
$$\alpha \in \hat{S}_n \ \& \ \beta \in \hat{S}_n$$
  が成り立つ。

つまり $\mathcal{T} \cup X_n \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ を満たす任意の文 α, β について
$$\alpha \in \hat{S}_n \iff \beta \in \hat{S}_n$$
が成り立つので、$\hat{S}_n$ は $\mathcal{T} \cup X_n$ 上の主張集合である。さらに任意の文 δ について
$$\begin{aligned} \mathcal{T} \cup X_n \vdash \delta &\implies \delta \in S_n \\ &\implies \delta \in \hat{S}_n \end{aligned}$$
および
$$\begin{aligned} \mathcal{T} \cup X_n \vdash \neg\delta &\implies \neg\delta \in S_n \ \& \ \delta \notin S_n \\ &\implies \delta \notin \hat{S}_n \end{aligned}$$
が成り立つため、$\hat{S}_n$ が $\mathcal{T} \cup X_n$ を Rice 分離していることが分かる。 ┘

補題 B. $\hat{S}_n$ が $\mathcal{T} \cup X_n$ を Rice 分離するならば、S_{n+1} は $\mathcal{T} \cup X_{n+1}$ を Rice 分離する。

証明 補題 2.4 により明らか。 ┘

$\mathcal{T}^+$ はその構成から明らかに完全かつ決定可能である。さらに補題 A および 補題 B により、任意の $n \in \omega$ で $\hat{S}_n$ が $\mathcal{T} \cup X_n$ を Rice 分離する (よって $\mathcal{T} \cup X_n$ は無矛盾である) ため、$\mathcal{T}^+$ が $\mathcal{T}$ の無矛盾拡大であると分かる。したがって $\mathcal{T}$ は本質的決定不能ではない。 ■

定理 3.2. 任意の無矛盾な理論 $\mathcal{T}$ について次が成り立つ。

$$\mathcal{T} \text{ が Rice 性を持つ} \iff \mathcal{T} \text{ が Rice 分離不能である} \iff \mathcal{T} \text{ が本質的決定不能である}$$

証明 定義 1.2、定義 1.6、定義 2.1、補題 2.5 および 補題 3.1 により明らか。 ■

参考文献

[1] I. C. Oliveira and W. A. Carnielli. The Ricean objection: an analogue of Rice's theorem for first-order theories. *Logic Journal of the IGPL*, Vol. 16, No. 6, pp. 585–590, 2008. (See also erratum [2]).

[2] I. C. Oliveira and W. A. Carnielli. Erratum to "The Ricean objection: an analogue of Rice's theorem for first-order theories". *Logic Journal of the IGPL*, Vol. 17, No. 6, pp. 803–804, 2009.

[3] H. G. Rice. Classes of recursively enumerable sets and their decision problems. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 74, pp. 358–366, 1953.