数理解析研究所講究録
第1731巻 2011年 127-136

Calabi-Yau 多様体の問題[1]

並河　良典

コンパクトケーラー多様体で標準束が自明なものを（広義）Calabi-Yau 多様体と呼ぶ。次に挙げる Bogomolov 分解定理によって、（広義）Calabi-Yau 多様体は大雑把にいうと３種類に分かれる。

定理 [Be 1]　X をコンパクトケーラー多様体で標準束 K_X が自明なものとする。このとき X の適当な有限不分岐被覆 $\pi : X' \to X$ が存在して

$$X' = T \times \prod V_i \times \prod X_j$$

と分解する。但し T は複素トーラス、V_i は３次元以上の射影的代数多様体で、$K_{V_i} = 0$,

$$h^p(V_i, O_{V_i}) = 0 \ (0 < p < \dim V_i),$$

$\pi_1(V_i) = 1$ を満たすもの。そして X_j は正則シンプレクテイック形式 Ω を持ったコンパクトケーラー多様体で

$$h^p(X_j, O_{X_j}) = \begin{cases} 1 & (p: \text{ 偶数 } \ 0 \leq p \leq \dim X_j) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$\pi_1(X_j) = 1$ を満たすもの。

1. Calabi-Yau 3-fold

この章では、分解定理で現れた２番目のタイプの多様体で、次元が３のものを扱う。ここでは、単連結の条件をはずして以下のように Calabi-Yau 3-fold を定義する。

定義 ３次元射影的代数多様体 V で次を満たすものを Calabi-Yau 3-fold とよぶ：
(1) $K_V = 0$
(2) $h^1(V, O_V) = 0$.

Calabi-Yau 3-fold は非常に多い (cf. [GHJ])。すでに、数万個の Calabi-Yau 3-fold の族が構成されている。数例を挙げておくと、
(i) $\mathbf{P}^4$ 内の５次超曲面
(ii) 重みつき射影空間の中の完全交差多様体
(iii) トーリック Fano 多様体の中の超曲面

[1] この論稿では、Calabi-Yau 多様体の問題で筆者が直接関わったもののうち中心的だと思うものを列挙した。したがってミラー対称性、Gromov-Witten 不変量などに関する重要な諸問題が議論されていない。

(iV) 上のタイプの Calabi-Yau 3-fold X の商多様体 X/G のクレパント特異点解消などである。

問題 1 *** (1) Calabi-Yau 3-fold は有界族をなすか？
(2) Calabi-Yau 3-fold の位相タイプは有限か？

Calabi-Yau 3-fold の仮定から **射影性** を除くと問題 1 は否定的である。

例 (Friedman [Fr]) X を Calabi-Yau 3-fold, C_i $(1 \leq i \leq n)$ を互いに交わらない $(-1,-1)$-曲線（$\mathbf{P}^1$ と同型で法束が $O(-1) \oplus O(-1)$ であるようなもの）とする。Grauert の定理によって、これらの曲線を各々 1 点につぶして複素解析空間 $\bar{X}$ が得られる。C_i がつぶれた先 p_i は、$\bar{X}$ の通常 2 重特異点になる。ここで $\bar{X}$ を変形によって非特異化 (smoothing) することを考える。次の条件が満たされればそれは可能である：

$[C_i]$ を C_i から定まる 2-サイクルとする。このとき $[C_1]$, ..., $[C_n]$ は $H_2(X, \mathbf{Q})$ を張る。さらに $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbf{Q} - \{0\})^n$ で、$\Sigma \alpha_i [C_i] = 0$ を満たすものが存在する。

$\bar{X}$ の smoothing を Y とする。Y は 3 次元コンパクト複素多様体で $K_Y = 0$, $b_2(Y) = 0$ を満たす。Y を Friedman 3-fold とよぶことにする。X と Y の位相的オイラー数の間には次の関係がある：

$$e(Y) = e(X) - 2n$$

したがって $n \to \infty$ とすれば、$e(Y) \to -\infty$ となる。

上の例をもとに Miles Reid [Re] は次の予想を提起した。証明の手懸りすらない大胆な予想なので、fantasy と呼ばれている：

Reid's fantasy
すべての単連結 Calabi-Yau 3-fold は Friedman 3-fold の退化を特異点解消したものとして得られるであろう。

Reid's fantasy は Calabi-Yau 3-fold のモジュラィ空間をどのように捉えるべきかの指針を与えてくれる。例えば, X から (-1,-1)-曲線をつぶすかわりに余次元 1 の部分多様体をつぶしたときにも同様の考察が可能である：

例 ([Na 1]) X を Calabi-Yau 3-fold, E を X の因子で $\mathbf{P}^2$ の 3 点ブローアップと同型なものとする。E の法束は、E の標準束なので負な直線束である。Grauert の定理によって X から E を 1 点につぶして複素解析空間を得ることができる。ここでは、birational contraction map

$$\pi : X \to \bar{X}$$

は射影的で、$b_2(\bar{X}) = b_2(X) - 1$ であると仮定する（実際そのような例を構成することができる）。このとき $\bar{X}$ の倉西空間 Def($\bar{\mathrm{X}}$) は 2 つの既約成分 S_1, S_2 を持つ。各既約成分は非特異で

$$\dim S_1 = \dim \mathrm{Def(X)} + 2,$$

$$\dim S_2 = \dim \mathrm{Def}(\mathrm{X}) + 1$$

を満たし互いに横断的に交わっている。$\bar{X}$ は、S_1, S_2 に対応して2つの異なる smoothing Y_1, Y_2 を持つ。ベッチ数の間には次の関係がある：

$$b_2(Y_1) = b_2(X) - 1,\ b_2(Y_2) = b_2(X) - 1$$

$$b_3(Y_1) = b_3(X) + 4,\ b_3(Y_2) = b_3(X) + 2.$$

問題 2 ** 高々標準特異点のみをもった Calabi-Yau 3-fold はいつ非特異な Calabi-Yau 3-fold に変形できるか？ なるべく簡明な条件を与えよ。

例 ここで smoothing 不可能な例を2つ紹介する。

(a) 2次元射影空間 $\mathbf{P}^2$ を部分多様体として含む Calabi-Yau 3-fold X を考える。Adjunction formula より $\mathbf{P}^2$ の法束は $O(-3)$ である。$\mathbf{P}^2$ を1点 p につぶす双有理写像を

$$\pi : X \to \bar{X}$$

としよう。このとき 複素解析空間の芽 $(\bar{X}, p)$ は $1/3(1,1,1)$-型の商特異点である。Schlessinger の定理 ([Sch]) によって $(\bar{X}, p)$ は変形に関しては剛的 (rigid) である。したがって $\bar{X}$ を変形によって非特異化することはできない。

(b) 1次元射影空間 $\mathbf{P}^1$ を (-1,-1)-曲線として含む Calabi-Yau 3-fold X を考える。

$$\pi : X \to \bar{X}$$

を $\mathbf{P}^1$ を1点 p につぶすような双有理写像とする。このとき $(\bar{X}, p)$ は通常2重特異点である。複素解析空間の芽として $(\bar{X}, p)$ は smoothable であるが、$\bar{X}$ 自身は smoothable ではない ([Na 2])。

この例は、Calabi-Yau 3-fold の smoothing 問題には、局所的な障害と大域的な障害の2種類の障害があることを示している。末端的特異点のみをもつ Calabi-Yau 3-fold に対しては次の定理が成り立つ。

定理 ([Na-St], [Na 2]) X を高々末端特異点しかもたない Calabi-Yau 3-fold とする。このとき次が成立する：

(i) X の倉西空間 Def(X) は非特異である。

(ii) X を変形して高々通常2重点しかもたない Calabi-Yau 3-fold にできる。

(iii) もし X が $\mathbf{Q}$-分解的であれば、X を非特異な Calabi-Yau 3-fold に変形することができる。

3次元末端特異点は孤立特異点である。次の予想は、上の定理を一般化したものである。

予想 3 ** X を孤立標準特異点のみをもつ Calabi-Yau 3-fold とし、$\mathrm{Sing}(\mathrm{X}) = \{\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_n\}$ とする。次を仮定する：

(i) 複素解析空間の芽 (X, p_i) はすべて変形で smoothable

(ii) X は $\mathbf{Q}$-分解的である。
このとき X を変形して非特異な Calabi-Yau 3-fold にすることができる。

注意 条件 (i), (ii) に次の (iii) を付け加えると予想は正しい ([Na 1])：
(iii) 倉西空間 $\mathrm{Def}(X, p_i)$ はすべて非特異。

高次元の Calabi-Yau に対しては、この種の問題はほとんど研究されていない。通常２重点をもった一般次元 Calabi-Yau を扱った Rollenske-Thomas の仕事 [R-T] があるくらいである。

問題 4 ** 4 次元以上の Calabi-Yau に対しても Reid's fantasy に対応する仮説は意味があるのか、面白い例を見つけて理論を発展させよ。

Reid's fantasy 以外で、Calabi-Yau 3-fold に関する問題を幾つか述べておく。
問題 5 ** 非可換な有限群を基本群にもつ Calabi-Yau 3-fold を構成せよ。

例 四元数群

$$H := \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

を基本群にもつ Calabi-Yau 3-fold X

(a) Beauville による構成法 ([Be 2])：H の正則表現 V ($\dim V = 8$) を考え、$\mathbf{P(V)}$ の中で適当な 4 つの 2 次式で定義される完全交差多様体を X とする。H は X に自由に作用する。

(b) 橋本俊幸による構成法 ([Ha]): H は 2 項多面体群として 3 次元球面 S^3 に作用する。S^3/H のある 3 角形分割を双対グラフにもつような正規交差多様体 Y を構成して、Y を変形によって非特異化して Calabi-Yau 3-fold X を作る。
位数２４、４８、１２０の２項多面体群を基本群にもつような Calabi-Yau 3-fold は存在するのであろうか？

問題 6 *** 基本群が有限な Calabi-Yau 3-fold の上には常に（非特異とは限らない）有理曲線が存在するのか？

注意 X を 3 次元アーベル多様体 A をエタール被覆にもつ Calabi-Yau 3-fold とする。X 上には有理曲線は存在しない。しかし X の基本群は無限である。

Calabi-Yau 3-fold X のアンプルコーンを $A(X)$ であらわす。$A(X)$ は $H^2(X, \mathbf{R})$ の中の開凸型コーンである。X の自己同型群 $\mathrm{Aut(X)}$ は自然に $A(X)$ に作用する。
問題 7 *** ([Mo]) この作用の基本領域として凸型有理多面錘がとれるか？

注意 射影的K3 曲面に対しては、この予想は正しい（Sterk [Ste]).

Calabi-Yau 3-fold X に対して

$$B(X) := \{Y : Y \text{ は X と双有理同値な Calabi} - \text{Yau } 3 - \text{fold}\}/ \sim_{\text{iso}}$$

と置く。
問題 8 *** $B(X)$ は有限集合か？

注意 X が Schoen 型 Calabi-Yau 3-fold の場合、$B(X)$ の個数が計算されている ([Na 3])。巨大な数ではあるが有限になる。

2. 超ケーラー多様体

この章では、分解定理で現れた３番目のタイプの多様体を扱う。

定義 コンパクトケーラー多様体 X で次の性質を持つものを（既約）超ケーラー多様体とよぶ：

(i) X 上には正則なシンプレクテイック形式 Ω が存在する。

(ii)

$$h^p(X, O_X) = \begin{cases} 1 & (p: \text{偶数}\ \ 0 \leq p \leq \dim X) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(iii) $\pi_1(X) = 1.$

超ケーラー多様体の次元は偶数次元である。Calabi-Yau 3-fold の場合と対照的に、超ケーラー多様体の例は極少なく、４次元以上の既知の例は以下の 1)-4) のどれかに変形同値である。

例 $\dim X = 2$ の場合、X はＫ３曲面に他ならない。

$\dim X \geq 4$(藤木 [Fu]、Beauville [Be 2], O'Grady [O'G 1], [O'G 2])

1) S を K3 曲面とし、$S^{[r]}$ を S 上の r 個の点をパラメーター付けする Douady 空間とする。このとき $S^{[r]}$ は $2r$ 次元の超ケーラー多様体である。

2) T を２次元複素トーラスとして写像

$$\mu : T^{[r+1]} \to T((t_1, ..., t_{r+1}) \to t_1 + ... + t_{r+1})$$

を考える。このとき、$K_r(T) := \mu^{-1}(0)$ は $2r$ 次元の超ケーラー多様体である。

3) S を $\mathrm{Pic(S)} = \mathbf{Z}$ を満たす射影的 K3 曲面とする。S 上の階数２の半安定層で $c_1 = 0$, $c_2 = 4$ を満たすもの全体からなるモジュライ空間を M であらわす。このとき、クレパント特異点解消 $\pi : \tilde{M} \to M$ が存在して、$\tilde{M}$ は１０次元の超ケーラー多様体になる。

4) J を種数２の代数曲線のヤコビ多様体とする。M を J 上の階数２の半安定層で $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ を満たすもののモジュライ空間とする。M はクレパント特異点解消 $\pi : \tilde{M} \to M$ をもつ。正則写像

$$f : M \to J \times J^* \ ([E] \to (c_2(E) - c_2(E_0), det(E) \otimes det(E_0)^{-1}))$$

を考え、$\mu := \pi \circ f$ と定義する。このとき、$X := \mu^{-1}(0)$ は６次元の超ケーラー多様体である。

問題 9 ** 上のどの例とも変形同値でない超ケーラー多様体を構成せよ。

注意　Reid's fantasy の類似はもはや成り立たない。つまり超ケーラー多様体 X から双有理写像 $\pi : X \to \bar{X}$ が存在したとする。このとき $\bar{X}$ は常に（非特異）超ケーラー多様体に変形することが可能である。しかしこうしてできた超ケーラー多様体はもとの X と変形同値になっている ([Na 4]).

周期と Torelli 問題

(X, Ω) を超ケーラー多様体とその上の正則シンプレクテック形式の組とする。このとき第２コホモロジー $H^2(X, \mathbf{Z})$ 上には指数 $(3, b_2 - 3)$ の対称２次形式 $(\, , \,)$ が存在することが知られている (Beauville, Bogomolov, 藤木)。ホッジ分解

$$H^2(X, \mathbf{C}) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$$

を考えると $[\Omega] \in H^{2,0}$, $(\Omega)^2 = 0$, $(\Omega, \bar{\Omega}) > 0$ が成り立つ。 $(H^2(X, \mathbf{Z}), (\, , \,))$ と同型な格子 $(L, < \, , \, >)$ を１つ固定する。印付け (marking) とは、格子の同型

$$\alpha : H^2(X, \mathbf{Z}) \cong L$$

のことである。$L_{\mathbf{C}} := L \otimes \mathbf{C}$ と置いて $\mathbf{P}(L_{\mathbf{C}})$ の中に周期領域 $\mathcal{D}$ を次のように定義する：

$$\mathcal{D} := \{x \in \mathbf{P}(L_{\mathbf{C}}); x^2 = 0, x\bar{x} > 0\}.$$

$\mathcal{M}_L$ を印付き超ケーラー多様体 (X, α) のモジュライ空間とする。$\mathcal{M}_L$ はハウスドルフとは限らない複素多様体である。$(x, \alpha) \in \mathcal{M}_L$ に $[\Omega] \in \mathcal{D}$ を対応させることによって周期写像

$$p : \mathcal{M}_L \to \mathcal{D}$$

を定義する。Ｋ３曲面の場合次の結果が知られている：

定理 (Piatetski-Shapiro, Shafarevich, Todorov, Siu...)
印付きＫ３曲面に対しては次が成立する：
(1) 周期写像 p は局所同型である。
(2) $p(X, \alpha) = p(X', \alpha')$ ならば X と X' は同型である (Torelli 型定理)
(3) p は全射である。

４次元以上の超ケーラー多様体に対して同様のことが成り立つであろうか？(1) は次元に関わらず成り立ち証明も容易である。(3) は Huybrechts によって正しいことが示されている ([Hu]) 。証明にはツイスター空間を用いる。しかし次の例が示すように (2) はもはや正しくない。

例 ([Na 5])　T を２次元複素トーラスとし、T^* を T の双対トーラスとする。$X := K_2(T)$, $X' := K_2(T^*)$ と置き、適当な印付け α, α' を与えれば $p(X, \alpha) = p(X', \alpha')$ が成り立つ。しかし、T を一般にとると、X と X' は双有理同値ですらない。

Torelli 型定理不成立の原因をここで考えてみることにする。$\mathcal{M}_L$ から non-Hausdorff points　を除いた部分を $\mathcal{M}_L^0$ であらわして、 $p^0 := p|_{\mathcal{M}_L^0}$ と置く。このとき２つのケースが考えられる。

ケース１： $\mathcal{M}_L^0$ の連結成分で p^0 が generic に $n:1$ $(n>1)$ になっているようなものが存在する。

ケース２： $\mathcal{M}_L^0$ の連結成分はすべて Ω 上 generic に $1:1$ である。

最近、Verbitsky [Ve] のプレプリントがアーカイブ上に発表された。そこではケース２のみが起こることが主張されている。上の generalized Kummer 多様体の例では、すくなくとも４つの印付き超ケーラー多様体 (X,α), $(X,-\alpha)$, (X',α'), $(X',-\alpha')$ が同じ周期を持っている。もしケース２が起こっているとすると $\mathcal{M}_L^0$ は少なくとも４つの連結成分を持っていることになる。[Ve] では Markman [Ma] の結果を使って次の事実も主張されている。

S をＫ３曲面として、$S^{[r]}$ と変形同値な印付き超ケーラー多様体のモジュライ空間を考える。ここで $r-1$ はある素数のべきになっていると仮定する。このとき $p(X,\alpha)=p(X',\alpha')$ が成り立てば、X と X' は双有理同値である。

問題 10 ** (1) Generalized Kummer 多様体の場合、$\mathcal{M}_L$ は何個の連結成分を持つのか？

(2) O'Grady の超ケーラー多様体（６次元、１０次元）に対して、双有理的 Torelli 問題は成立するのか？

最後に、周期と連接層の導来圏との間の関係についても、次の問題は未解決である。

問題 11*** ２つの印付き超ケーラー多様体 (X,α), (X',α') の周期が同じであれば、$D^b(\mathrm{Coh}(X))\cong D^b(\mathrm{Coh}(X'))$ ？

実のところ次も分かっていない：

問題 11' * $X:=K_2(T)$, $X':=K_2(T^*)$ とした時、$D^b(\mathrm{Coh}(X))\cong D^b(\mathrm{Coh}(X'))$?

超ケーラー多様体の双有理幾何

双有理同値な射影的超ケーラー多様体は、フロップと呼ばれる基本変換の合成で結ばれる (cf. [Ka]). フロップとは次の図式である:

$$X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{f'} X'$$

ここで f, f' はともに非特異代数多様体 X, X' から正規代数多様体 Y への射影的双有理射で $\mathrm{Codim}_X\mathrm{Exc(f)}\geq 2$, $\mathrm{Codim}_{X'}\mathrm{Exc(f')}\geq 2$ を満たしている。さらに ピカール数を ρ であらわすことにすると、$\rho(X/Y)=\rho(X'/Y)=1$ が成り立ち、D を f-negative な (X 上の) 因子とするとその固有変換 D' は f'-ample な因子になっている。一般のフロップを分類することはほぼ不可能であるが、超ケーラー多様体のときに現れるフロップ（symplectic flop）には非常に強い制限がつく。

問題 12 ** Symplectic flop にはどのようなものが存在するのか？ なんらかの意味での分類をおこなえ。

知られている symplectic flop は全て局所的には リー環を用いて構成される:

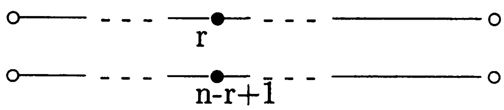
G を複素単純リー群、$\mathbf{g}$ を G のリー環とする。P を G の放物的部分群とする。旗多様体 G/P の余接束 $T^*(G/P)$ からモーメント写像

$$\mu_P : T^*(G/P) \to \mathbf{g}^*$$

が定義される。Killing 形式によって $\mathbf{g}^*$ を $\mathbf{g}$ と同一視する。このとき μ_P の像は $\mathbf{g}$ のあるべき零軌道 O の閉包 $\bar{O}$ に一致する。μ_P が $\bar{O}$ の特異点解消を与えるとき、μ_P を $\bar{O}$ の Springer 特異点解消とよぶ。$\bar{O}$ が異なる Springer 特異点解消を持つことがある：

$$T^*(G/P) \overset{\mu_P}{\to} \bar{O} \overset{\mu_{P'}}{\leftarrow} T^*(G/P').$$

例　$G = SL(n+1)$, $r < 1/2(n+1)$ のとき次の 2 つの印付き Dynkin 図形は放物的部分群 P, P' を決める。



さらに各々の Springer 写像の像はともに $\bar{O}_{[2^r, 1^{n+1-2r}]}$ である。このとき図式

$$T^*(G/P) \overset{\mu_P}{\to} \bar{O} \overset{\mu_{P'}}{\leftarrow} T^*(G/P')$$

は symplectic flop になる。このフロップのことを $A_{n,r}$-型の向井フロップと呼ぶ。他にも D_{2n+1}, $E_{6,I}$, $E_{6,II}$, $B_{n,r}$, $C_{n,r}$, $D_{n,r}$ といったタイプの向井フロップが知られている ([Na 6], [Na 7])

問題 13 ** これらの向井フロップ $X \to Y \leftarrow X'$ に対して導来圏の間の Fourier-Mukai 変換

$$D^b(\mathrm{Coh}(X)) \cong D^b(\mathrm{Coh}(X'))$$

を具体的に構成せよ。

注意　Cautis, Kamnitzer, Licata [C-K-L] によって $A_{n,r}$-型の向井フロップに関しては $sl(2)$-categorification を用いて Fourier-Mukai 変換が構成されている。

超ケーラー多様体の完備偏極族

一般の超ケーラー多様体は射影的ではない。超ケーラー多様体の上に ample な直線束 L を与えることを偏極構造 (polarization) を与えるという。Beauville-Bogomolov 形式ではかった L の次数、すなわち (L^2) のことを $\deg(L)$ と書く。超ケーラー多様体のモジュライ空間の中で偏極構造を保ったものは余次元 1 の部分多様体になる。こうして偏極の次数を固定するごとに超ケーラー多様体の完備偏極族が得られる。

問題 14 **　超ケーラー多様体の各完備偏極族を具体的に記述せよ。

以下に知られている例をのべるが、特に generalizede Kummer 多様体に変形同値なものに関する結果は筆者の知る限りまだ無い。

例　以下、$S^{[2]}$ (S: K3 曲面) と変形同値な超ケーラー多様体を考えることにする。

deg = 2 (O'Grady [O'G 3]) : $\mathbf{P}^5$ の中の EPW 6次超曲面の2重被覆として得られる。

deg = 6 (Beauville-Donagi [Be-Do]): $\mathbf{P}^5$ の中の3次超曲面 V を考え、V 上の直線をパラメータ付けする Hilbert scheme を $F(V)$ とする。このとき $F(V)$ は次数6の偏極構造をもった超ケーラー多様体である。

他にも, deg = 22 のときには、Debarre-Voisin による記述 [D-V]、deg = 38 の時には、Iliev-Ranestad による記述 [I-R] が知られている。

文献

[Be 1] Beauville, A.: Varietes Kahleriennes dont la premiere classe de Chern est nulle. J. Differential Geom. **18** (1983), no. 4, 755-782

[Be 2] Beauville, A.: A Calabi-Yau threefold with non-abelian fundamental group. New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996), 13-17, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **264**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[Be-Do] Beauville, A., Donagi, R.: La variete des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **301** (1985), no. 14, 703-706.

[C-K-L] Cautis, S., Kamnitzer, J. Licata, A.: Coherent sheaves and categorical sl_2 actions. Duke Math. J. **154** (2010), no. 1, 135-179

[D-V] Debarre, O., Voisin, C.: Hyper-Kahler fourfolds and Grassmann geometry, arXiv:0904.3974

[Fr] Friedman, R.: Simultaneous resolution of threefold double points. Math. Ann. **274** (1986), no. 4, 671-689

[Fu] Fujiki, A.: On primitively symplectic compact Kahler V-manifolds of dimension four. Classification of algebraic and analytic manifolds (Katata, 1982), 71-250, Progr. Math., 39, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1983

[Gro] Gross, M.: Deforming Calabi-Yau threefolds. Math. Ann. **308** (1997), no. 2, 187-220.

[GHJ] Gross, M., Huybrechts, D., Joyce, D.: Calabi-Yau manifolds and related geometries. Lectures from the Summer School held in Nordfjordeid, June 2001. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003. viii+239 pp.

[Ha] Hashimoto, T.: A construction of Calabi-Yau manifolds with non-trivial finite fundamental groups, 38-50 (2001), Proceedings of Algebraic Geometry Conference at Kinosaki

[Hu] Huybrechts, D.: Compact hyper-Kahler manifolds: basic results. Invent. Math. **135** (1999), no. 1, 63-113.

[I-R] Iliev, A., Ranestad, K.: $K3$ surfaces of genus 8 and varieties of sums of powers of cubic fourfolds. Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 4, 1455-1468

[Ka] Kawamata, Y.: Flops connect minimal models. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), no. 2, 419-423.

[Ma] Markman, E.: Integral constraints on the monodromy group of the hyper-Kahler resolution of a symmetric product of a $K3$ surface. Internat. J. Math. **21** (2010), no. 2, 169-223

[Mo] Morrison, D.: Compactifications of moduli spaces inspired by mirror symmetry, Asterisque **218** (1993), 243-271

[Na 1] Namikawa, Y.: Deformation theory of Calabi-Yau threefolds and certain invariants of singularities. J. Algebraic Geom. **6** (1997), no. 4, 753-776

[Na 2] Namikawa, Y.: Stratified local moduli of Calabi-Yau threefolds. Topology **41** (2002), no. 6, 1219-1237

[Na 3] Namikawa, Y.: On the birational structure of certain Calabi-Yau threefolds. J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), no. 1, 151-164

[Na 4] Namikawa, Y.: Deformation theory of singular symplectic n-folds. Math. Ann. **319** (2001), no. 3, 597-623

[Na 5] Namikawa, Y.: Counter-example to global Torelli problem for irreducible symplectic manifolds. Math. Ann. **324** (2002), no. 4 841-845.

[Na 6] Namikawa, Y.: Birational geometry of symplectic resolutions of nilpotent orbits. Moduli spaces and arithmetic geometry, 75-116, Adv. Stud. Pure Math., **45**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.

[Na 7] Namikawa, Y.: Birational geometry and deformations of nilpotent orbits. Duke Math. J. **143** (2008), no. 2, 375-405

[Na-St] Namikawa, Y., Steenbrink, J.: Global smoothing of Calabi-Yau threefolds. Invent. Math. **122** (1995), no. 2, 403-419.

[O'G 1] O'Grady, K.: A new six-dimensional irreducible symplectic variety. J. Algebraic Geom. **12** (2003), no. 3, 435-505.

[O'G 2] O'Grady, K.: Desingularized moduli spaces of sheaves on a $K3$. J. Reine Angew. Math. **512** (1999), 49-117.

[O'G 3] O'Grady, K.: Irreducible symplectic 4-folds and Eisenbud-Popescu-Walter sextics. Duke Math. J. **134** (2006), no. 1, 99-137.

[R-T] Rollenske, S., Thomas, R.: Smoothing nodal Calabi-Yau n-folds. J. Topol. **2** (2009), no. 2, 405-421.

[Re] Reid, M.: The moduli space of 3-folds with $K = 0$ may nevertheless be irreducible. Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 329-334

[Sch] Schlessinger, M.: Rigidity of quotient singularities. Invent. Math. **14** (1971), 17-26

[Ste] Sterk, H.: Finiteness results for algebraic $K3$ surfaces. Math. Z. **189** (1985), no. 4, 507-513.

[Ve] Verbitsky, M.: A global Torelli theorem for hyperkahler manifolds, arXiv:0908.4121