数理解析研究所講究録
第1731巻 2011年 175-190

アラケロフ幾何，代数・数論力学系の問題

川口 周

目次

1 Arakelov 幾何

Arakelov 幾何では，$\mathbb{C}$ 上の射影代数多様体，サイクル，直線束の代わりに，大ざっぱに言って，$\mathbb{Z}$ 上の「算術多様体」,「算術的サイクル」,「エルミート直線束」(定義は以下) を考える.

定義 1. (1) $f:\mathcal{X}\to\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ が射影的な算術多様体とは，$\mathcal{X}$ が整スキームで，f が射影的かつ平坦なときにいう.

大阪大学大学院理学研究科
kawaguch(())math.sci.osaka-u.ac.jp

(2) $\mathcal{X}_{\mathbb{C}} := \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\mathbb{C}$ とおく．簡単のため，$\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$ は非特異と仮定する．$\mathcal{X}$ の余次元 p の算術的サイクルとは，組 $(\mathcal{Z}, g)$ で $\mathcal{Z}$ は $\mathcal{X}$ の余次元 p のサイクル，g は $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ の $(p-1, p-1)$ 型実カレントで，ある C^{∞} (p,p) 形式 ω が存在して，$dd^c g + \delta_{\mathcal{Z}(\mathbb{C})} = [\omega]$ となるものである．ただし，g は複素共役 $F_{\infty} : \mathcal{X}(\mathbb{C}) \to \mathcal{X}(\mathbb{C})$ に対して，$F_{\infty}^{*} g = (-1)^{p-1} g$ をみたすと仮定する．

(3) $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} := \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ とおく．$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ が $\mathcal{X}$ 上の C^{∞}-エルミート直線束とは，$\mathcal{L}$ は $\mathcal{X}$ 上の直線束で，$\|\cdot\|$ は $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ の C^{∞}-エルミート計量で複素共役で不変なものである．

Gillet–Soulé （[27], [28], [29] など）によって，算術的サイクルの交点理論が作られ，「エルミートベクトル束」の算術的 Chern 類が定義され，最終的に算術的リーマン・ロッホの定理が確立された．

詳しくは，例えば，Soulé [55] や 森脇 [46] を参照されたい．

2 Bogomolov 予想を中心に

アーベル多様体上の Bogomolov 予想をまず述べたい．この予想は Ullmo[58] と Zhang[65] によって Arakelov 幾何を用いて証明された，

定理 2 (Ullmo, Zhang). K を代数体，$\overline{K}$ を K の代数閉包とする．A を K 上のアーベル多様体，Y を $A_{\overline{K}} := A \times_{\mathrm{Spec}K} \mathrm{Spec}\overline{K}$ の部分多様体とする．$\widehat{h}_{NT} : A(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ を Néron–Tate 高さとする．このとき，次は同値である．

(1) Y はトーション，すなわち，$Y = B + t$（B は $A_{\overline{K}}$ の部分アーベル多様体で，$t \in A(\overline{K})$ はトーション点）の形をしている．

(2) $\{y \in Y(\overline{K}) \mid y$ はトーション点$\}$ は Y で Zariski 稠密である．

(3) ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$\{y \in Y(\overline{K}) \mid \widehat{h}_{NT}(y) < \varepsilon\}$ は Y で Zariski 稠密である．

注意 3. (1) ならば (2) が成り立つのはすぐに分かる．また，トーション点と，Néron–Tate 高さが 0 の点は一致するので，(2) ならば (3) が成り立つ．従って，定理 2 は実質的には「(3) ならば (1) が成り立つこと」を述べている．なお，「(2) ならば (1) が成り立つこと」は，Manin–Mumford 予想（Raynaud の定理）とよばれる．従って，Bogomolov 予想は Manin–Mumford 予想よりも強いことを述べている．

問題 1 (関数体上の Bogomolov 予想 ***). 上の定理で，代数体 K を $\mathbb{C}$ 上の一変数関数体

に変えた問題を考える.

注意 4. 関数体の Bogomolov 予想（問題 1）については多くの結果が知られているが，まだ完全には解決されていない．K を $\mathbb{C}$ 上の一変数関数体とする．例えば，$\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体 A_0 が存在して，$A = A_0 \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{C}} \mathrm{Spec}K$ になっているときには，すべての $z \in A_0(\mathbb{C})$ について，$\widehat{h}_{NT}(z) = 0$ になるので，関数体の Bogomolov 予想の場合には A や Y に何らかの仮定を置く必要がある．$\dim Y = 1$ のときには，Y/K が non-isotrivial という条件をおくのが一般的である.

(1) $\dim Y = 1$ のときは，森脇（[42], [43], [44] など）によって多くの場合に正しいことが示されている（いくつかの場合は，K が代数体のときも含めて，条件 (3) の ε を具体的に与えている）．最近，Cinkir [17] によって，$\dim Y = 1$ のときは正しいというプレプリントが出た.
(2) Gubler [31] によって，Y が totally degenerate reduction をもつときには正しいことが示されている．Gubler の証明は Berkovich 空間とトロピカル幾何を使う.
(3) 山木 [59] によって，Gubler [31] よりも弱い Y の条件で，関数体の Bogomolov 予想が正しいことが示されている.

定理 2 は，アーベル多様体の 2 倍射に関する部分多様体の性質を述べていると見なせる．アーベル多様体 A と 2 倍射 $[2] : A \to A$ を，より一般に，ある性質（次の定義を参照）をみたす代数多様体 X と射 $f : X \to X$ に変える．Zhang は，この一般の状況で，定理 2 の類似が成り立つだろうという予想を述べている．以下，説明したい.

定義 5 (偏極力学系). K を体，X を K 上の射影代数多様体，$f : X \to X$ を射，L を X 上の豊富な直線束とする．(X, f, L) が K 上の**偏極力学系**（polarized dynamical system）とは，$f^*L \cong L^{\otimes d}$ となる整数 $d \geq 2$ が存在するときにいう.

例 6. (1) A をアーベル多様体，$[2] : A \to A$ を 2 倍射，L を豊富で $[-1]^*L \cong L$ となる直線束とすれば，$(A, [2], L)$ は偏極力学系である．実際，このとき，$[2]^*L \cong L^{\otimes 4}$ となる.
(2) $\mathbb{P}^N$ を射影空間，$f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ を線形写像でない射，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ を超平面に付随する直線束とすれば，$(\mathbb{P}^N, f, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ は偏極力学系である.

A がアーベル多様体のとき，A の部分多様体 Y がトーションであるという条件は，集合として $[2]^m(Y) = [2]^n(Y)$ となる $m > n > 0$ が存在するという条件と同値である．一般に，(X, f, L) が偏極力学系のときに，X の部分多様体 Y が**前周期的** (preperiodic) と

は，集合として $f^m(Y)=f^n(Y)$ となる $m>n>0$ が存在するときにいう．

また，(X,f,L) が代数体 K 上の偏極力学系のときは，Néron-Tate 高さに対応するものとして，標準的高さ $\widehat{h}_f : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ が存在する（[11], [64] 参照）．

Zhang [64] は，定理 2 で，$(A,[2],L)$ を一般の偏極力学系 (X,f,L) に，トーションを前周期的に，ネロン・テイト高さを標準的高さに変え，力学系 Bogomolov 予想をたてた．

問題 2 (Zhang による力学系 Bogomolov 予想 ***). K を代数体，$\overline{K}$ を K の代数閉包とする．(X,f,L) を K 上の偏極力学系，Y を $X_{\overline{K}} := X \times_{\mathrm{Spec}K} \mathrm{Spec}\overline{K}$ の部分多様体とする．$\widehat{h}_f : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ を f に関する標準的高さとする．

(1) このとき，次は同値だろう．
  (i) ある $\varepsilon>0$ が存在して，$\{y \in Y(\overline{K}) \mid \widehat{h}_f(y) < \varepsilon\}$ は Y で Zariski 稠密である．
  (ii) $\{y \in Y(\overline{K}) \mid y$ は f に関する前周期点 $\}$ は Y で Zariski 稠密である．
(2) さらに，(i) にある具体的な条件（詳しくは [61] 参照）を課したものは，次と同値だろう．
  (iii) Y は f に関して前周期的．

注意 7. (1) 最初のバージョン（[64]）には，(2) の具体的な条件がなかった．そのバージョンには反例（Ghioca–Tucker による）があった．
(2) 力学系 Bogomolov 予想は，(X,f,L) が群構造を持つものからきている場合（$\mathbb{G}_m^n$ とアーベル多様体）を除くと，ほとんど確かめられていないと思う．ただし，Mimar [40] によって，次の場合は，力学系 Bogomolov 予想が正しいことが示されている：$X=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1, f=(f_1,f_2), L=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ で，$f_1:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ と $f_2:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ は異なるジュリア集合をもつ．

3 代数・数論力学系では

$f : X \to X$ を体 K 上に定義された代数多様体 X からそれ自身への射とする．代数・数論力学系では，大ざっぱに言って，f の反復合成に関する性質を，より代数的な視点から調べる．また，K として，実数体 $\mathbb{R}$ や複素数体 $\mathbb{C}$ ではなく，代数体や，関数体，非アルキメデス付値体，有限体などを考えることが多い．

このノートに問題として挙げないが，Zhang の概説 [66] には，上で挙げた力学系 Bogomolov 予想の他にも，様々な興味深い予想が挙げられている．また，Fakhruddin [25]

にも様々な興味深い予想が挙げられている.

代数・数論力学系へのアプローチは，大きく2つの方向があるように思われる.

(A) アーベル多様体 A と 2 倍射の組 $(A, [2])$ のもつ数論的性質を，より一般の代数多様体 X と射 $f : X \to X$（より一般に支配的な有理写像 $f : X \dashrightarrow X$）の組 (X, f) に変えて考える.

(B) $\mathbb{C}$ 上の複素力学系のもつ性質を，非アルキメデス付値体上の力学系に変えて考える．さらに，adelic な力学系を考える.

なお，(A) と (B) のどちらであるかはっきりと分けられない結果も多い．例えば，Yuan [60] は，偏極力学系 (X, f, L) の標準的高さの小さい点に関する等分布定理を示した．この結果は，(A) から見れば Szpiro–Ullmo–Zhang [56] のアーベル多様体上の等分布定理の偏極力学系のバージョンと考えられ，(B) から見れば，f から定まる最大エントロピー測度の性質（Briend–Duval [10], Dinh–Sibony [22] など）の数論的なバージョンと考えられる.

とはいえ，やや強引に (A) と (B) に分けて，少し詳しく見ていきたい.

(A) Zhang による力学系 Bogomolov 予想（問題 2）は，(A) の方向の問題と思えるだろう．さて，アーベル多様体上の部分多様体に関する数論的性質の大きな結果に，Faltings による Mordell–Lang 予想の解決がある．力学系 Mordell–Lang 問題というもの（命名は Ghioca, Tucker によると思う）があるので，紹介したい.

A を $\mathbb{C}$ 上に定義されたアーベル多様体とし，V を A の閉部分多様体とする．$\gamma \in A(\mathbb{C})$ をトーションでない点とし，$f : A \to A$ を γ による平行移動とする.

$$I_{f,V}(0) = \{i \in \mathbb{Z}_{>0} \mid f^i(0) = i\gamma \in V(\mathbb{C})\} \subset \mathbb{Z}_{>0}$$

とおく．Γ を γ で生成された A の部分群とする．Faltings の定理の絶対版により，$I_{f,V}(0)$ は無限集合なら，V は A の部分アーベル多様体の γ による平行移動を含む．Denis [20] は，$\mathbb{P}^N$ の射についてこの類似を調べている.

問題 3 (力学系 Mordell–Lang 問題（*印は場合に応じて変わる?），Bell, Ghioca, Tucker $\cdots$). *X を $\mathbb{C}$ 上に定義された代数多様体とし，V を X の閉部分多様体，$f : X \to X$ を射，$P \in X(\mathbb{C})$ とする.*

$$I_{f,V}(P) = \{i \in \mathbb{Z}_{>0} \mid f^i(P) \in V(\mathbb{C})\} \subset \mathbb{Z}_{>0}$$

とおく．このとき，$I_{f,V}(P)$ は i に関する有限個の等差数列と有限集合の和だろう，すなわち，$(k_1,\ell_1),\ldots,(k_p,\ell_p) \in \mathbb{Z}_{>0}\times\mathbb{Z}_{>0}$ と $m_1,\ldots,m_q \in \mathbb{Z}_{>0}$ とが存在して，$I_{f,V}(P)=\bigcup_{j=1}^{p}\{k_jn+\ell_j \mid n\geq 1\}\cup\bigcup_{i=1}^{q}\{m_i\}$ となるだろう．

力学系 Mordell–Lang 問題はいくつかの場合に正しいことが証明されている．例えば，Bell–Ghioca–Tucker [5] は f が非分岐ならば，力学系 Mordell–Lang 問題が正しいことを示した．

また，力学系 Mordell–Lang 問題の 2 つの射に関するバージョンとして，Ghioca–Tucker–Zieve [30, Theorem 1.1] は次の定理を示した．

定理 8 (Ghioca–Tucker–Zieve [30])**.** $f,g\in\mathbb{C}[x]$ を次数 2 以上の多項式とする．$P,Q\in\mathbb{C}$ とする．もし

$$\{f^k(P)\mid k\geq 1\}\cap\{g^k(Q)\mid k\geq 1\}$$

が無限集合ならば，正の整数 m と n が存在して $f^m=g^n$ となる．

力学系 Mordell–Lang 問題では，証明には Skolem–Mahler–Lech の定理（$f(n)$ が標数 0 上の体上の線形漸化式で与えられた数列とするとき，$f(m)=0$ となる m の集合は，m に関する有限個の無限等差数列と有限集合の和である）が使われることが多い．

Skolem–Mahler–Lech の定理は，標数 $p>0$ の体上ではそのままでは成り立たない．しかし，Derksen [19] は，p-nested 集合を用いて，Skolem–Mahler–Lech の定理の標数 $p>0$ の体上での類似（$f(n)$ が標数 0 上の体上の線形漸化式で与えられた数列とするとき，$f(m)=0$ となる m の集合は，有限集合の差を除いて，m に関する有限個の無限等差数列と有限個の初等 p-nested 集合の和である）を与えた．

ここで，$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の部分集合 S が初等 p-nested 集合とは，ある整数 $e\geq 1$ と整数 $d\geq 1$ と有理数 $c_0,\ldots,c_d\in\mathbb{Q}$ で，$(p^e-1)c_i\in\mathbb{Z}$（$i=0,\ldots,d$）かつ $c_0+c_1+\cdots+c_d\in\mathbb{Z}$ かつ $c_i\neq 0$（$i=1,\ldots,d$）をみたすものが存在して，

$$S=\{c_0+c_1p^{k_1e}+\cdots+c_dp^{k_de}\mid k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}\cap\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

と表されるときにいう．

問題 4 (標数 $p>0$ の体上での力学系 Mordell–Lang 問題（*印は場合に応じて変わる？），Bell [4] に非明示的に問題として挙げられている)**.** 問題 3 の状況で，$\mathbb{C}$ を標数 $p>0$ の体に変える．このとき，$I_{f,V}(P)$ は有限集合の差を除いて，m に関する有限個の無限等差数列と有限個の初等 p-nested 集合の和であるか．

注意 9. 標数 0 の体上で正しいと証明されている力学系 Mordell–Lang 問題の状況で，体を標数 $p > 0$ するとどうなるかという問題は考えられるかもしれない．ただし，私が知らないだけで，すでに分かっていることかもしれない．

(B) 非アルキメデス付値体 $\mathbb{C}_v$ 上の力学系については，$\mathbb{P}^1$ のときは多くの結果がある．例えば，Hsia [32], Benedetto [6], [7] や J. Rivera-Letelier [50], [51], [52] などがある．

非アルキメデス付値体の上での力学系を解析的な性質を調べるには，$\mathbb{C}_v$ 上で考えるよりも，Berkovich 空間で考える方が良いと考えられている．

高次元の複素力学系では，pluri-potential 理論が非常に強力に使われている．高次元の非アルキメデス的力学系でも，もし pluri-potential 理論が存在すると，様々なことが導かれると思われている．次の問題は，高次元の非アルキメデス的力学系を考える上で，さまざまな人が大切な問題と思っていると思う（まだ知られていないと思う）．

問題 5 (***). 2 次元以上の Berkovich 空間上で，pluri-potential 理論があるか．

注意 10. 1 次元の Berkovich 空間の potential 理論には Baker–Rumely [3], Thuillier [57] などがある．Chambert-Loir [12] によって，Berkovich 空間 X において，$c_1(\overline{L})$ は定義されていないが，測度 $\bigwedge^{\dim X} c_1(\overline{L})$ は構成されている．

また，漠然としているが，Berkovich 空間とトロピカル曲線（無限辺のある metric グラフ）の関係はそれほど分かっていないように思われる（もっとも，私が知らないだけかもしれない）．先に挙げた，Gubler [31] では，totally degenerate reduction をもつアーベル多様体のときに，Berkovich 空間からトロピカル曲線への写像を考えている．Zhang [62] では有限 metric グラフ上での因子の交点数を，Baker–Norine [2] では有限グラフ上での Riemann–Roch の定理（そのトロピカル曲線版は [38], [26] などを参照）を示している．これらの Berkovich 空間での対応物があるのかは，私はよく知らない．

4 周期点の有限性，無限性

$f : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ を K 上に定義された支配的な有理写像とする．$I(f)$ を f の不定点のなす部分代数的集合とする．K の代数閉包 $\overline{K}$ を固定する．

定義 11. (1) $x \in \mathbb{P}^N(\overline{K})$ が，f に関する**周期点** (periodic) とは，すべての整数 $k \geq 0$ に対して $f^k(x) \notin I(f)$ で，さらに整数 $m \geq 1$ が存在して $f^m(x) = x$ となるときにいう．

(2) $x \in \mathbb{P}^N(\overline{K})$ が，f に関する**前周期点**（preperiodic）とは，すべての整数 $k \geq 0$ に対して $f^k(x) \notin I(f)$ で，さらに整数 $m > n \geq 1$ が存在して $f^m(x) = f^n(x)$ となるときにいう．

L ($\subseteq \overline{K}$) を K の拡大体とする．

$$\mathrm{Per}(f, L) := \{x \in \mathbb{P}^N(L) \mid x \text{ は } f \text{ の周期点 }\},$$
$$\mathrm{PrePer}(f, L) := \{x \in \mathbb{P}^N(L) \mid x \text{ は } f \text{ の前周期点 }\}$$

とおく．

事実 12. K を代数体，L/K を有限次拡大体とする．

(1) f が射のとき，$\mathrm{PrePer}(f, L)$ は有限集合である（[11] 参照）．
(2) f が正則多項式同型のとき，$\mathrm{PrePer}(f, L)$ は有限集合である（[36] 参照）．

問題 6 (**). K を代数体とする．任意の有限次拡大体 L/K に対して，$\mathrm{PrePer}(f, L)$ が有限集合となる f をたくさん見つけよ．

注意 13. (1) 問題 7 が正しいような f のクラス（射と正則多項式同型以外で non-trivial なクラス）を私はよく知らない．

(2) 簡単そうな f でも，$\mathrm{PrePer}(f, \mathbb{Q})$ が有限集合かどうかを確かめるのは，非常に難しい場合がある．例えば，

$$f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x : y : z) \mapsto (x^2 + yz : yz : z^2)$$

という（簡単そうな?）有理写像について，$\mathrm{PrePer}(f, \mathbb{Q})$ が有限集合かは知られていない．実際，$\mathrm{PrePer}(f, \mathbb{Q})$ の有限性は，2 次多項式の有理周期点の一様有界予想（[41] 参照）と同値で，後者はこの分野ではよく知られた未解決の予想である．

(3) パラメーター ε の値を変えると，力学系の性質が変わる族として，

$$f_\varepsilon : \mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{A}^2, \quad (x, y) \mapsto \left(y + 1 - \varepsilon, x\frac{y - \varepsilon}{y + 1}\right)$$

が $\mathbb{C}$ 上では良く調べられている（[1], [21] など）．この族に対して，有理周期点など算術的性質を調べるのは面白いかもしれない（Cantat 氏から言われたことがある）．

事実 14. (1) $\mathbb{Q}$ の拡大体 L ($\subseteq \overline{K}$) で，$[L : \mathbb{Q}] = \infty$ だが，同型でない任意の射 $f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ について，$\mathrm{PrePer}(f, L)$ は有限集合である興味深い例を Dvornicich–Zannier [23], [24] が構成し，Narkiewicz の長い間の問題への解答を与えた．

(2) K が $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体のとき，同型でない任意の射 $f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ について，$\mathrm{PrePer}(f, K)$ は有限集合である（[45] 参照).

問題 7 (*). $\mathbb{C}$ の部分体 L で次の性質をもつ面白いものを見つけよ．

同型でない任意の射 $f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ について，$\mathrm{PrePer}(f, L)$ は有限集合である．

注意 15. L が代数体，$\mathbb{Q}$ 上の有限生成体，あるいは Dvornicich–Zannier が構成した体は上の性質をもつ．$\mathbb{Q}$ 上の有限生成体から始めて，Dvornicich–Zannier が構成したような方法で上の性質をもつ体を作ることはほとんど翻訳していけばできると思うので，それでは面白くないかもしれない．

5 双有理 Arakelov 幾何

$\mathcal{X}$ を射影的算術多様体，$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ を $\mathcal{X}$ 上のエルミート直線束とする．Gillet-Soulé の Arakelov 幾何の理論では，主に，C^∞-エルミート直線束（特に算術的に豊富なもの）を扱うことが多い．双有理 Arakelov 幾何のはっきりとした定義はないと思われるが，双有理 Arakelov 幾何では，C^0-エルミート直線束（特に算術的にネフまたはビッグなもの)，ときには（C^0 とは限らない）特異エルミート直線束も扱う．例えば，Yuan [60], Moriwaki [47], [48], Chen [13], [14] の結果は，この範疇に入ると思われる．

以下では森脇氏から教えてもらった問題を挙げたい．詳しくは，[49] を参照されたい．

$\mathcal{X}$ を正規な射影的算術多様体，$\overline{D} = (D, g)$ を $\mathcal{X}$ 上の C^0-型の算術的 $\mathbb{R}$-因子とする．$\overline{D}$ が pseudo-effective とは，算術的にビッグな C^0-型の任意の $\mathbb{R}$-因子 $\overline{A}$ に対して $\overline{D} + \overline{A}$ もビッグになるときにいう．また，$\varphi_1, \ldots, \varphi_l \in \mathrm{Rat}(\mathcal{X})^\times_{\mathbb{R}}$ が $\overline{D}$ に関して近似的に最小切断の乗法生成系であるとは次の条件をみたすときにいう．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して，$H^0(\mathcal{X}, nD) \neq 0$ である任意の $n \geq n_0$ に対して，$a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$ で，$D + (\varphi_1^{a_1} \cdots \varphi_l^{a_l})_{\mathbb{R}} \geq 0$ かつ

$$\|\varphi_1^{a_1} \cdots \varphi_l^{a_l}\|_{ng,\sup} \leq e^{\varepsilon n} \min\left\{\|\phi\|_{ng,\sup} \mid \phi \in H^0(\mathcal{X}, nD) \setminus \{0\}\right\}$$

となるものが存在する．

問題 8 (森脇*). $\overline{D}$ は *pseudo-effective* ならば，ある $\varphi \in \mathrm{Rat}(\mathcal{X})^\times_{\mathbb{R}}$ が存在して，$\overline{D} + \widehat{(\varphi)}_{\mathbb{R}}$ は *effective* となるか．

問題 9 (森脇*). $D_{\mathbb{Q}}$ がビッグのとき，$\overline{D}$ に関する近似的に最小切断の乗法生成系が存在するか.

注意 16. 研究集会では，高山氏が問題 8, 9 に対して，難しさ（*印）はどうですかと尋ねて，森脇氏は*にしておいてというように返事をした．しかし，私は問題 8, 9 は*印一つではないと思う．

森脇 [49] は，$D_{\mathbb{Q}}$ が数値的に自明であると仮定すると，問題 8 が正しいことを示した．また，問題 9 は，$D_{\mathbb{Q}}$ がビッグのときの問題 8 に関連している．

この他に，双有理 Arakelov 幾何に関連する問題をいくつか挙げたい．次の問題は，基本的に見える．

問題 10 (*印は場合に応じて変わる?). $\mathcal{X}$ を $d+1$ 次元の射影的算術多様体，$\overline{\mathcal{L}}_1, \dots, \overline{\mathcal{L}}_{d+1}$ を $\mathcal{X}$ 上の特異エルミート直線束とする．$\overline{\mathcal{L}}_1, \dots, \overline{\mathcal{L}}_{d+1}$ にどのくらいの仮定をおくと，算術交点数 $\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_1) \cdots \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_{d+1})$ が定義できるか.

注意 17. 例えば，以下の場合には，算術交点数が定義されている．まず，Gillet-Soulé の算術交点理論 [27] により，$\overline{\mathcal{L}}_i$ が C^∞-エルミート直線束のときには，$\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_1) \cdots \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_{d+1})$ が定義される．より一般に Zhang [63] は，$\overline{\mathcal{L}}_i$ が 2 つのネフな C^0-エルミート直線束の差で書ける場合に，$\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_1) \cdots \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_{d+1})$ が定義されることを（Gillet-Soulé の算術交点理論の極限をとることで）示している．Maillot [35] は，多重劣調和かつ C^0-エルミート直線束に対して，より直接的に，算術交点数が定義されることを示している．算術曲面（つまり $d=2$）については，Bost [9] が，$\overline{\mathcal{L}}_i$ が L_1^2 というクラスの特異エルミート直線束の場合に算術交点数を定義し，Lefschetz の定理の算術版を示している．また，Chen [15] は，$\overline{\mathcal{L}}$ がビッグな C^0-エルミート直線束のときに，positive intersection product $\langle \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1} \rangle$ を定義している．次に挙げる問題とも関連するが，Chinburg–Lau–Rumely [16, § 4] には，どのような範囲の $\overline{\mathcal{L}}_i$ に対して，算術交点数 $\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_1) \cdots \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_{d+1})$ が定義されると望ましいかが書かれている．

次の問題も，双有理 Arakelov 幾何と関連しているように思われる．

X を代数体 K 上に定義された非特異な射影代数多様体とし，L を X 上の直線束で，K の各付値 v に対して計量 $\|\cdot\|_v$ が与えられているものとする．このとき，$(L, \{\|\cdot\|_v\}_v)$ を adelically metrized 直線束という．Zhang [63] によって，計量 $\|\cdot\|_v$ が，（大ざっぱに言って）X と L の整数環上のモデルの一様極限として得られる場合（integrable とよばれる）には，adelically metrized 直線束の adelic 交点理論が作られている．

問題 11 (Chinburg–Lau–Rumely（*印は場合に応じて変わる?））. *integrable* とは限らない場合にも，*adelically metrized* 直線束の *adelic* 交点理論を定義する.

注意 18. Soulé [55, Introduction 1.5] には，Arakelov 幾何の adelic 版としての adelic geometry の構成が課題として挙げられている．[16, § 4] には，算術的 capacity 理論の立場から，どのような計量 $\|\cdot\|_v$ の adelically metrized 直線束に対して，adelic 交点理論を定義されると望ましいかが書かれている.

6 射のモジュライ

射のモジュライについてまとめる．詳しくは [54] や以下に挙げる原論文を参照されたい．$d \geq 1, N \geq 1$ とする．k を代数閉体とし，$\varphi = (\Phi_0 : \cdots : \Phi_N) : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ を k 上に定義された（代数）次数が d の射とする．つまり，$\Phi_i \in k[X_0, \ldots, X_N]$ は次数 d の斉次多項式で，$\Phi_0, \ldots, \Phi_N$ の共通零点は $(0, \ldots, 0)$ のみとする．このような射の集合を

$$\mathrm{Mor}_d^N := \{\varphi = (\Phi_0 : \cdots : \Phi_N) : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N \mid \varphi \text{ は射}\}$$

とおく．$M = (N+1)\binom{d+N}{N} - 1$ とおく．Φ_i の係数を一斉に並べることで，

$$\mathrm{Mor}_d^N \hookrightarrow \mathbb{P}^M$$

と射影空間に埋め込める．$\Phi_0, \ldots, \Phi_N$ の終結式を R とおく．R は Φ_i の係数の多項式で，Mor_d^N は $\mathbb{P}^M$ から $R = 0$ で定まる超曲面を除いたものなっている．特に，Mor_d^N は $\mathbb{P}^M$ の Zariski 開集合となり代数多様体の構造が入る.

SL_{N+1} は Mor_d^N に共役で作用する：

$$\varphi^\mu := \mu^{-1} \circ \varphi \circ \mu.$$

この作用は，SL_{N+1} の $\mathbb{P}^M$ への線形作用の Mor_d^N への制限になる．従って，Mumford の GIT が使える状況になっている．SL_{N+1} の $\mathbb{P}^M$ へのこの作用に関して，$(\mathbb{P}^M)^s$ で安定点の集合，$(\mathbb{P}^M)^{ss}$ で半安定点のなす集合を表す．$(\mathbb{P}^M)^s$ と $(\mathbb{P}^M)^{ss}$ の SL_{N+1} による商を，$\overline{M_d^N}^s$ と $\overline{M_d^N}^{ss}$ で表す.

SL_{N+1} の Mor_d^N への共役での作用が力学系で良いものの理由の一つは，$(\varphi^m)^\mu = (\mu^{-1} \circ \varphi \circ \mu)^m$ なので，φ による反復合成に関する性質はたいてい共役の作用で保たれることにある．いくつかの知られている結果をまとめる．詳しくは，それぞれの原論文を参照されたい.

定理 19 (McMullen[37], Milnor[39], Silverman[53], DeMarco[18], Levy[34], ...).

(1) (Levy) $\mathrm{Mor}_d^N \subseteq (\mathbb{P}^M)^s$ である．よって，geometric quotient $M_d^N = \mathrm{Mor}_d^N / SL_{N+1}$ が存在する．$(\mathbb{P}^M)^s$ と $(\mathbb{P}^M)^{ss}$ の SL_{N+1} による商を，$\overline{M_d^N}^s$ と $\overline{M_d^N}^{ss}$ で表す．

(2) 以下 $N = 1$ とする．

(a) (Silverman) d が偶数のときに限り，$(\mathbb{P}^M)^s = (\mathbb{P}^M)^{ss}$ となる．

(b) (Levy) M_d^1 は有理的である．

(c) (Milnor, Silverman) $\varphi \in \mathrm{Mor}_2^1$ とする．φ の 3 つの固定点の multiplier $\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi), \lambda_3(\varphi)$ に対して，$\sigma_1(\varphi) = \lambda_1(\varphi) + \lambda_2(\varphi) + \lambda_3(\varphi)$, $\sigma_2(\varphi) = \lambda_1(\varphi)\lambda_2(\varphi) + \lambda_2(\varphi)\lambda_3(\varphi) + \lambda_3(\varphi)\lambda_1(\varphi)$ とおく．このとき，φ に $(\sigma_1(\varphi), \sigma_2(\varphi))$ を対応させる写像は，同型射 $f = (\sigma_1, \sigma_2) : M_2^1 \to \mathbb{A}^2$ を導く．

(d) (Silverman) 自然な埋め込み $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ について，上の f は同型射 $\overline{M_2^1}^s = \overline{M_2^1}^{ss} \to \mathbb{P}^2$ を導く．

(e) (McMullen) $\varphi \in \mathrm{Mor}_d^1$ とする．(c) で φ の固定点のかわりに，素周期 n の周期点を用いて，同様の写像 $f_n : M_d^1 \to \mathbb{A}^L$ を作ることができる．このとき，n が十分大きくて平方数でなければ，f_n は有限写像である．n が十分大きくて平方数のときは，Lattès の写像（楕円曲線から導かれる写像）が定める M_d^1 の軌跡を除くと，f_n は有限写像である．

(f) (DeMarco) $[\varphi] \in M_d^1$ に $[\varphi^m] \in M_{d^m}^1$ を対応させる射 $M_d^1 \to M_{d^m}^1$ は，$\overline{M_d^1}^{ss} \dashrightarrow \overline{M_{d^m}^1}^{ss}$ へは射として拡張されない（不定集合がある）．$M_{d^m}^1$ のコンパクト化（代数的とは限らない）で，$[\varphi] \mapsto [\varphi^m]$ がそのコンパクト化した上でいたるところ定義されるものを，GIT の方法と最大エントロピー測度の方法で構成できる．

$N \geq 2$ のときの，M_d^N の性質はほとんど知られていないように思われる．調べると面白い問題がいろいろとあるかもしれない．

M_d^N の $\overline{\mathbb{Q}}$ 上での擬距離については，次の問いが考えられる．

問題 12 ([33]（*または**?）). $d, e, \geq 2$ とし，$\varphi_1 \in \mathrm{Mor}_d^N, \varphi_2 \in \mathrm{Mor}_e^N$ が $\overline{\mathbb{Q}}$ 上に定義されているとする．$\widehat{h}_{\varphi_i}$ を標準的高さとし，$\overline{d}([\varphi_1], [\varphi_2]) := \inf_{\mu \in SL_{N+1}(\overline{\mathbb{Q}})} \|\widehat{h}_{\varphi_1} - \widehat{h}_{\varphi_2^\mu}\|_{\sup}$ とおく．このとき，inf をとる μ は存在するか．$\overline{d} : M_d^N \times M_e^N \to \mathbb{R}$ は Northcott 型の有限性の性質をもつか．$\overline{M_d^N}^{ss}, \overline{M_e^N}^{ss}$ に拡張して同じようなことが考えられるか．

問題 13 (*または**?). もっと素朴に，$\overline{h}([\varphi]) := \inf_{\mu \in SL_{N+1}(\overline{\mathbb{Q}})} h(\varphi^\mu)$ とおいて，上のような問題を考えるとどうか．

参考文献

[1] N. Abarenkova, J.-C. Anglès d'Auriac, S. Boukraa, S. Hassani, J-M. Maillard. *From Yang–Baxter equations to dynamical zeta functions for birational transformations*, Statistical Mechanics on the Eve of the 21st century (L. T. Wille and M. Batchelor, eds.), World Scientific, River Edge, NJ, 1999, 436–490.

[2] M. Baker, S. Norine, *Riemann–Roch and Abel–Jacobi theory on a finite graph*, Adv. Math. **215** (2007), 766–788.

[3] M. Baker, R. Rumely, Potential Theory and Dynamics on the Berkovich Projective Line, AMS Mathematical Surveys and Monographs, **159**, 2010.

[4] J. P. Bell, *Skolem–Mahler–Lech theorem for affine varieties*, J. London Math. Soc. **73** (2006), 367–379

[5] J. P. Bell, D. Ghioca, T. J. Tucker. *The dynamical Mordell-Lang problem for etale maps*, Amer. J. Math. **132** (2010), 1655–1675.

[6] R. Benedetto, *Components and periodic points in non-archimedean dynamics*, Proc. London Math. Soc., **84** (2002), 231–256.

[7] R. Benedetto, Examples of wandering domains in p-adic polynomial dynamics, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **355** (2002), 615–620.

[8] V. G. Berkovich, Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-ArchimedeanFields, Math. Surveys Monogr. **33**, Amer. Math. Soc., Providence, 1990.

[9] J.-B. Bost, *Potential theory and Lefschetz theorems for arithmetic surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **32** (1999), 241–312.

[10] J.-Y. Briend, J. Duval, *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de* $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **93** (2001), 145–159. Erratum, No. **109** (2009), 295–296.

[11] G. Call, J. H. Silverman, *Canonical heights on varieties with morphisms*, Compositio Math., **89** (1993), 163–205.

[12] A. Chambert-Loir, *Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich*, J. Reine Angew. Math., **595** (2006) 215–235.

[13] H. Chen, *Convergence des polygones de Harder-Narasimhan*, Mémoires de la Société Mathématique de France, to appear.

[14] H. Chen, *Arithmetic Fujita approximation*, Annales de l'ENS **43** (2010), 555–578.

[15] H. Chen, *Differentialbility of the arithmetic volume function*, preprint, 2010.

[16] T. Chinburg, C. F. Lau, R. Rumely, *Capacity theory and arithmetic intersection theory*, Duke Math. J. **117** (2003), 229–285.

[17] Z. Cinkir, *Zhang's Conjecture and the Effective Bogomolov Conjecture over function fields*, preprint, arXiv:0901.3945.

[18] L. DeMarco, *The moduli space of quadratic rational maps*, J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), 321-

355.

[19] H. Derksen, *A Skolem–Mahler–Lech theorem in positive characteristic and finite automata*, Invent. math. **168** (2007), 175–224.

[20] L. Denis, *Points périodiques des automorphismes affines*, J. Reine Angew. Math., **467** (1995), 157–167.

[21] J. Diller, C. Favre, *Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces*, Amer. J. Math. **123** (2001), 1135–1169.

[22] T.-C. Dinh, N. Sibony, *Dynamique des applications d'allure polynomiale*, J. Math. Pures Appl. **82** (2003), 367–423.

[23] R. Dvornicich, U. Zannier, *Cyclotomic Diophantine problems (Hilbert irreducibility and invariant sets for polynomial maps)*, Duke Math. J. **139** (2007), 527–554.

[24] R. Dvornicich, U. Zannier, On the properties of Northcott and Narkiewicz for fields of algebraic numbers, Functiones et Approximatio **39** (2008), 163–173.

[25] N. Fakhruddin, *Questions on self maps of algebraic varieties*, J. Ramanujan Math. Soc., **18** (2003), 109–122.

[26] A. Gathmann, M. Kerber *A Riemann–Roch theorem in tropical geometry*, Math. Z. **259** (2008), 217–230.

[27] H. Gillet, C. Soulé, *Arithmetic intersection theory*, Publication Math. IHES **72** (1990), 94–174.

[28] H. Gillet, C. Soulé, *Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metrics I, II*, Ann. Math **131** (1990), 163–203 and 205–238.

[29] H. Gillet, C. Soulé, *An arithmetic Riemann–Roch theorem*, Invent. Math. **110** (1992), 473–543.

[30] D. Ghioca, T. J. Tucker, and M. E. Zieve, *Intersections of polynomial orbits, and a dynamical Mordell-Lang conjecture*, Invent. Math. **171** (2008), 463–483.

[31] W. Gubler, *The Bogomolov conjecture for totally degenerate abelian varieties*, Invent. Math. **169** (2007), no. 2, 377–400.

[32] L. C. Hsia, *Closure of Periodic Points Over a Non-Archimedean Field*, J. London Math. Soc., **62** (2000), 685–700.

[33] S. Kawaguchi, J. H. Silverman, *Canonical heights and the arithmetic complexity of morphisms on projective space*, Pure Appl. Math. Q. **5** (Special Issue: In honor of John Tate) (2009), 1201–1217.

[34] A. Levy, *The space of morphisms on projective space*, preprint, arXiv:0903.1318.

[35] V. Maillot, *Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) **80**, Soc. Math. France, Marseille, 2000.

[36] S. Marcello, *Sur la dynamique arithmétique des automorphismes de l'espace affine*, Bull. Soc. Math. France, **131** (2003), 229–257.

[37] C. T. McMullen, *Families of rational maps and iterative root-?nding algorithms*, Ann. of Math. (2), **125** (1987), 467–493.

[38] G. Mikhalkin, I. Zharkov, *Tropical curves, their Jacobians and Theta functions*, Curves and abelian varieties, 203–230, Contemp. Math. **465**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[39] J. Milnor, *Geometry and dynamics of quadratic rational maps*, Experiment. Math. **2** (1993), 37–83. With an appendix by the author and Lei Tan.

[40] A. Mimar, *On the preperiodic points of an endomorphism of* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *which lie on a curve*, Ph. D thesis, Columbia University ,1995.

[41] P. Morton, J. H. Silverman, *Rational periodic points of rational functions*, Intern. Math. Res. Notices **2** (1994), 97–110.

[42] A. Moriwaki, *Lower bound of self-intersection of dualizing sheaves on arithmetic surfaces with reducible fibres*, Math. Ann. **305** (1996), no. 1, 183–190.

[43] A. Moriwaki, *Bogomolov conjecture for curves of genus 22 over function fields*, J. Math. Kyoto Univ. **36** (1996), no. 4, 687–695.

[44] A. Moriwaki, *Bogomolov conjecture over function fields for stable curves with only irreducible fibers*, Compositio Math. **105** (1997), no. 2, 125–140.

[45] A. Moriwaki, *Arithmetic height functions over finitely generated fields*, Invent. Math. **140** (2000), 101–142.

[46] 森脇 淳, アラケロフ幾何, 岩波数学叢書, 2008.

[47] A. Moriwaki, *Continuity of volumes on arithmetic varieties*, Journal of Algebraic Geometry **18** (2009), 407–457.

[48] A. Moriwaki, *Zariski decompositions on arithmetic surfaces*, preprint, arXiv:0911.2951.

[49] A. Moriwaki, *Toward Dirichlet's unit theorem on arithmetic varieties*, preprint, arXiv:1010.1599.

[50] J. Rivera-Letelier, Dynamique des fonctions rationelles sur des corps locaux, *Astérisque*, **287** 147–230, 2003.

[51] J. Rivera-Letelier, *Espace hyperbolique p-adique et dynamique des fonctions rationnelles*, Compositio Math., **138** (2003), 199–231.

[52] J. Rivera-Letelier, *Points périodiques des fonctions rationnelles dans l'espace hyperbolique p-adique*, Comment. Math. Helv., **80** (2005), 593–629.

[53] J. H. Silverman, *The space of rational maps on* $\mathbb{P}^1$, Duke Math. J. **94** (1998), 41–77.

[54] J. H. Silverman, The Arithmetic of Dynamical Systems, GTM **241**, Springer, New York, 2007.

[55] C. Soulé, Lectures on Arakelov geometry, with the collaboration of D. Abramovich, J.-F. Burnol and J. Kramer, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1992.

[56] L. Szpiro, E. Ullmo, and S. Zhang, *Équirépartition des petits points*, Invent. Math. **127** (1997), 337–347.

[57] A. Thuillier, *Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov* (2005), Thèse de doctorat, université de Rennes 1.

[58] E. Ullmo, *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes*, Ann. Math., **147** (1998) 167–179.

[59] K. Yamaki, *Geometric Bogomolov conjecture for abelian varieties and some results for those only with non-total degeneration*, preprint, 2010.

[60] X. Yuan, *Big line bundles over arithmetic varieties*, Invent. Math. **173** (2008), 603–649.

[61] X. Yuan, S-W. Zhang, *Calabi theorem and algebraic dynamics*, preprint downloadable at www.math.columbia.edu/~szhang.

[62] S-W. Zhang, *Addmissible paring on a curve*, Invent. Math. **112** (1993), 171–193.

[63] S-W. Zhang, *Positive Line Bundles on Arithmetic Varieties*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 187–

221.

[64] S-W. Zhang, *Small points and adelic metrics*, Journal of Algebraic Geometry, **4** (1995), 281–300.

[65] S-W. Zhang, *Equidistribution of small points on abelian varieties*, Ann. Math. **147** (1998) 159–165.

[66] S-W. Zhang, *Distributions in algebraic dynamics*, in Surveys in Differential Geometry, Vol. **X**, 381–430 (2006).