数理解析研究所講究録
第1732巻 2011年 28-31

同変実射影空間上の標準直線束について

岡山大学大学院自然科学研究科　祁 艶 (Yan, Qi)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

1. 序節

この論文では G は有限群とする. (有限次元の) 実 G-加群 V に対して, $S(V)$ は V の G-不変な内積に関する単位球面を表し, $P(V)$ は同変実射影空間 $S(V)/\{\pm 1\}$ を表す. G-空間 M と実 G-加群 V に対して $\varepsilon_M(V)$ は底空間を M, 全空間を $M\times V$ とする直積束と呼ばれる同変ベクトル束を表す. $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{C}^m$ はそれぞれ自明な G-作用を持つ n-次元ユークリッド空間 (実 G-加群) と m 次元複素ベクトル空間 (複素 G-加群) を表す. $M=P(V)$ のとき, γ_M は M 上の同変標準直線束を表す ([2, § 2] 参照).

以下の定理が成り立つ.

定理 1. G は偶数位数 $2n$ の巡回群で, V は原点以外で自由な G-作用を持つ $2m$-次元実 G-加群 $(m\geq 1)$, $M=P(\mathbb{R}\oplus V)$ のとき, 任意の $k\in\mathbb{N}$ と任意の G-加群 U, W に対して, $\gamma_M^{\oplus k}\oplus\varepsilon_M(U)$ と $\varepsilon_M(W)$ は G-同型ではない.

証明の詳細は論文 [3] を参照されたい.

定理 2. G は奇数位数の巡回群で, V と M は定理 1 と同じ条件を満たすものとする. このとき, 複素 G-ベクトル束 $\gamma_M^{\oplus 2^{m+1}}\otimes\mathbb{C}$ は G-ベクトル束 $\varepsilon_M(\mathbb{C}^{2^{m+1}})$ と G-同型である.

群作用のない場合の結果は [5, p. 252, 定理 6.17] を参照されたい.

2. 定理2の証明

この節で定理2を m に関する帰納法で証明する.

定理2における V を1-次元複素 G-加群 W_i $(i=1,\ldots,m)$ の直和の実化として表そう. $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_m$ であり, 各 W_i は原点以外で自由な G-作用を持つ. また, $S_i=S(\mathbb{R}\oplus W_1\oplus\cdots\oplus W_i)$, $P_i=S_i/\{\pm 1\}$ とおく.

$m=1$ のとき, $M=P(\mathbb{R}\oplus W_1)=P_1$ となる. 論文 [4] により,

$$\gamma_{P_1}^{\oplus 2^{1+1}}=\gamma_{P_1}^{\oplus 4}\cong_G \varepsilon_{P_1}(\mathbb{R}^4).$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}\gamma_{P_1}^{\oplus 2^{1+1}}\otimes\mathbb{C} &\cong_G \varepsilon_{P_1}(\mathbb{R}^4)\otimes\mathbb{C}\\ &\cong_G \varepsilon_{P_1}(\mathbb{R}^4\otimes\mathbb{C})\\ &\cong_G \varepsilon_{P_1}(\mathbb{C}^{2^{1+1}}).\end{aligned}$$

従って $m=1$ のとき, 定理2が成り立つ.

次に, $m=k$ のとき (底空間は P_k である) $\gamma_{P_k}^{\oplus 2^{k+1}}\otimes\mathbb{C}\cong_G \varepsilon_{P_k}(\mathbb{C}^{2^{k+1}})$ と仮定し, $m=k+1$ のときを考える. $U=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ とおくと, 底空間は $P_{k+1}=S(\mathbb{R}\oplus U\oplus W_{k+1})/\{\pm 1\}$ と表される. ここで

$$Y=(S(\mathbb{R}\oplus U)\times D(W_{k+1})/\{\pm 1\}, Z=(D(\mathbb{R}\oplus U)\times S(W_{k+1})/\{\pm 1\}$$

とおく. 明らかに Y は $S(\mathbb{R}\oplus U)/\{\pm 1\}=P_k$ と G-ホモトピックで, Z は $S(W_{k+1})/\{\pm 1\}$ と G-ホモトピックである. $m=k$ のときの仮定から,

$$(\gamma_{P_{k+1}}^{\oplus 2^{k+1}}\otimes\mathbb{C})|_Y\cong_G \varepsilon_Y(\mathbb{C}^{2^{k+1}}).$$

また, 論文 [4] により, $(\gamma_{P_1}^{\oplus 2})|_Z\cong_G \varepsilon_Z(\mathbb{R}^2)$ であるから,

$$\begin{aligned}(\gamma_{P_1}^{\oplus 2}\otimes\mathbb{C})|Z &\cong_G \varepsilon_Z(\mathbb{R}^2)\otimes\mathbb{C}\\ &\cong_G \varepsilon_Z(\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{C})\\ &\cong_G \varepsilon_Z(\mathbb{C}^2).\end{aligned}$$

従って,

$$(\gamma_{P_{k+1}}^{\oplus 2^{k+1}}\otimes\mathbb{C})|Z\cong_G \varepsilon_Z(\mathbb{C}^{2^{k+1}}).$$

$\gamma_{P_{k+1}\mathbb{C}}=\gamma_{P_{k+1}}\otimes\mathbb{C}$ とおき, $(e_1,\ldots,e_{2^{k+1}})$ と $(f_1,\ldots,f_{2^{k+1}})$ をそれぞれ $(\gamma_{P_{k+1}\mathbb{C}}|_Y)^{\oplus 2^{k+1}}$ 上と $(\gamma_{P_{k+1}\mathbb{C}}|_Z)^{\oplus 2^{k+1}}$ 上の標準ユニタリーフレミングとする. この時, $Y\cap Z$ からユニタリー群 $U(2^{k+1})$ への G-同変な行列関数 $A=[a_{ij}]$ が次のようにして定められる.

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{2^{k+1}}a_{ji}(x)e_j(x)\quad (x\in Y\cap Z, i=1,\ldots,2^{k+1}).$$

もし, G-写像 A が Z 上に拡張することができるならば, $\gamma_{P_{k+1}\mathbb{C}}^{\oplus 2^{k+1}}$ は自明な複素 G-ベクトル束になる. 以下の (1)–(3) が容易に確かめられる.

(1) $Y\cap Z$ は Z の境界 ∂Z と等しい.

(2) A は不変である (ユニタリー群上の G-作用を自明とする).

(3) Z から $U(2^{k+1})$ への G-写像は Z/G から $U(2^{k+1})$ への写像と一対一対応する. よって, $\partial Z/G$ から $U(2^{k+1})$ への写像 A' ($A'([x]) = A(x)$ $(x \in \partial Z)$) が Z/G に拡張できるかどうかが鍵となる. さらに, アイレンバーグの定理 (詳細は [1] の第 4 章に記述してある) により, もし, $n+1 \leq \dim P_{k+1} = 2(k+1)$ となるような任意の自然数 n に対して, $H^{n+1}(Z/G, \partial Z/G; \pi_n(U(2^{k+1})))$ に含まれている A' の障害類 a' が 0 となるならば, 写像 A' は Z/G に拡張する.

対応 $(r, u, w) \to (r, u \otimes w, w)$ で定義される写像

$$f : D(\mathbb{R} \oplus U) \times S(W_{k+1}) \to D(\mathbb{R}) \times D(U \otimes W_{k+1}) \times S(W_{k+1})$$

を考察してみよう. 明らかに f は同相写像で, $D(U \otimes W_{k+1})$ 上の $\{\pm 1\}$ 作用は自明である. 従って

$$\begin{aligned} Z/G &= \frac{D(\mathbb{R} \oplus U) \times S(W_{k+1})}{\{\pm 1\} \times G} \\ &= \frac{D(\mathbb{R}) \times D(U \otimes W_{k+1}) \times S(W_{k+1})}{\{\pm 1\} \times G} \\ &= \frac{\frac{D(\mathbb{R}) \times S(W_{k+1})}{\{\pm 1\}} \times \frac{D(U \otimes W_{k+1})}{\{\pm 1\}}}{G} \\ &= \frac{M \times D(U \otimes W_{k+1})}{G} \end{aligned}$$

である. ここで, M はメビウスの帯を表す. また $\dfrac{M \times D(U \otimes W_{k+1})}{G}$ は底空間が M/G で, ファイバーが $D(U \otimes W_{k+1})$ である k-次元複素ベクトル束の全空間, 従って向き付け可能な $2k$-次元実ベクトル束の全空間とみなすことができる. 更に, G は奇数位数の巡回群なので, M/G もまたメビウスの帯 M' である. Thom の同型定理より,

$$\begin{aligned} &H^{n+1}(Z/G, \partial Z/G; \pi_n(U(2^{k+1}))) \\ &= H^{n+1}\left(\frac{M \times D(U \otimes W_{k+1})}{G}, \frac{\partial(M \times D(U \otimes W_{k+1}))}{G}; \pi_n(U(2^{k+1}))\right) \\ &= H^{n+1-2k}(M', \partial M'; \pi_n(U(2^{k+1}))). \end{aligned}$$

また, 次の事実がよく知られている ([6, p. 207, p. 211] を参照されたい). もし, $n < 2(2^{k+1}+1) - 2 = 2^{k+2}$ ならば,

$$\pi_n(U(2^{k+1})) = \pi_n(U) = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数}) \\ \mathbb{Z} & (n \text{ は奇数}). \end{cases}$$

明らかに $n+1 \leq \dim P_{k+1} = 2(k+1)$ なので, $n \leq 2k+1 < 2^{k+2}$ となる. ゆえに,

$$H^{n+1}(Z/G, \partial Z/G; \pi_n(U(2^{k+1}))) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (n+1-2k = 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を得る．写像 A' が拡張できるかどうかは判断できないので次の工夫をする．次のように定義される写像 $A'^2 : \partial Z/G \to U(2^{(k+1)+1})$,

$$A'^2([x]) = \begin{pmatrix} A'([x]) & 0 \\ 0 & A'([x]) \end{pmatrix} \quad ([x] \in \partial Z/G)$$

を考える．A' の障害類を a' としよう．このとき $2a'$ は A'^2 の障害類であり，それは $H^{n+1}(Z/G, \partial Z/G; \pi_n(U(2^{(k+1)+1})))$ の元なので，上の結果により，$2a' = 0$ である．従って，A'^2 は Z/G 上に拡張する．つまり，$\gamma_{P_{k+1}}\mathbb{C}^{\oplus 2^{(k+1)+1}} \cong_G \varepsilon_{P_{k+1}}(\mathbb{C}^{2^{(k+1)+1}})$ である．

REFERENCES

[1] Sze-Tsen Hu, *Homotopy Theory*, Pure and Applied Mathematics VIII, Academic Press, New York and London, 1959.
[2] John W. Milnor and James D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies No.76, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974.
[3] Yan Qi, The tangent bundles over equivariant real projective spaces, accepted by Mathematical Journal of Okayama University, Okayama Japan.
[4] 祁 艶, 同変実射影空間上の同変実ベクトル束について, RIMS Kokyuroku No.1670, 117-125, 2009.
[5] 戸田 宏, 三村 護, ホモトピー論, 紀伊國屋書店, 東京都新宿区, 1975.
[6] 戸田 宏, 三村 護, リー群の位相 (上), 紀伊國屋書店, 東京都新宿区, 1978.

E-mail address: `qiyan@math.okayama-u.ac.jp`