数理解析研究所講究録
第 1732 巻 2011 年 101-106

SMITH SET FOR A SIMPLE GROUP

九州大学大学院芸術工学研究院　角　俊雄 (Toshio Sumi)
Faculty of Design
Kyushu University

1. 序

スミス問題は，ホモトピー球面上のなめらかな有限群作用で，丁度２個の固定点集合をもつとき，その固定点上の接空間は，表現として同値であるかという問題である ([Smi60]). 多くの有限群に対し，表現として同値でない，接空間をもつホモトピー球面上の作用があることが知られている．Petrie ([Pet79, PR85]) によって，４つ以上の巡回群ではないシロー群をもつ奇素数位数の可換群に対して，はじめて存在が示された．$\mathbb{Z}/4n$ でも存在するという Chappell-Shaneson ([CS82]) の結果には驚く．その理由に，Sanchez ([San76]) の結果から，任意の奇素数 p に対し，シロー p-部分群に制限すると，２つの接表現は同型でなければならないからである．つまり，２べき位数の群への制限のみが同型でない可能性があるわけである．

さて，スミス集合 $Sm(G)$ を定義しよう．丁度２個の固定点集合 $\{x, y\}$ をもつ球面 Σ 上のなめらかな G-作用で，２つの接表現 $T_x(\Sigma)$, $T_y(\Sigma)$ の差から定まる実表現環の元 $[T_x(\Sigma)] - [T_y(\Sigma)]$ たちのなす集合を $Sm(G)$ とする．特に，自明でない有限群 G に対して，$\mathbb{R}$ でない既約表現 ξ をとり，G-不変な内積をいれ，ノルム 1 以下の集合 $D(\xi)$ を２つ境界で貼りあわせてできる球面は，２つの固定点をもち，ともに接表現は，ξ に同型である．よって，$0 = [\xi] - [\xi] \in Sm(G)$ である．スミス問題は，$Sm(G) = \{0\}$ かどうかということであるが，Pawałowski-Solomon ([PS02]) の結果以降，多くの有限群に対し決定されてきた．スミス集合の部分集合である $CSm(G)$（定義は後述）に対しては，Laitinen-Pawałowski ([LP99]) によって決定されている．このノートの目的は，単純群 G に対するスミス集合 $Sm(G)$ が決定できるかを調べることである．

2. 有限巡回群

有限巡回群に対するスミス問題について述べる．位数 k の巡回群を C_k と表す．Atiyah-Bott ([AB66]) により，$Sm(C_p) = \{0\}$ (p 素数）がまず示された．その後，Sanchez ([San76]) により，$Sm(C_{p^a}) = \{0\}$ (p 奇素数）が示された．その一方，Chappell-Shaneson ([CS82]) により，$Sm(C_{4k}) \neq \{0\}$ （$k \geq 2$）が示された．奇数位数の巡回群 G についても、$Sm(G) \neq \{0\}$ なるものが存在することが知られている ([DP85])．また，初等的な表現論によって，$Sm(C_4) = \{0\}$ がわかる．２つの相異なる素数の積である位数をもつ巡回群ではどうであろうか．Morimoto ([Mor08]) により，$Sm(\mathbb{Z}/2k) \subset RO(\mathbb{Z}/k)$ がわかる．自然な射影 $\pi\colon \mathbb{Z}/2k \to \mathbb{Z}/k$ に対し，

$$Sm(\mathbb{Z}/2k) \supset \pi^* Sm(\mathbb{Z}/k) \cong Sm(\mathbb{Z}/k)$$

が成り立つが，これ以上のことは（筆者の知る限りでは）知られていない．

2000 *Mathematics Subject Classification.* 57S17, 20C15.
Key words and phrases. real representation, Smith problem, Perfect groups.

3. ある特別な作用

Petrie ([Pet83]) の記号を用いる．2つの表現空間 U, V に対して，U, V が Smith 同値，すなわち，丁度2個の固定点集合をもつ球面上の作用で，各接表現が U, V と同型であるとき，$U \sim V$ と表す．$Sm(G) = \{[U] - [V] \in RO(G) \mid U \sim V\}$ である．20 世紀の Smith 同値の研究には，[DW89], [MP85], [DS92], [LP99] があり，21 世紀に入り，[PS02], [Mor07], [Xia07], [Sum07], [MQ08], [Sum08], [MQ09], [Sum09], [Mor10] と研究が進んでいる．

U, V が s-Smith 同値であるとは，丁度2個の固定点集合をもつ球面 Σ 上の作用で，各接表現が U, V と同型であり，かつ，任意の G の部分群 K に対し，Σ^K がホモトピー球面であるときにいう．そのとき，$U \approx V$ と表す．$sSm(G) = \{[U] - [V] \in RO(G) \mid U \approx V\}$ と定める．Sanchez ([San76]) により，G の位数が奇数であれば，$sSm(G) = \{0\}$ である．さらに，これから，$sSm(G) \neq \{0\}$ ならば，G の位数は 4 で割り切れなければならないと Petrie ([Pet83]) は指摘している．Pawałowski-Solomon ([PS02]) によって，奇数位数のオリバー群 G に関して，$Sm(G) \neq \{0\}$ が示されているため，s-Smith equivalence は非常に強い条件と思われるが，$sSm(G) = \{0\}$ とは限らない．s-Smith equivalence に関しては，[Pet83], [Dov84], [PR85], [Cho85], [DP85], [CS85], [Suh85], [Cho88] などの研究がある．

4. $CSm(G) = Sm(G)$ をみたす有限群

まず，$RO(G)$ の可換群としての部分群を定義する．$RO(G)$ の部分集合 $\mathcal{A}$ と，G の部分群の集合　$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ に対して，

- $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_1} = \bigcap_{P \in \mathcal{F}_1} \ker(\mathrm{Res}^G_P : RO(G) \to RO(P)) \cap \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}^{\mathcal{F}_2} = \bigcap_{L \in \mathcal{F}_2} \ker(\mathrm{Fix}^L : RO(G) \to RO(N_G(L)/L)) \cap \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}^{\mathcal{F}_2}_{\mathcal{F}_1} = \mathcal{A}_{\mathcal{F}_1} \cap \mathcal{A}^{\mathcal{F}_2} = \bigcap_{P \in \mathcal{F}_1} \ker \mathrm{Res}^G_P \cap \bigcap_{L \in \mathcal{F}_2} \ker \mathrm{Fix}^L \cap \mathcal{A}$

とおく．$\mathcal{P}(G)$ を、素数ベキ位数である G の部分群全体のなす集合とする．

Bredon ([Bre69]) の結果により，有限群 C_{2^a}-作用において，球面の次元が，群の位数 2^a に比べ，十分に大であれば，2つの接表現は同型になる．よって，$Sm(C_{2^a})$ は一般に可換群にならず，$a \geq 3$ ならば有限集合である．よって，群によっては，$U \sim V$ であっても，$U \oplus W \sim V \oplus W$ であるとは限らない．Cappell-Shaneson ([CS82]) の結果から，

$$Sm(G \times C_8)_{\mathcal{P}(G \times C_8)} \neq Sm(G \times C_8)$$

が成り立つ．$\mathcal{P}_o(G)$ を，位数 1,2,3,4, 及び，奇数ベキである G の部分群のなす集合とすると，

$$Sm(G)_{\mathcal{P}_o(G)} = Sm(G) \subset RO(G)_{\mathcal{P}_o(G)}$$

が成り立つ．$CSm(G)$ を，

- $\Sigma^G = \{x, y\}$
- 任意の素数べき位数の部分群 P に対し，Σ^P は連結である

を満たす球面 Σ 上のなめらかな G-作用で，2つの接表現の差から定まる実表現環の元全体のなす集合を $CSm(G)$ とする．G が素数べき位数でなければ，$0 \in CSm(G)$ であるが，素数べき位数のとき $CSm(G)$ は空集合である．

$$CSm(G) \subset RO(G)_{\mathcal{P}(G)}$$

がなりたつ．

$Sm(G) = CSm(G)$ となる場合を，完全群を中心に考察する．

$(g) \cup (g^{-1})$ を $g \in G$ の実共役類とよび，素数べき位数でない元で代表される実共役類の個数を a_G で表す．$a_G = \operatorname{rank} RO(G)_{\mathcal{P}(G)}$ が成り立つ．

Theorem 4.1 ([LP99]). 次が成立する．

- $a_G \leq 1$ ならば $CSm(G) = \{0\}$.
- 完全群 G に対し，$a_G \geq 2 \Longleftrightarrow CSm(G) \neq \{0\}$.

次は容易に分かる．

Proposition 4.2. $Sm(G) = CSm(G)$ ならば，$Sm(G)_{\mathcal{P}(G)} = Sm(G)$ である．

$CSm(G)$ と $Sm(G)$ の違いは，群 G の位数２ベキの元の存在の状況に依存するように思われる．Pawałowski-Sumi ([PS09]) によって，$Sm(G) = CSm(G)$ となる十分条件が与えられている．i_G を次で定義する．$g \in G$ に対し，

$$i_G(g) := \#\{V \in \operatorname{Irr}(G) \mid \dim V^g = 0\}$$

とおき，

$$i_G := \max(\{i_G(g) \mid |g| = 2^k,\ k \geq 3\} \cup \{0\})$$

と定義する．

Theorem 4.3 ([PS09]). $i_G \leq 1$ ならば $Sm(G) = Sm(G)_{\mathcal{P}(G)}$ が成立する．

オリバー群とは，ディスク上の固定点なしの作用をもつ群のことであり，代数的には，P, G/H は素数べき位数で，H/P は巡回群となるような $P \triangleleft H \triangleleft G$ は存在しないことと同値である ([Oli96]).

上記定理から，次の系が直ちに従う．

Corollary 4.4. $i_G \leq 1$ を満たす，オリバー群 G に対して，次は同値である．

- $a_G \leq 1$
- $CSm(G) = \{0\}$
- $Sm(G) = \{0\}$

4.1. **Simple groups.** 単純群 G は，$\{1\}$, G 以外正規部分群をもたない群のことである．単純群は，以下のクラスに分けられる．

(1) 素数位数の群
(2) 古典リー群から得られる群 A_n, $PSL(n,q)$, $PSU(n,q)$ など
(3) 散在単純群

これらの各クラスについて，わかっていることを記す．

(1) 素数位数の有限群は巡回群であり，$Sm(C_p) = \{0\}$ である ([AB66]).

(2) 古典リー群から得られる群:

Theorem 4.5 (cf. [PS09]). すべての位数２ベキの元 g に対し，$g\langle g\rangle \subset (g)^{\pm}$ が成り立つならば，$i_G = 0$ である．

よって，$i_{A_n} = 0$ であるから，Theorem 4.3 より次がいえる．

Theorem 4.6. $CSm(A_n) = Sm(A_n) = RO(A_n)^{\{A_n\}}_{\mathcal{P}(A_n)}$

その他の古典リー群から得られる群に関しては，すべてを調べつくせていないが，以下の群について，指標を用いて ([Ada02], [SF73]), $CSm(G) = Sm(G)$ が成り立つことがわかる．

- Ree 群 $Ree(3^{2n+1})$
- 鈴木群 $Sz(2^{2n+1})$
- $PSL(2,q)$
- $PSL(3,q)$
- $PSU(3,q^2)$

(3) 散在単純群については，M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24} J_1, J_2, J_3, J_4, Co_3, Co_2, Co_1, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, Suz, HS, M^cL, He, HN, Th, $O'N$, Ly, Ru, B, M と表されることが多く，26 個存在する．すべての散在単純群について，$CSm(G) = Sm(G)$ が成り立つ．

その他，位数 10000 以下の完全群（極めて少ないが）について調べてみた．それらでは，以下が成り立っていた．

$$Z(G) = \{1\} \Longleftrightarrow i_G = 0$$

4.2. **Automorphism groups of simple groups.** 単純群の自己同型群に対し，幾つか調べてみた．

Theorem 4.7. $CSm(S_n) = Sm(S_n) = RO(S_n)^{\{A_n\}}_{\mathcal{P}(S_n)}$ で，これは，ランク

$$\begin{cases} 0, & n = 2,3,4,5 \\ 1, & n = 6 \\ a_{S_n} - 2\ (\geq 3), & n \geq 7 \end{cases}$$

の自由アーベル群である．

Theorem 4.8 ([Sum09]). $CSm(PGL(2,q)) = Sm(PGL(2,q)) = RO(PGL(2,q))^{\{PSL(2,q)\}}_{\mathcal{P}(PGL(2,q))}$

$G = PGL(3,q)$ についても，$CSm(G) = Sm(G)$ が成り立ち，Morimoto-Qi ([MQ09]) の結果を用いると，

$$Sm(G) = RO(G)^{\{G\}}_{\mathcal{P}(G)}$$

が成り立つ．

Atlas ([CCN+85]) の記号を用いる．有限群 K，自然数 m, n に対し，$m.K$ を

$$1 \to C_m \to m.K \to K \to 1$$

なる拡大で与え，$m.K.n$ を

$$1 \to m.K \to m.K.n \to C_n \to 1$$

なる拡大で与える．

Theorem 4.9. 以下の有限群 L に対して，$L \geq G \geq L^{\mathrm{nil}}$ なる有限群 G は $CSm(G) = Sm(G)$ を満たす．

$3.McL.2$, $3.J_3.2$, $3.Fi'_{24}.2$, $3.O'N.2$, $2.M_{12}$, $M_{12}.2$, $2.J_2$, $J_2.2$,
$2.HS$, $HS.2$, $2.Ru$, $2.Co_1$, $6.Fi_{22}.2$, $3.Suz.2$, $6.M_{22}.2$, $He.2$, $HN.2$

中心拡大では，$i_G > 1$ となることが多かった．また，$GL(n,q)$ ([Ste51], [Gre55]) を調べてみても，中心の存在が影響を与えるように思える．以上の考察から，$Z(G) = \{1\}$ である完全群 G に対し，$i_G = 0$ が成立すると期待されるが，$i_G > 1$ の場合に，Bredon ([Bre69]) の結果と同様なことが成立するであろうか．

References

[AB66] M. F. Atiyah and R. Bott, *A Lefschetz fixed point formula for elliptic differential operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 245–250.

[Ada02] Jeffrey Adams, *Character table of* $PSL(2, \mathbb{F}_q)$, http://www-users.math.umd.edu/ jda/characters/, 2002.

[Bre69] Glen E. Bredon, *Representations at fixed points of smooth actions of compact groups.*, Ann. of Math. (2) **89** (1969), 515–532.

[CCN+85] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, and R. A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford University Press, Eynsham, 1985, Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups, With computational assistance from J. G. Thackray.

[Cho85] Eung Chun Cho, *Smith equivalent representations of generalized quaternion groups*, Group actions on manifolds (Boulder, Colo., 1983), Contemp. Math., vol. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985, pp. 317–322.

[Cho88] ______, *s-Smith equivalent representations of dihedral groups*, Pacific J. Math. **135** (1988), no. 1, 17–28.

[CS82] Sylvain E. Cappell and Julius L. Shaneson, *Fixed points of periodic differentiable maps*, Invent. Math. **68** (1982), no. 1, 1–19.

[CS85] Eung Chun Cho and Dong Youp Suh, *Induction in equivariant K-theory and s-Smith equivalence of representations*, Group actions on manifolds (Boulder, Colo., 1983), Contemp. Math., vol. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985, pp. 311–315.

[Dov84] Karl Heinz Dovermann, *Even-dimensional s-Smith equivalent representations*, Algebraic topology, Aarhus 1982 (Aarhus, 1982), Lecture Notes in Math., vol. 1051, Springer, Berlin, 1984, pp. 587–602.

[DP85] Karl Heinz Dovermann and Ted Petrie, *Smith equivalence of representations for odd order cyclic groups*, Topology **24** (1985), no. 3, 283–305.

[DS92] Karl Heinz Dovermann and Dong Youp Suh, *Smith equivalence for finite abelian groups*, Pacific J. Math. **152** (1992), no. 1, 41–78.

[DW89] Karl Heinz Dovermann and Lawrence C. Washington, *Relations between cyclotomic units and Smith equivalence of representations*, Topology **28** (1989), no. 1, 81–89.

[Gre55] J. A. Green, *The characters of the finite general linear groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 402–447.

[JL93] G. James and M. Liebeck, *Representations and characters of groups*, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[LP99] Erkki Laitinen and Krzysztof Pawałowski, *Smith equivalence of representations for finite perfect groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), no. 1, 297–307.

[Mor07] Masaharu Morimoto, *Construction of smooth actions on spheres for Smith equivalent representations*, RIMS Kōkyūroku **1569** (2007), 52–58, The theory of transformation groups and its applications (Kyoto, 2007).

[Mor08] ______, *Smith equivalent* $\mathrm{Aut}(A_6)$*-representations are isomorphic*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 10, 3683–3688.

[Mor10] ______, *Nontrivial* $\mathcal{P}(G)$*-matched* $\mathcal{S}$*-related pairs for finite gap Oliver groups*, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), no. 2, 623–647.

[MP85] Mikiya Masuda and Ted Petrie, *Lectures on transformation groups and Smith equivalence*, Group actions on manifolds (Boulder, Colo., 1983), Contemp. Math., vol. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985, pp. 191–242.

[MQ08] Masaharu Morimoto and Yan Qi, *Tangential representations at fixed points*, RIMS Kōkyūroku **1612** (2008), 41–49, Geometry of Transformation Groups and Related Topics (Kyoto, 2008).

[MQ09] ______, *Study of the Smith sets of gap Oliver groups*, RIMS Kōkyūroku **1670** (2009), 126–139, Transformation groups from a new viewpoint (Kyoto, 2009).

[Oli96] Bob Oliver, *Fixed point sets and tangent bundles of actions on disks and Euclidean spaces*, Topology **35** (1996), no. 3, 583–615.

[Pet79] Ted Petrie, *Three theorems in transformation groups*, Algebraic topology, Aarhus 1978 (Proc. Sympos., Univ. Aarhus, Aarhus, 1978), Lecture Notes in Math., vol. 763, Springer, Berlin, 1979, pp. 549–572.

[Pet83] ______, *Smith equivalence of representations*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **94** (1983), no. 1, 61–99.

[PR85] Ted Petrie and John Randall, *Spherical isotropy representations*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **62** (1985), 221–256.

[PS02] Krzysztof Pawałowski and Ronald Solomon, *Smith equivalence and finite Oliver groups with Laitinen number 0 or 1*, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 843–895 (electronic).

[PS09] Krzysztof Pawałowski and Toshio Sumi, *The Laitinen conjecture for finite solvable Oliver groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 6, 2147–2156.

[San76] Cristian U. Sanchez, *Actions of groups of odd order on compact, orientable manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976), 445–448.

[SF73] William A. Simpson and J. Sutherland Frame, *The character tables for* SL(3, q), SU(3, q^2), PSL(3, q), PSU(3, q^2), Canad. J. Math. **25** (1973), 486–494.

[Smi60] P. A. Smith, *New results and old problems in finite transformation groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 401–415.

[Ste51] Robert Steinberg, *The representations of* GL(3, q), GL(4, q), PGL(3, q), *and* PGL(4, q), Canadian J. Math. 3 (1951), 225–235.

[Suh85] Dong Youp Suh, *s-Smith equivalent representations of finite abelian groups*, Group actions on manifolds (Boulder, Colo., 1993), Contemp. Math., vol. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985, pp. 323–329.

[Sum07] Toshio Sumi, *Finite groups possessing Smith equivalent, nonisomorphic representations*, RIMS Kōkyūroku **1569** (2007), 170–179, The theory of transformation groups and its applications (Kyoto, 2007).

[Sum08] ______, *Smith problem for a finite Oliver group with non-trivial center*, RIMS Kōkyūroku **1612** (2008), 196–204, Geometry of transformation groups and related topics (Kyoto, 2008).

[Sum09] ______, *Smith set for a nongap Oliver group*, RIMS Kōkyūroku **1670** (2009), 25–33, Transformation groups from a new viewpoint (Kyoto, 2009).

[Xia07] Ju XianMeng, *The Smith isomorphism question: a review and new results*, RIMS Kōkyūroku **1569** (2007), 43–51, The theory of transformation groups and its applications (Kyoto, 2007).

Faculty of Design, Kyushu University, Shiobaru 4-9-1, Fukuoka, 815-8540, Japan

E-mail address: sumi@design.kyushu-u.ac.jp