数理解析研究所講究録
第 1734 巻 2011 年 196-204

最適経路 — フィボナッチから黄金へ —

九州大学　岩本 誠一 (Seiichi Iwamoto)
Professor emeritus, Kyushu University
Fukuoka 813-0012, Japan
email: iwamotodp@kyudai.jp

1　はじめに

本論文では、フィボナッチ経路と、その極限である黄金経路がそれぞれ最適になる 2 次計画問題を提示する。併せて、主問題と双対問題の間に (1) 相補双対性 と (2) シフト双対性 が成り立つことを示す。

以下では、フィボナッチを適宜フィボと略している。

2　黄金数とフィボナッチ数

実数

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$$

は**黄金数**(Golden number) といわれている [1,2,8]。黄金数については次が成り立つ。

$$1:\phi = \phi^{-2}:\phi^{-1}, \qquad \phi^{-2}+\phi^{-1}=1$$

$$\phi^{-2} = 2-\phi = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382, \qquad \phi^{-1} = \phi - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$$

他方、黄金数 ϕ は 2 次方程式

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{1}$$

の正の解としても定義される。この 2 次方程式を**黄金**(Golden) という。ときに**フィボナッチ**(Fibonacci) ともいわれる。黄金 2 次方程式は 2 つの実数解 ϕ とその**共役**(conjugate) $\overline{\phi} := 1-\phi$ をもつ。このとき、

$$\overline{\phi} = -\phi^{-1} \approx -0.618$$

$$\phi + \overline{\phi} = 1, \qquad \phi\cdot\overline{\phi} = -1.$$

さて、**フィボナッチ数列**(Fibonacci sequence) $\{F_n\}$ は 2 階線形差分方程式

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \qquad x_0 = 0,\ x_1 = 1 \tag{2}$$

の解として定義される（表 1）[1,2,8]。

n	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
F_n	$\cdots$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	$\cdots$

表 1　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

隣り合うフィボナッチ数の比の 2 つの極限はそれぞれ黄金数とその共役になる：

補題 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi, \qquad \lim_{n\to-\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \overline{\phi}.$$

3　黄金経路とフィボナッチ経路

3.1　黄金経路

定義 1 列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ は

$$x_n = c\phi^{-2n} \qquad \text{または} \qquad x_n = c\phi^{-n}$$

のとき、**黄金経路** *(Golden path, GP)* という。ただし、c は定数である。前者を $1:\phi$ **型**といい、後者を $\phi:1$ **型**という（図 1、図 2）。

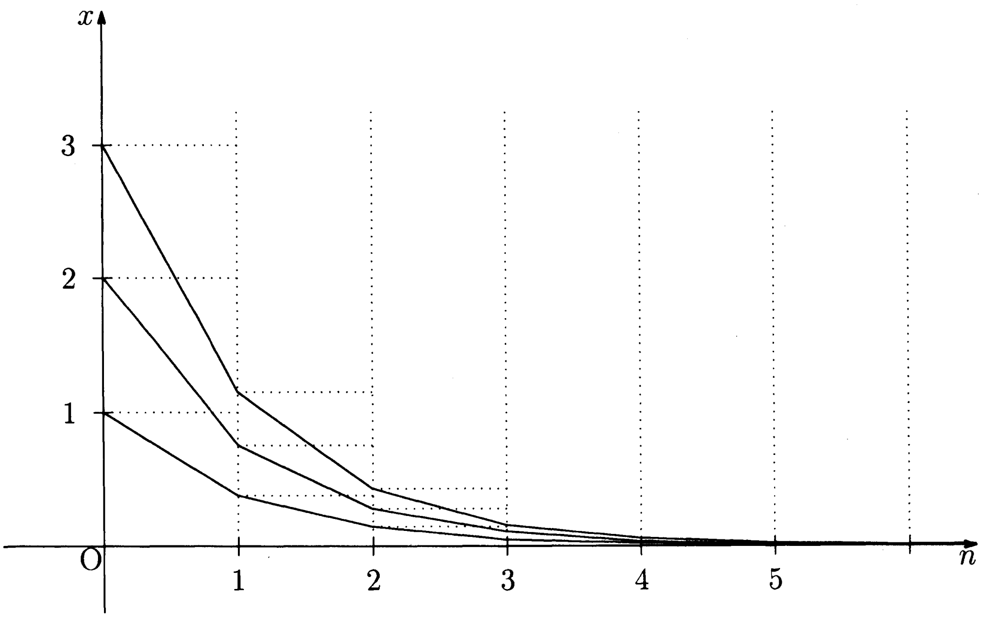

図 1　黄金経路（$1:\phi$ 型）　$x_n = c\phi^{-2n}$　$c = 1, 2, 3$

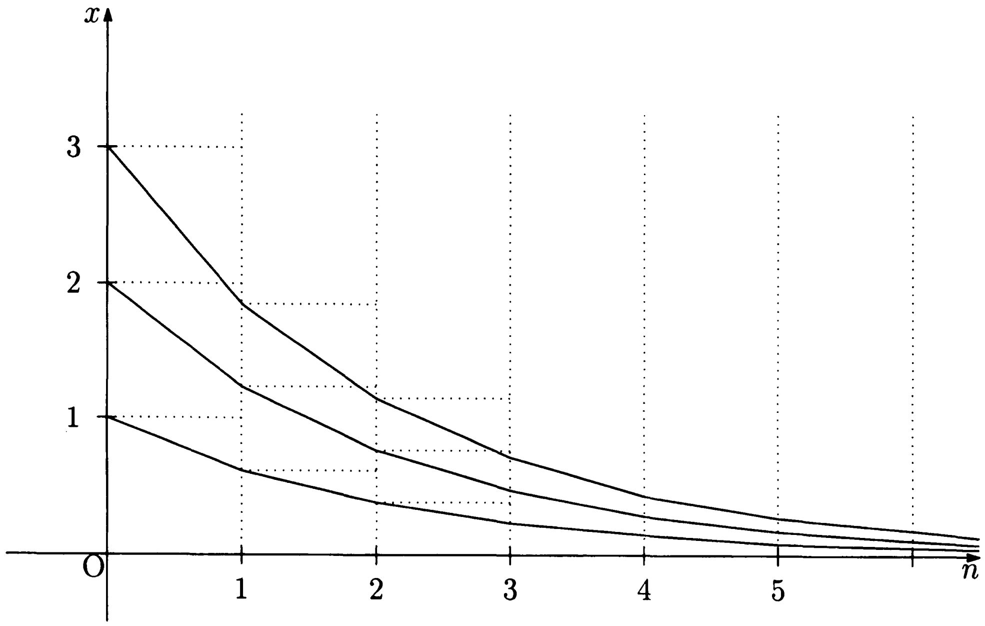

図 2　黄金経路（ϕ : 1 型）　$x_n = c\phi^{-n}$　$c = 1, 2, 3$

3.2 フィボナッチ経路

定義 2 列 $\{x_k\}_1^n$ は （x_1, x_2, …, x_k, …, x_{n-1}, x_n）が

$$c\,(F_{m+2n-1},\ F_{m+2n-3},\ \ldots,\ F_{m+2n-2k+1},\ \ldots,\ F_{m+3},\ F_{m+1})$$

または

$$c\,(F_{m+n},\ F_{m+n-1},\ \ldots,\ F_{m+n-k+1},\ \ldots,\ F_{m+2},\ F_{m+1})$$

のとき、**フィボナッチ経路** *(Fibonacci path, FP)* という。前者を 4 : 6 **型**といい、後者を 6 : 4 **型**という。

4 最適フィボナッチ経路

この節では 2 つの型のフィボナッチ経路が 2 次計画で最適であることを示す。

4.1 4 : 6 型

この小節では、$(n+1)$ 変数 $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を次のように評価する。すなわち、初期値 x_0 を定数 c に固定して、x 自身の大きさと相隣る量とのずれをともに平方和で評価し、さらに終端値の平方 x_n^2 にフィボナッチ比 $\dfrac{F_m}{F_{m+1}}$ を加重として掛けた総和で評価する。ただし、m は非負の整数とする。この小節では、この評価値を最小にする問題を主問題とし、この双対問題を考える。

4.1.1　主問題 (P_1)

まず、4 : 6 型の主問題として、次の n 変数 $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ の最小化問題を考えよう。

$$(\mathrm{P}_1)\qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2\right] + \frac{F_m}{F_{m+1}}x_n^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ x \in R^n,\ \ \text{(ii)}\ \ x_0 = c. \end{array}$$

ここに $c \in R^1,\ m \geq 0$ とする。

定理 1 主問題 (P_1) は

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \left(\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \hat{x}_k,\ \ldots,\ \hat{x}_{n-1},\ \hat{x}_n\ \right) \\ &= \frac{c}{F_{m+2n+1}}\left(\ F_{m+2n-1},\ F_{m+2n-3},\ \ldots,\ F_{m+2n-2k+1},\ \ldots,\ F_{m+3},\ F_{m+1}\ \right) \end{aligned}$$

のとき、最小値 $m = \dfrac{F_{m+2n}}{F_{m+2n+1}}c^2$ をもつ。

最小点 $\hat{x}$ は 4 : 6 型フィボナッチ経路になっている。

4.1.2　双対問題 (D_1)

今度は、主問題の双対問題を考えよう。主問題 (P_1) の双対問題は n 変数 $\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_n)$ の最大化問題として次で与えられる：

$$(\mathrm{D}_1)\qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \displaystyle 2c\mu_1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left[\mu_k^2 + (\mu_k - \mu_{k+1})^2\right] - \frac{F_{m+3}}{F_{m+2}}\mu_n^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ \mu \in R^n. \end{array}$$

定理 2 双対問題 (D_1) は

$$\begin{aligned} \mu^* &= (\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_k^*,\ \ldots,\ \mu_{n-1}^*,\ \mu_n^*\ ) \\ &= \frac{c}{F_{m+2n+1}}(\ F_{m+2n},\ F_{m+2n-2},\ \ldots,\ F_{m+2n-2k},\ \ldots,\ F_{m+4},\ F_{m+2}\ ) \end{aligned}$$

のとき、最大値 $M = \dfrac{F_{m+2n}}{F_{m+2n+1}}c^2$ をもつ。

最大点 μ^* も 4 : 6 型フィボナッチ経路になっている。

4.1.3 フィボナッチ相補双対

主問題 (P_1) の最小解と双対問題 (D_1) の最大解の間には次の 3 つの関係が成り立っている。

1. **(双対性)** 最小値と最大値が等しい : $m = M$. 共に初期値 c の 2 次関数で、その係数は相隣るフィボ数の比 $\dfrac{F_{m+2n}}{F_{m+2n+1}}$ である。
2. **(2 段階フィボナッチ)** 最小点 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ と最大点 $(\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_n^*)$ は共にフィボ数列の後ろ向き 2 段跳びである。
3. **(相補フィボナッチ)** 最大点と最小点を交互に編むと、後ろ向きフィボ数列になる。

すなわち、最適点の交互列は

$$
\begin{aligned}
&(\mu_1^*, \hat{x}_1, \mu_2^*, \hat{x}_2, \ldots, \mu_k^*, \hat{x}_k, \ldots, \mu_{n-1}^*, \hat{x}_{n-1}, \mu_n^*, \hat{x}_n) \\
= &\frac{c}{F_{m+2n+1}}(F_{m+2n}, F_{m+2n-1}, F_{m+2n-2}, F_{m+2n-3}, \ldots, F_{m+2n-2k}, \\
&\qquad\qquad F_{m+2n-2k-1}, \ldots, F_{m+4}, F_{m+3}, F_{m+2}, F_{m+1})
\end{aligned}
$$

となる。

この三位一体の関係を**フィボナッチ相補双対性** (Fibonacci complementary duality, FCD) という [5]。映画『ダ・ヴィンチ・コード』(2006) では、$m = 0$, $n = 4$, $c = F_9 = 34$ のときが、暗号 [ダ・ヴィンチ・コード] として用いられている。

4.2 6 : 4 型

以下では m, n を自然数として、フィボナッチ数列

$$F_m, F_{m+1}, \ldots, F_{m+n-1}, F_{m+n}$$

を係数にもつ n 変数の 2 次計画問題の主問題とその双対問題を考える。

4.2.1 主問題 (P_2)

まず、主問題として

$$
(\mathrm{P}_2)\quad
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[F_{m+n-k}(x_k - x_{k+1})^2 + \frac{F_{m+n-k-1}^2}{F_{m+n-k}}x_{k+1}^2\right] + \frac{F_{m-1}F_m}{F_{m+1}}x_n^2 \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ x \in R^n, \quad \text{(ii)}\ \ x_0 = c
\end{array}
$$

を考える。

定理 3 主問題 (P_2) は

$$\hat{x} = \left(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \cdots,\ \hat{x}_k,\ \cdots,\ \hat{x}_{n-1},\ \hat{x}_n \right)$$
$$= \frac{c}{F_{m+n+1}} \left(F_{m+n},\ F_{m+n-1},\ \cdots,\ F_{m+n-k+1},\ \cdots,\ F_{m+2},\ F_{m+1} \right)$$

のとき、最小値 $m = \dfrac{F_{m+n-1}F_{m+n}}{F_{m+n+1}} c^2$ をもつ。

この最小点 $\hat{x}$ は6 : 4 型フィボナッチ経路になっている。

4.2.2 双対問題 (D_2)

主問題 (P_2) の双対問題は

$$(\mathrm{D}_2) \quad \begin{aligned} &\text{Maximize} \quad 2cF_{m+n}\mu_1 - \sum_{k=1}^{n-1} F_{m+n-k+1} \left[\mu_k^2 + \left(\frac{F_{m+n-k+1}}{F_{m+n-k}} \mu_k - \mu_{k+1} \right)^2 \right] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{F_{m+1}F_{m+2}}{F_m} \mu_n^2 \\ &\text{subject to} \quad \text{(i)} \quad \mu \in R^n \end{aligned}$$

で表わされる。

定理 4 双対問題 (D_2) は

$$\mu^* = \left(\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \cdots,\ \mu_k^*,\ \cdots,\ \mu_{n-1}^*,\ \mu_n^* \right)$$
$$= \frac{c}{F_{m+n+1}} \left(F_{m+n-1},\ F_{m+n-2},\ \cdots,\ F_{m+n-k},\ \cdots,\ F_{m+1},\ F_m \right)$$

のとき、最大値 $M = \dfrac{F_{m+n-1}F_{m+n}}{F_{m+n+1}} c^2$ をもつ。

この最大点 μ^* は6 : 4 型フィボナッチ経路である。

4.2.3 フィボナッチシフト双対

主問題 (P_2) の最小解と双対問題 (D_2) の最大解の間には次の3つの関係が成り立っている。

1. **(双対性)** 最小値と最大値が等しい : $m = M$. 共に初期値 c の 2 次関数で、その係数は3連フィボ数の比 $\dfrac{F_{m+n-1}F_{m+n}}{F_{m+n+1}}$ である。
2. **(フィボナッチ)** 最小点 $(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2, \ldots,\ \hat{x}_{n-1},\ \hat{x}_n)$ と最大点 $(\mu_1^*,\ \mu_2^*, \ldots,\ \mu_{n-1}^*,\ \mu_n^*)$ は共にフィボ数列の後ろ向きである。

3. （シフト） 最大点 μ^* は最小点 $\hat{x}$ を1段シフトした点になる：

$$\mu_k^* = \hat{x}_{k+1} \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

すなわち

$$\left(\hat{x},\ \frac{F_m}{F_{m+n+1}}c\right) = \left(\frac{F_{m+n}}{F_{m+n+1}}c,\ \mu^*\right).$$

この関係を**フィボナッチシフト双対性** (Fibonacci sift duality, FSD) という。

5 最適黄金経路

この節では、前節の 4 : 6 型および 6 : 4 型に対応する無限変数版としてそれぞれ $1:\phi$ 型と $\phi:1$ 型を考察し、2 つの型の黄金最適経路を与える。

5.1 $1:\phi$ 型

前節の主問題 (P_1) と双対問題 (D_1) の無限変数版はそれぞれ次の (P_3) と (D_3) になる。すなわち、主問題

$$(\mathrm{P}_3) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left[(x_n - x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2\right] \\ \text{subject to} & \text{(i)} \ \ x \in R^{\infty} \quad \text{(ii)} \ \ x_0 = c \end{array}$$

と双対問題

$$(\mathrm{D}_3) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[(\mu_n - \mu_{n+1})^2 + \mu_{n+1}^2\right] \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad \mu \in R^{\infty} \end{array}$$

を考える。

定理 5 *([7])* (i) 主問題 (P_3) は

$$\hat{x} = (x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \hat{x}_n,\ \ldots) = c\left(1,\ \phi^{-2},\ \phi^{-4},\ \ldots,\ \phi^{-2n}, \ldots\right)$$

で最小値 $m = \phi^{-1}c^2$ をもつ。

(ii) 双対問題 (D_3) は

$$\mu^* = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*,\ \ldots,\ \mu_n^*,\ \ldots) = c\left(\phi^{-1},\ \phi^{-3},\ \phi^{-5},\ \ldots,\ \phi^{-(2n-1)}, \ldots\right)$$

で最大値 $M = \phi^{-1}c^2$ をもつ。

5.1.1 黄金相補双対

主問題 (P_3) の最小解と双対問題 (D_3) の最大解の間には次の 3 つの関係が成り立っている。

1. **(双対性)** 最小値と最大値が等しい : $m = M$. 共に初期値 c の 2 次関数で、その係数は黄金数の逆数 ϕ^{-1} である。
2. **(黄金)** 最小点 $(x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \hat{x}_n,\ \ldots)$ と最大点 $(\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_n^*,\ \ldots)$ は共に $1:\phi$ 型の黄金経路である。
3. **(相補性)** 最小点と最大点を交互に編むと、$\phi:1$ 型の黄金経路である。

すなわち、最適点の交互列は

$$
\begin{aligned}
&(x_0,\ \mu_1^*,\ \hat{x}_1,\ \mu_2^*,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \mu_n^*,\ \hat{x}_n,\ \ldots) \\
&= c(1,\ \phi^{-1},\ \phi^{-2},\ \phi^{-3},\ \ldots,\ \phi^{-(2n-1)},\ \phi^{-2n},\ \ldots)
\end{aligned}
$$

となる。

この三位一体の関係を**黄金相補双対性** (Golden complementary duality, GCD) という [3,4,6,7]。

5.2 $\phi:1$ 型

主問題 (P_2) と双対題 (D_2) の目的関数を F_{m+n} で割って $n \to \infty$ とすると、主問題と双対問題はそれぞれ次のようになる。

$$
(\mathrm{P}_4) \quad
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \phi^{-n} \left[(x_n - x_{n+1})^2 + \phi^{-2} x_{n+1}^2 \right] \\
\text{subject to} & \text{(i)} \ \ x \in R^{\infty} \quad \text{(ii)} \ \ x_0 = c
\end{array}
$$

$$
(\mathrm{D}_4) \quad
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & \displaystyle 2c\mu_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-(n-1)} \left[\mu_n^2 + (\phi\mu_n - \mu_{n+1})^2 \right] \\
\text{subject to} & \text{(i)} \ \ \mu \in R^{\infty}.
\end{array}
$$

定理 6 (i) 主問題 (P_4) は

$$
\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \hat{x}_n,\ \ldots) = c\left(\phi^{-1},\ \phi^{-2},\ \ldots,\ \phi^{-n}, \ldots\right)
$$

で最小値 $m = \phi^{-2}c^2$ をもつ。

(ii) 双対問題 (D_4) は

$$
\mu^* = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_n^*,\ \ldots) = c\left(\phi^{-2},\ \phi^{-3},\ \ldots,\ \phi^{-(n+1)}, \ldots\right)
$$

で最大値 $M = \phi^{-2}c^2$ をもつ。

5.2.1 黄金シフト双対

主問題 (P_4) と双対問題 (D_4) の最適解の間には次の 3 つの関係が成り立っている。

1. （**双対性**） 最小値と最大値が等しい：$m = M$. 共に初期値 c の 2 次関数で、その係数は黄金数の平方逆数 ϕ^{-2} である。

2. （**黄金**） 最小点 $(x_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \ldots)$ と最大点 $(\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_n^*, \ldots)$ は共に $\phi : 1$ 型の黄金経路である。

3. （**シフト性**） 最大点は最小点を 1 時点右にシフトさせた黄金経路である。

すなわち、

$$(\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_n^*, \ldots) = (\hat{x}_2, \hat{x}_3, \ldots, \hat{x}_{n+1}, \ldots)$$

となる。

この関係を**黄金シフト双対性** (Golden shift duality, GSD) という。

参考文献

[1] Beutelspacher, A. and Petri, B.,『黄金分割 — 自然と数理と芸術と —』（柳井浩訳）, 共立出版, 2005 年; (Original) *Der Goldene Schnitt 2, überarbeitete und erweiterte Auflange*, Heidelberg, Elsevier GmbH, Spectrum Akademischer Verlag, 1996.

[2] Dunlap, R.A.,『黄金比とフィボナッチ数』（岩永恭雄・松井講介訳）, 日本評論社, 2003 年; (Original) *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1977.

[3] 岩本 誠一, 「動学的最適化における黄金最適政策、小特集：経済分析と最適化の数理」, 三田学会雑誌 (慶應義塾経済学会), 第 99 巻 4 号, 2007 年, pp.101–125.

[4] Iwamoto, S., "Golden optimal policy in calculus of variation and dynamic programming," *Advances in Mathematical Economics* Vol.10, 2007, pp.65–89.

[5] Iwamoto, S. and Kira, A., "The Fibonacci complementary duality in quadratic programming," Ed. Takahashi, W. and Tanaka, T., *Proceedings of the 5th Intl. Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007 Taiwan)*, Yokohama, Yokohama Publishers, 2009, pp.63–73.

[6] Iwamoto, S. and Yasuda, M., "Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes," Ed. Elaydi, et al., *Advanced Studies in Pure Mathematics* Vol.53, Advances in Discrete Dynamic Systems, 2009, pp.77–86.

[7] Kira, A. and Iwamoto, S., "Golden complementary dual in quadratic optimization," Modeling Decisions for Artificial Intelligence, Springer-Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol.5285, 2008, pp.191–202.

[8] 中村 滋,『フィボナッチ数の小宇宙 — フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割 —』第 2 版, 日本評論社, 2008 年.