数理解析研究所講究録
第 1739 巻 2011 年 15-20

エッセーに見る高木の思想

足立恒雄（早稲田大学）

高木と公理主義

現代数学を特徴付ける公理主義と高木との関係を考えるに先立って、この問題を考えるきっかけとなった中村幸四郎 (1901-1986) の文章を引用しよう。中村は高木貞治 (1875-1960) がヒルベルトに師事したこと、ヒルベルトは公理主義を主導した当人であること指摘した上で、次のように書いている：

> 先生は帰朝されましても、この（公理的）方法を推進しようとはなさいませんでした。そして約 30 年の後、私共がこれを使用するまでその儘になさいました。私は先生ご自身の口からその延引の事情をうかがいたいと思いました。そしてこれも確か 1932 年以後の集会の折であったと記憶いたしますが、失礼をも顧みず執拗にこの質問を固執したことがありまして、同席の末綱恕一先生の叱責を受け、涙を飲んだことがありました。高木先生からは「時期が早過ぎた」という短いご返答を得たのに止まりました。(『追想　高木貞治先生』)

「約 30 年の後」というのは、中村が『幾何学基礎論』(1934 年)、『位相幾何学概論』(1936 年) などの著書を書き始めた頃のことを言っているのであろう。

公理主義と類体論略年表

1889	ペアノ	『算術の原理』
1896	フロベニウス	密度定理の予想
1897	バーンサイド	『有限群論』
1898	高木貞治	ドイツ留学 (1901 帰国)
1898	ヒルベルト	絶対類体の予想
1899	ヒルベルト	『幾何学の基礎』
1907	フルトベングラー	ヒルベルト予想の解決
1908	ツェルメロ	公理的集合論
1910	シュタイニッツ	体の一般理論
1920	高木貞治	類体論の主論文発表
1920	ネーター	環のイデアル論
1924	アルチン	一般相互法則を予想
1926	ネーター	抽象的イデアル論
1926	チェボタレフ	密度定理の証明
1927	アルチン	一般相互法則を証明
1930	v. d. ヴェルデン	『現代代数学』

公理と公準

1. 歴史的には、一般的で共通性の高い自明な命題を公理 (axiom) と呼び、特定の分野に固有の基本的な仮説を公準 (postulate) と呼んで区別してきた。これらはその真理性に疑問を差し挟む対象ではなかった。

2. 現在では、理論の枠組みを定める原始的命題群を公理系と呼んでいる。このとき公理には自明な命題という意味は失われ、目的とする理論に応じて任意に選ぶことができる。

3. ユークリッド幾何学や算術、実数論のようにわれわれにアプリオリと思われる理論の場合は原始的命題は任意に選ぶという訳にはいかないので公理の代わりに公準という呼び名を宛てることにする。ユークリッドの第 5 公準が代表的な例である。

4. さて、公理と公準をこのように使い分けるとき、算術の公理やユークリッド幾何学の公理は公準であり、群、環、体の場合は公理であるということになる。公準系はカテゴリカルになるのが特徴である。

このように公理と公準の違いを明確にするとき、ヒルベルトが公理主義を主導したという意味とE. ネーター（1882 − 1935）一派が公理主義を主導したという意味とには大きな違いがあることがわかるだろう。後者の場合汎用性ということに特徴があるのである。

高木の『新式算術講義』(1904 年）ではハンケルの「形式不易の原理」に基づいて整数、分数などの導入の必然性を説いているが、これは公理主義への橋渡しの役割を担っている。公理主義（正確には公準主義）を前面には打ち出していないが、公理主義を踏まえている箇所がいくらも見出すことができる（詳細は『数学通信』2010 年 8 月号の拙稿参照)。公理主義を前面に打ち出さないことや、実数概念導入のために量について多大の紙数を割いていることなどが、公理主義に基づいていないという中村の批判の根拠になっているのだろうが、世間一般の知識人に数概念を説くためには高木の採った方法は（確かに古いなあという印象を受けるのは事実であるが）納得がいく。数概念の解説のために公理を掲げるところから始めるという形式的な意味で公理主義でなければならない理由も（今となっては）見当たらない。(すなわち、公理主義にしたら得られるというメリットも大してないように思われる。)

高木は公理主義について既にエミー・ネーターの三回忌に際して次のような優れたエッセーを書いている。

> Emmy Noether が彼女の Abstrakter Aufbau der Idealtheorie を発表したのは昭和元年（1926 年）であった。これを暫定的に抽象運動の最初の火の手と見てもよいが、火事の始まりを define することを無理と考えるならば、少しさかのぼって 1920 の Idealtheorie in Ringbereichen を取ってもよい。古典イデアル論は popular 以外の anything であった。Noether 氏家伝の代数曲線論も久しく行き詰っていた。このような古い伝統の二つの compartments の間に corridor を付けようというのは、何たる幸運に恵まれたる思いつきであったことよ！　この思いつきから 1920 の環のイデアル論が生まれたのである。それの別刷に添えて本文の筆者に寄せた微細字の葉書に bescheideneres Ziel 云々の文句があったが、Ziel は bescheiden であったとしても、成果は異常である。意外の成果

に味を占めたものか、1926 の Abstrakter Aufbau では既に具体的なる compartments は二の次で、すべての障壁の撤廃が指導原理になっている。

一つは機運というものであろうが、local であった区画解消の運動は、各所に resonance を呼び起こして、今や抽象法は燎原の火のごとく、それの浄化作用は既に素晴らしい成果を生んでいる。

抽象法の手段は Axiomatik であるが、Hilbert の Axiomatik が数学基礎論の掘り下げに終始するに反して、Noether 式の Axiomatik は建設の原動力である。(『数学・世界・像』(1937))

このエッセーは次のように締めくくられる:

抽象運動の大なる教訓は数学の連帯性の "徴" である。倦怠期の数学に於いて著しく目立つのは研究対象に従って区分されたる部門の対立である。それらが連絡を失って孤立することは活力減衰の兆候にほかならない。研究対象による分科の区別はむしろ trivial であって、それは地図の上に引かれた経緯度線のごとく conventional である。Essential なのは研究の対象よりも、その method であろう。抽象法がイデアル論に発祥したことは数学に隔離室の存在しないことの明証でなくて何であろう。

過渡期は遠からず終わるであろう。大掃除の最中には塵も芥も乱舞するであろうが、次に来るべき鎮静期には、清新明朗なる数学が現出することは確実であろう。

新しい数学(=抽象数学)の意義と将来を見通した、極めて高い見識を示すエッセーであろう。ユークリッド幾何学をヒルベルトのように公理主義(公準主義)で記述することには大きな意味があったが、それは一度成されれば十分であって、だれもがそのように書かねばならないというものではない。しかし、第二の意味での公理主義はすべての数学がその洗礼を受ける類の「数学史上における革命」であった。そういう観点からすれば、中村幸四郎の批判はやや的外れだったのではないかという気がする。つまり、真の意味での公理主義(=現代数学化)は 1920 年代後半に始まったのである。

なお、現在では高木の言う「過渡期」はとうに過ぎていて、高木が予見した「清新明朗なる数学」の時代になったと言えるのではないだろうか。『高木貞治に見る数学思想の変遷』(拙稿『数学通信』2010 年 8 月号)に述べたことだが、1949 年に著した『数の概念』は、それまでの著書に比べると、極めて明晰に記述されていて、既に 60 年経った現在でも読むのに苦労は要らない。この差が数学における抽象化という革新がどんなに大きかったかを物語っていると同時に数学は現在安定期(高木の言う「鎮静期」)にあることがわかるだろう。

ところで、このように数学の新傾向、すなわち抽象数学に対して理解を示しているが、高木自身は旧世代の数学に染まって生きた人であったと言えるだろう。その点を高木の類体論について論じてみよう。

なぜ高木は一般相互法則に気が付かなかったのか？

ウェーバー	1842 − 1913
ヒルベルト	1862 − 1943
フルトベングラー	1869 − 1940
高木	1875 − 1960
＊ネーター	1882 − 1935
アルチン	1898 − 1962
ハッセ	1898 − 1979
ヴェイユ	1906 − 1998
シュヴァレー	1909 − 1984

話を簡単にするために絶対類体の場合に限定しよう。ヒルベルトは 1898 年に絶対類体に関する予想を述べた。それは次のように述べられる：

K を代数体とすると K の有限次拡大 $\tilde{K}$ で次の性質を持つものが存在するとき、この $\tilde{K}$ を K の絶対類体と言う：

K の素イデアル $\mathfrak{p}$ が $\tilde{K}/K$ で完全分解する、つまり $\tilde{K}$ において

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_n, \qquad n = [\tilde{K} : K]$$

と素イデアル分解されるためには、$\mathfrak{p}$ が K の単項イデアルであることが必要十分である。

絶対類体 $\tilde{K}/K$ について次が成り立つ：

1. K の絶対類体 $\tilde{K}$ は必ず存在し、しかもただ一つである。
2. $\tilde{K}/K$ はガロア拡大であって、$\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ はイデアル類群 I_K/P_K に同型である。
3. $\tilde{K}/K$ は K の最大不分岐アーベル拡大である。
4. f を $\mathfrak{p}^f \in P_K$ なる最小自然数とするとき $\mathfrak{p}$ は $\tilde{K}$ において

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_g, \qquad fg = n$$

と素イデアル分解される。

この予想はフルトベングラー（1907）によって解決されたが、何となく不審に思われるのは、第 2 項で、「同型である」と述べられていて、その同型対応について言及されていないことである。フルトベングラーの解決でも同型対応は与えられていず、単に有限アーベル群としての基底分解の型が一致することが示されているのみである。そしてこのフルトベングラーの結果を拡張することになった高木も最初からどういう同型対応によって同型になるのかを問題にしていないように思われるのは、（後知恵という点を割り引いたとしても）さらに一段と不可思議に感じられる。

そもそも今どきの数学者ならだれだって、「二つの群が同型である」と言った途端に「どういう写像で同型対応が与えられるのか」を問題にするだろう。むしろただ「同型である」と言われたな

ら、どうやって証明したのだろうかと違和感を抱くに違いない。しかし、ヒルベルトもフルトベングラーも高木も、どういう同型対応なのかを問題にした形跡は一切残されていない。高木は次の課題として非アーベル拡大の場合への拡張を重要課題と認めていたところを見ると、「類体論は、クロネッカーの青春の夢を解決した時点で、終わった」とでも考えていたのかもしれない：これに関しては三宅克哉の考察（『類体論講義』pp.267-268）参照。

ところで、絶対類体の性質の第 2 項の同型 $I_K/P_K \to \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ は

$$C(\mathfrak{a}) \mapsto \left(\frac{\tilde{K}/K}{\mathfrak{a}}\right)$$

によって実現されるというのがアルチンの一般相互法則である（ここに $C(\mathfrak{a})$ は K のイデアル $\mathfrak{a}$ の属する類 $\mathfrak{a}P_K$ を表し、右は $\mathfrak{a}$ の $\tilde{K}/K$ におけるアルチン記号を意味する）。この一般相互法則の立場から見れば、第 4 項は示すまでもない事柄（つまり、簡単な系）であるばかりか、それまで知られていた冪剰余の相互法則がすべて簡単に証明されてしまうのである。

このように簡潔にして自然な同型対応を高木はどうして思い至らなかったのか、というのが問題提起である。

もっともこれは代数的整数論を学んだ人間ならだれでも思う類の疑問であって、私が初めて言い出したというような次元のものではないことを断っておく。

問題点をさらに明確にすると、ヒルベルトの予想提起から高木の類体論完成に至るまで、類体の「ガロア拡大としての構造性」が一切問題にされていないのはどうしてだろうか、ということである。

ところでアルチンはどのようにして一般相互法則に思い至ったのだろうか？

1. アルチンは 1923 年に書き上げ、翌年発表された論文（Über eine neue Art von L-Reihen）において L 関数の「一般化」を与えた。しかしながら、これが真の一般化になっているためには、アーベル拡大の場合にそれが旧来の L 関数に一致することを示さねばならない。そしてそのためにはイデアル類群とガロア群の同型対応が（一般相互法則として与えられる）自然な対応でなければならないことが必然的にわかるのである。

2. 1924 年論文の段階では未だ証明は与えられてはおらず、1927 年になって発表される。これは証明に 3 年を要したという意味ではなく、証明にはディリクレの素数定理の拡張に当たるチェボタレフの密度定理（フロベニウス予想：1896）が必要なのだが、それが 1926 年に証明されたことによる。

3. 1924 年論文で「一般相互法則」を述べるに当たってアルチンはこれを「予想」とはせず Satz と記していることは注目される。いくつかの実例で成り立つからということもあるが、それよりは「必ず成り立たねばならない」という確信があったということだろう。アルチンはこの Satz を述べ、続いて次のように記している：

   > この Satz 2 はまたそれ自身でも興味深いものである。実際ガロア群とイデアル類群との間の同型性に明示的な表現を与える。さらに巡回拡大で基礎体 k に 1 の冪根が含まれている場合には、われわれの定理（Satz 2）は（冪剰余の）一般相互法則と完全に一致するのである。しかもその合致の仕方はあまりに明白なので、外見上は、何か全く違うものという印象を与えるとしても、任意の体における一般相互法則の定式化であるとみなさねばならないであろう。

高木がアルチンのこの 1924 年論文にどのような反応を示したかは、とても興味深いが、残念ながら何も書き残されてもいなければ、語り伝えられてもいないので不明である。

結局のところ、何か成果（相互法則の拡張など）が予定されない限り、同型対応に特別な関心が寄せられなかったということになる。しかし、同型対応が一切無視されたという背景には次のような事情もあったのではないかと思うが、これは大した根拠がない空想に過ぎないことを予めお断りしておく。

アルチンがネーター学派（NOETHER BOYS）の兄貴分として新思想の鼓吹に貢献したことは良く知られている。アルチン（ちなみに言えば、高木とアルチンは 23 歳の年齢差がある）は高木の類体論を学ぶと同時にどんな同型対応であるかに関心を持ったのではなかろうか。高木はウェーバー、ヒルベルト、フルトベングラーと同じ旧世代に属する整数論学者であり、自分の類体論が完成した段階では、同型対応が具体的に示されていないことに対して不満（あるいは不安）というようような気分は持っていなかったのではないだろうか。アルチン、ヴェイユ、シュヴァレーは新世代に属する数学者であると言えるのではないだろうか。新旧を分ける境目はネーターが旗手となった抽象数学の勃興である。高木はエッセーで見たように、1930 年代後半には抽象数学に深い理解を示すに至るが、自身としては古いタイプの数学者だったということなのではないだろうか。