数理解析研究所講究録
第 1742 巻 2011 年 121-126

Symmetry Restoration Process in Attractor Merging Crises

大阪府立大学大学院工学研究科数理工学分野; さきがけ
水口 毅 (Tsuyoshi Mizuguchi)
Department of Mathematical Sciences, Osaka Prefecture University; PRESTO, JST
gutchi@ms.osakafu-u.ac.jp

概要

アトラクタマージングクライシス、すなわち対称性の破れ/回復を伴うカオス=カオス分岐での特異性を考える。対称性が保たれた側から分岐点に近付く場合、間欠性による特異性が知られているが、対称性が破れた側から分岐点に近付く場合、何らかの特異性を通じて、分岐が予見できるであろうか?ベイスン境界上に存在する不安定解で回復する対称性を満たすものに注目し、分岐点近傍での軌道の特徴的な振舞いを測定する方法を提案した。この方法は、分岐点や解の具体的な関数形に依存しないと言う特長を持つ。この振舞いは系の対称性の近似的な回復過程とみなすことができる。

力学系の研究において対称性は極めて重要な概念である。とくにある種の分岐においては、対称性の回復あるいは破れを伴うことから、解や分岐の特徴付けや有用である。離散的な対称性をもつ相安定なカオス系では、アトラクタマージングクライシス (AMC) と呼ばれる分岐現象が起こることが知られている [1, 2]。分岐点の前後でストレンジアトラクタの対称性の破れと回復が切り替わる。すなわち、対称性の破れた側では二つのストレンジアトラクタ C_+, C_- が共存し、初期条件によってそのうちの一方が選ばれるが、分岐点でそれらがマージし、対称性を保った一つのストレンジアトラクタ C_0 になる。

この AMC の分岐点に近付く際に観測される間欠的な特異性に関して様々な系についての報告がなされている [1, 3, 4]。すなわち、対称性が保たれた側から分岐点に近付いた場合、分岐点近傍では、「各側」での滞在時間—すなわち切替え時間—が増大して行き分岐点で発散する。発散は制御パラメータに対してべき的であり、少数自由度の場合には比較的単純なシナリオから解釈することができる。何らかの形で自由度が運動に変換されれば、その拡散係数が巾的に発散することに対応する。空間的に広がった系では、KS で同様のことが起こることが知られている。[5, 6] したがって、物

理量の特異性を観測することによって分岐を予見することが可能である。

これらの特異性は対称性が保たれた側から近付いた場合のものである。では、対称性が破れた側から分岐点に近付いた場合に、何らかの特異性によって分岐を予見することは可能だろうか。我々は対称性が破れた側から分岐点に近付いた場合の特異性に関して報告する。本稿で着目するのは、双安定系から単安定系への分岐点で、互いに対称なストレンジアトラクタが同時にぶつかりマージする不安定周期解への接近と対称性の一時的な回復現象である。

一例として、周期外力の影響を受けている XY モデルを考えよう [7]。すなわち複素変数 $\psi(t)$ に対する方程式、

$$\dot{\psi} = \psi - |\psi|^2\psi + \gamma\overline{\psi} + he^{i\Omega t} \tag{1}$$

を考える。ここで γ, h, Ω は実パラメータ、$\overline{\psi}$ は ψ の複素共役をあらわす。外力の周期は $2\pi/\Omega$ であたえられる。この方程式には n を整数として

$$t \to \frac{2n+1}{2}T, \quad \psi \to -\psi, \tag{2}$$

という変換に対する対称性があり、この対称性が様々な形で破れる。まず、離散的な時間推進 $t \to t+T$ に対する不変性に関しては、不変な解即ち周期解と、そうでない解すなわち、準周期解とカオス的な解がある。このうち、周期解とカオス解は、式(2)で表される対称性を満たすかどうかで更に分類されることが知られている。対称性を満たす周期解は SRO, 対称性を破る周期解を SBO と分類されている。カオス解について、対称性は統計的な観点から考えなければならない。ストレンジアトラクタが統計な対称性は、その長時間平均した重心の位置によって判断することが出来る。統計的な意味で対称性が破れたカオス軌道を SBC と統計的な意味で対称性が保たれたカオス軌道を SRC がある。

図 1 は分岐図であり、$h = h_c \approx 0.55105957$ で、アトラクタマージングクライシスが起きていることを示している。すなわち、$h_c < h < h_1$ で系は双安定であり、h_c の近傍では SBC 解の対が安定である。図には一方の枝しか書いていないことに注意してほしい。$h = h_c$ でカオス状態を保ったままでの対称性の回復が起こり、

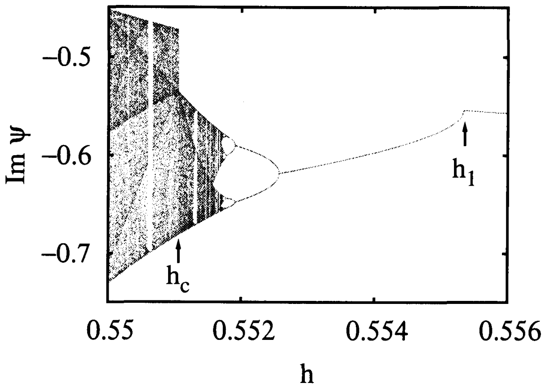

図 1: 分岐図。横軸はコントロールパラメータ h。縦軸はポアンカレ断面 $\mathrm{Re}\,\psi = 0$ かつ $\mathrm{Re}\,\dot{\psi} > 0$ での $\mathrm{Im}\,\psi$。

$h < h_c$ で統計的に対称性の保たれた SRC 解が唯一の安定解となる。以下、この分岐点での特異性に着目しよう。

対称性が保たれた側（$h < h_c$）から分岐点に近付くと、状態遷移間時間が巾的に発散することが知られている。問題は、対称性が破れた側（$h > h_c$）から近付いた場合である。$h = h_c$ では、一対のアトラクタが 媒介解 (mediating solution) と呼ばれる特別な不安定解 M にぶつかる。当然 M は不安定であり、今の場合はリミットサイクルである。我々はこの特別な解 M と軌道との関係に注目した。

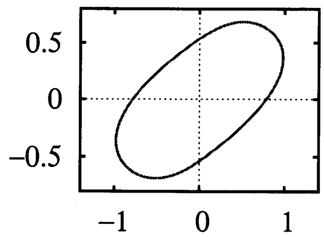

図 2: 媒介解 M を ψ 平面に射影したもの。縦軸は $\mathrm{Re}\psi$, 横軸は $\mathrm{Im}\psi$ 。

まずパラメータを $h = h_c$ に設定し、ニュートン法を用いて最短周期のリミットサイクル解を求めた（図2参照）。つぎに、非対称側の分岐点近傍で h を変え、このリミットサイクル解とカオス的な軌道との距離 d_M を測定した（図3(a) ）。ここで、d_M はこの

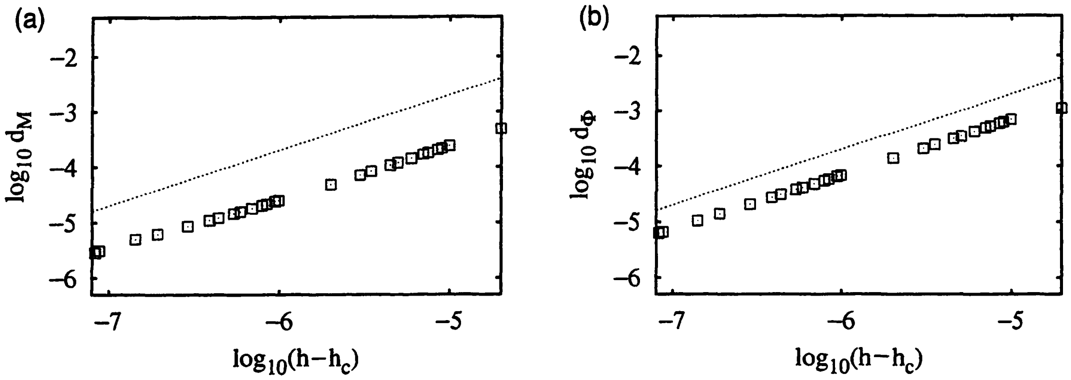

図 3: (a) 距離 d_M の h 依存性。(b) 距離 d_Φ の h 依存性。いずれも $h \to h_c$ で線形に減少している。

リミットサイクル上の点と軌道の点のユークリッド距離の数値計算時間内における最小値とした。図3(a) から $d_M \propto (h-h_c)$ となることがわかる。したがって $h \to h_c$ で、軌道は M にマージすると予想される。その意味で、このリミットサイクル解は媒介解 M であることがわかる。すなわち、ストレンジアトラクタと解 M との距離を測定すれば、どの程度分岐点に近付いたかが分かることになる。

しかし、距離 d_M を測定するためには、まず分岐点を正確に求め、次に分岐点で M を求めなければならない。良く知られているように、カオス系には多数の不安定解が埋め込まれており、その中で、正しい解 M を見出すことも考えなければならない。今回、我々が提案するのは、上に述べた分岐点の特定や解 M の具体的な関数形を必要としない方法である。解 M は、式(2)で表されるような対称性を有するリミットサイクル解であった。そこで、M との距離の代わりとして新たな距離 d_Φ を

$$d_\Phi(h) \equiv \min_t \left| \psi\left(t - \frac{\pi}{\Omega}\right) + \psi(t) \right|. \tag{3}$$

で定義する。$\min_t$ は観測時間における最小値を意味する。d_Φ は、軌道が式(2)で表される対称性をどの程度破っているかを定量的に表現する量であり、観測量だけから決めることが出来る。図3(b) は、h 近傍で d_Φ を測定したものであり、図3(a) と同様に、$d_\Phi \propto (h-h_c)$ が分かる。すなわち対称性の破れを d_Φ の形で測定すれば、対称性

の破れや回復を伴う分岐の近傍でその特異性を特徴づけることが出来るのである [8]。

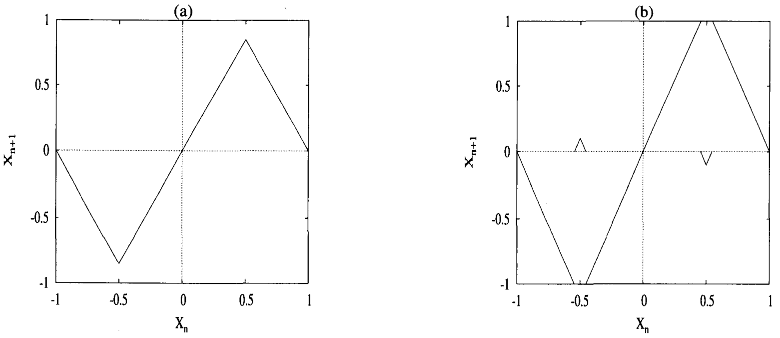

図 4: 対称テントマップの双安定状態 (a)($a < 2$) と単安定状態 (b)($a > 2$)。

このシナリオは AMC を起こす他の系に適用にもできる。たとえば、

$$f(x)=\begin{cases}\left\{\begin{array}{cc}-ax-a & x<-0.5\\ ax & -0.5\le x\le 0.5\\ -ax+a & x>0.5\end{array}\right\}, & \text{if } 0<a<2,\\ \left\{\begin{array}{cc}-ax-a & x<\frac{1}{a}-1\\ ax+a-1 & \frac{1}{a}-1<x<-0.5\\ -ax-1 & x-0.5<x<-\frac{1}{a}\\ ax & -\frac{1}{a}\le x\le\frac{1}{a}\\ -ax+1 & \frac{1}{a}\le x\le 0.5\\ ax-a+1 & 0.5\le x\le 1-\frac{1}{a}\\ -ax+a & 1-\frac{1}{a}\le x\end{array}\right\}, & \text{if } 2<a\end{cases} \tag{4}$$

という区分線形写像は奇関数であり $x \to -x,\ f(x) \to -f(x)$ という変換に対して不変である (図4)。これは $a = a_c = 2$ を分岐点として AMC をおこす。この場合の解 M は $x = 0$ であり、軌道と M との距離 d_M は $d_M \propto (a - a_c)$ となる。また、解 M を知らなくても軌道と変換の像との距離 $d_\Phi = \min_t x - (-x) = \min_t 2x$ であり、$d_\Phi \propto (a - a_c)$ である。

他の系に応用する場合に必要な拡張に関していくつか触れておく。第一に、式 (3) のような距離を定義するためには、M 解の周期が必要となる。ところが、自律系などの場合は、その周期が自

明に求められるとは限らない。そのような場合でも、筆者らが既に提案した方法 [11] で測定できると考えられる。つぎに、偏微分方程式に関してはたとえば KS 方程 [5, 6] などが考えられる。特に、共鳴外力項付複素ギンツブルグ＝ランダウ方程式におけるキンクのカオス的な運動ではその兆候が報告されている [12]。さらに、解 M がリミットサイクルではなくトーラスとなる場合がある [3, 10]。この場合式 (3) の形の距離は定義できないが、同様の性質を有する距離を定義することは可能であると考えられる。これらに関しては稿をあらためて紹介したい.

小林幹氏、藤原直也氏、森田泰章氏との有益な議論に感謝します。

参考文献

[1] Grebogi C. , Ott E. and Yorke J. A., Physica **7D** (1983) 181.

[2] Grebogi C. , Ott E. , Romeiras F. and Yorke J. A., Phys. Rev. **A36** (1987) 5365.

[3] Heagy J. and Ditto W. L., J. Nonlinear Science **1** (1991) 423.

[4] Fujisaka H. and Grossmann S., Z. Phys. **B48** (1982) 261.

[5] Chian A. C. -L. , Rempel E. L. , Macau E.E. , Rosa R. R. and Christiansen F., Phys. Rev. **E65** (2002) 035203R.

[6] Rempel E. L. and Chian A. C-L., Phys. Lett. **A71** (2003) 104.

[7] Fujiwara N. , Kobayashi T. and Fujisaka H., Phys. Rev. **E75** (2007) 026202.

[8] 解 M は現象が定性的変化する際に現れる不安定解という意味で、Nishiura の提唱する分水嶺解 [9] の一種であると言える。

[9] Nishiura Y. , Teramoto T. and Ueda K., Chaos **13** (2007) 962.

[10] Ito K. and Nishiura Y., Phys. Rev. **E77** (2008) 036224.

[11] Morita Y. , Mizuguchi T. , Fujiwara N. and Kobayashi M. U., Chaos **20** (2010) 013126.

[12] Kobayashi M. U. and Mizuguchi T., Phys. Rev. **E73** (2006) 016212.