

2010 年度冬の LA シンポジウム [S7]

非同期匿名ロボットによる最適マッチングを用いた パターン形成アルゴリズム

藤永 直 *

小野 廣隆 †

来嶋 秀治 *

山下 雅史 *

概要

本発表では [4] によって提案された, 自律分散ロボットモデル (autonomous mobile robots model) と呼ばれる分散システムのモデルを扱う. 自律分散ロボットモデルは, 2次元ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 上を移動する複数のロボットからなるシステムのモデルであり, 各ロボットは, 他のロボットの位置を観測 (Look), それに従って次に移動すべき位置を計算 (Compute), 計算結果に従って移動 (Move) の一連の動作からなるサイクルを繰り返す.

本発表では, 特に自律分散ロボットによるパターン形成問題を扱う. すなわち, そのようなロボットを所望の配置に並ばせるアルゴリズムについて考察する. 従来パターン形成問題においては, ロボットは目的のパターンを観測できないものとしていたが, 本発表で扱うパターン形成問題では, ロボットは目的のパターンを観測できるものとしている. 本発表では, そのような場合, マッチングを用いることで, パターン形成問題が容易に解けることを示す.

1 システムモデル

ロボットの集合 $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ を考える. 時刻 t における $r \in R$ の状態を $x_r(t) \in \mathbb{R}^2$ で表わし, 時刻 t におけるシステムの状態を $C(t) = \{x_{r_1}(t), x_{r_2}(t), \dots, x_{r_n}(t)\}$ によって表す. \mathbb{R}^2 上の n 点からなるパターン全体を \mathcal{L}_n で表す. また, 目的パターンを $B \in \mathcal{L}_n$ で表す. o は座標系の原点 $(0, 0)$ を表す. $x, y \in \mathbb{R}^2$ に対して, $d(x, y)$ で x と y のユークリッド距離を, \overline{xy} で線分 $\{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}$ を表す. アルゴリズム $\psi : \mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{R}^2$ の実行として, 以下のものを考える.

システムの初期状態は $C(0) = A \in \mathcal{L}_n$ であり, 各ロボットは停止している. 時刻 t にサイクルを開始した $r \in R$ は以下を行う.

Look $C(t)$ と B のスナップショット $Z(C(t), B)$ を観測する. ただし, Z は $Z(x_r(t)) = o$ なる回転, 平行移動, 拡大縮小からなる変換であり, 任意の $X, Y \in \mathcal{L}_n$ に対して, $Z(X, Y) = (Z(X), Z(Y))$ とし, $Z(X)$ は Z による X の像を表すとす.

Compute $Z(C(t), B)$ を入力として, ψ に従って, 次に向かう目的地 $b = Z^{-1} \circ \psi \circ Z(C(t), B)$ を決定する. ψ は全ロボットで共通である.

Move b に向かって $l \in [\min\{\epsilon, d\}, d]$ だけ直線的に移動する. ただし, $d = d(x_r(t), b)$ であり, ϵ は t, r に依存しない正の定数である.

各サイクルの開始時刻は, 敵対的なスケジューラによって決定されるものとするが, 公平性を仮定する. すなわち, 任意の $r \in R$ と時刻 t に対して, $t' (> t)$ が存在して, t' に r はサイクルを開始するものとする.

A からどのような実行によっても, ある時刻 t_0 以降において, システムの状態が常に B に一致する ($\forall t \geq t_0, C(t) = B$) のとき, ψ は A から B を形成すると言う.

2 マッチングによるパターン形成

上で定義されたパターン形成問題は, 目的パターンが観測可能であるため, ψ は A と B の間の完全マッチング $M_{A,B}$ の選び方であると考えることがで

*九州大学システム情報科学研究院
†九州大学大学院経済学研究院

きる。すなわち、 A と B に対して、 $M_{A,B}$ が一意に定まれば、 ψ は $\psi(A,B) = M_{A,B}(o)$ によって一意に定まる¹。以下では、このように定義されるアルゴリズムのみを考える。このとき、 ψ が A から B を形成するためには、 $\psi(A,B)$ が以下の2つの性質を満たせば十分である。

座標系非依存性 任意の回転、平行移動、拡大縮小からなる変換 Z に対して、 $\psi \circ Z(A,B) = Z \circ \psi(A,B)$.

実行非依存性 $M_{A,B}(a_i) = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とする。任意の $A' = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\}$ ($\forall i, a'_i \in \overline{a_i b_i}$) に対して、 $M_{A',B}(a'_i) = b_i$.

以下、これらの性質を満たす $M_{A,B}, \psi$ を構成する。

3 アルゴリズム ψ の構成

$A, B \in \mathcal{L}_n$ に対して、 A と B の完全マッチング全体の集合を $\mathcal{U}(A,B)$ で表す。また、 $M \in \mathcal{U}(A,B)$ に対して、 M のコスト $d(M)$ を

$$d(M) = \sum_{(a,b) \in M} d(a,b) \quad (1)$$

によって定義する。このとき、 $\mathcal{U}(A,B)$ の元でコストを最小にするマッチング $M_{A,B}$ が一意に定まれば、明らかに $M_{A,B}$ は上の2つの性質を満たす。問題はそのようなマッチングが一意に定まらない場合である (図1を参照)。 $d(M)$ を最小にする $M \in \mathcal{U}(A,B)$ で、異なる $(a,b), (a',b') \in M$ に対して、 a, a', b', b が同一直線上に位置しかつこの順番で現れることのないもの全体からなる集合を $\mathcal{M}(A,B)$ で表す。 $\mathcal{M}(A,B) \neq \emptyset$ ($A = B = \emptyset$ の場合を除いて) であるが、必ずしも $|\mathcal{M}(A,B)| = 1$ でないことに注意。そのような場合にも $M_{A,B}$ を一意に定めるために、以下グラフ $G = (V,E)$, $V = (A,B)$, $E = \bigcup_{M \in \mathcal{M}(A,B)} M$ を考える。このとき、 G に関して以下が成り立つ。

補題 1. 任意の G の辺 $e = (a,b)$, $e' = (a',b')$ に対して、以下のいずれかが成り立つ。図2を参照。

¹ A から B への全単射を対 $(a,b) \in A \times B$ の集合 (マッチング) で表している。例えば、全単射 $M: A \rightarrow B$ が $M(a_i) = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) で定義されるとき、 $M = \{(a_i, b_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ である。

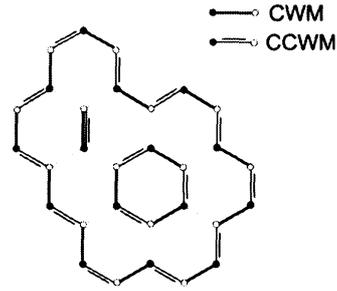


図1: 最小マッチングが一意に定まらない場合

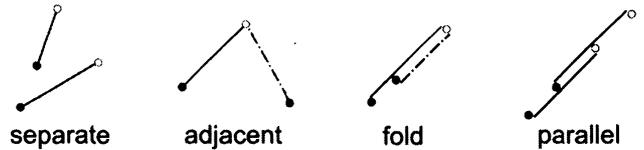


図2: G の辺の関係。

- (separate) $\overline{ab} \cap \overline{a'b'} = \emptyset$.
- (fold) a, a', b, b' が同一直線上に位置し、かつ e と e' は丁度1つの端点を共有する。
- (adjacent) e と e' は丁度1つの端点を共有し、(fold) でない。
- (parallel) a, a', b, b' が同一直線上に位置し、この順番で現れる。

Proof. いずれも成り立たないと仮定すると、2辺は以下のいずれかを満たす。それぞれの場合について矛盾を導く。図3参照。 $M, M' \in \mathcal{M}(A,B)$, $e \in M$, $e' \in M'$ とする。ここで、 e と e' は端点を共有しないとしてよい。

- Case 1. $M = M'$.
 - (cross) \overline{ab} と $\overline{a'b'}$ が点 p で交わる。
 - (opposite-direction) a, b', b, a' が同一直線上に位置し、この順番で現れる。
 - (include) a, a', b', b が同一直線上に位置し、この順番で現れる。

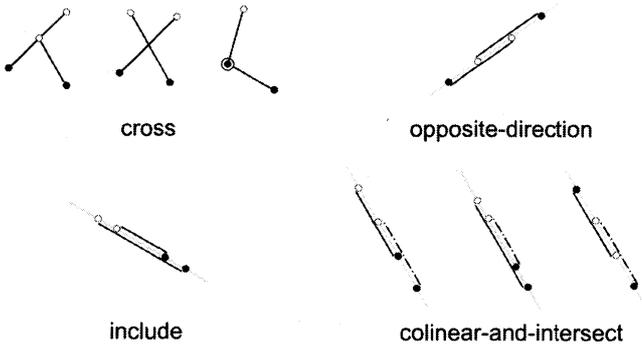


図 3: G の 2 辺の関係でありえないもの.

• Case 2. $M \neq M'$.

- (cross) \overline{ab} と $\overline{a'b'}$ が点 p で交わる.
- (colinear-and-intersect) a, b, a', b' が同一直線上に位置し, $\overline{ab} \cap \overline{a'b'} \neq \emptyset$.

$\tilde{e} = (a, b'), \tilde{e}' = (a', b)$ と置く.

• Case 1. $M = M'$. $W = M \setminus \{e, e'\} \cup \{\tilde{e}, \tilde{e}'\}$ と置く. 明らかに $W \in \mathcal{U}(A, B)$.

- (cross) 三角不等式より, $d(a, b') + d(a', b) < d(a, p) + d(p, b) + d(a', p) + d(p, b') = d(a, b) + d(a', b')$. したがって, $d(W) = d(M \setminus \{e, e'\} \cup \{\tilde{e}, \tilde{e}'\}) = d(M) - \{d(a, b) + d(a', b')\} + \{d(a, b') + d(a', b)\} < d(M)$. これは $M \in \mathcal{M}(A, B)$ に矛盾する.
- (opposite-direction) (cross) の場合と同様.
- (include) これは $M \in \mathcal{M}(A, B)$ に矛盾する.

• Case 2. $M \neq M'$.

- (cross) $C = (M \oplus M') \setminus \{e, e'\} \cup \{\tilde{e}, \tilde{e}'\}$ と置く. C の各連結成分は交互閉路を成し, (cross) の場合と同様にして $d(C) < d(M \oplus M')$ が成り立つ. したがって, $W, W' \in \mathcal{U}(A, B)$ で $d(W \oplus W') < d(M \oplus M')$ かつ $M \cap M = W \cap W'$ を満たすものが存在す

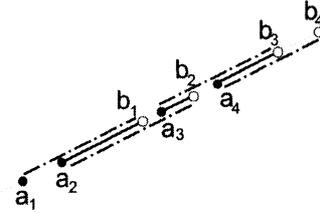


図 4: folded-path の例.

る. (W と W' の辺を C の辺を交互閉路から交互に選び, 残りの辺は W, W' とともに $M \cap M'$ と同じにすればよい.) したがって, $d(W) + d(W') = d(W \oplus W') + 2d(W \cap W') < d(M \oplus M') + 2d(M \cap M') = d(M) + d(M')$. さらに, $M, M' \in \mathcal{M}(A, B)$ であるから $d(M) = d(M')$ よって, $d(W) < d(M)$ または, $d(W') < d(M)$. これは $M \in \mathcal{M}(A, B)$ に矛盾する.

- (colinear-and-intersect) $M \oplus M'$ の各連結成分は交互閉路を成すが, この場合, Case 1 で示したように, 同一のマッチングに含まれる 2 辺が (cross) もしくは (opposite-direction) の関係になることができないため交互閉路を成すことができない.

□

補題 1 より以下によって, G の平面グラフ表現 $D(G)$ を定義する. G の交互パス $a_1 b_1 \dots a_m b_m$ で, 任意の $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ に対して, $a_{i+1} \in \overline{a_i b_i}$ かつ $b_i \in \overline{a_{i+1} b_{i+1}}$ を満たすものを folded-path と呼ぶ (図 4 参照). 任意の辺は長さ 1 の folded-path である. そのようなパスで極大な物を maximal folded-path と呼ぶ. $D(G)$ は G の各 maximal folded-path aPb を \overline{ab} で置き換えることによって生成されるグラフである. $D(G)$ の 2 辺は端点でしか交わらないので, $D(G)$ は平面グラフである (図 5 参照). また, aPb の内点からは枝分かれがない (内点の次数が 2 である) ため, 任意の $D(G)$ の完全マッチングに対して, 対応する G の完全マッチングが存在する.

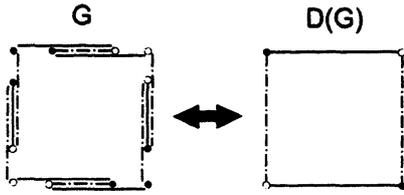


図 5: G と $D(G)$ の関係.

以下, G の各連結成分 $G_i = (V_i, E_i)$, $V_i = (A_i, B_i)$ について議論する. 上述の議論より, 以下が分かる. ただし, グラフが elementary であるとは, 完全マッチングの和集合から成る部分グラフが連結であることである.

補題 2. G_i は bipartite elementary.

補題 3. $D(G_i)$ は plane bipartite elementary.

さらに, 以下を述べるおく.

定理 1. [3] Elementary bipartite graph は 2 連結.

定理 2. [1] 頂点数 4 以上の 2 連結平面グラフにおいて, どの領域も閉路で囲まれている.

以上より, $D(G_i)$ の無限平面に対応する閉路を考えることができる. その閉路に対応する G_i の閉路を G_i の外周と呼ぶ. また, 外周は 2 つのマッチングからなる交互閉路であるが, そのうち $D(G_i)$ の右回りの方向のマッチングに対応する G_i のマッチングを G_i の clockwise matching と呼び, $CWM(A_i, B_i)$ で表す. また, G の clockwise matching を $CWM(A, B) = \bigcup_i CWM(A_i, B_i)$ によって定義する.

$CWM(A, B)$ を用いて, マッチング $M_{A,B}$ を以下で定義する.

$$M_{A,B} = \begin{cases} \emptyset & \text{if } A = B = \emptyset \\ E \cup CWM(A \setminus A', B \setminus B') & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $E = CWM(A, B)$, $(A', B') = V(E)$.

ただし, 辺集合 $E \subseteq A \times B$ に対して,

$$V(E) = (X, Y).$$

$$\text{where } X = \{a | (a, b) \in E\}, Y = \{b | (a, b) \in E\}$$

である. また, $M_{A,B}$ を用いて, ψ を以下で定義する.

$$\psi(A, B) = \begin{cases} o & \text{if } \exists a \in A \text{ s.t. } a \in \overline{ob} \\ b & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $b = M_{A,B}(o)$.

$M_{A,B}$ の定義から ψ が座標系非依存性を満たすことは明らかである. また, 以下の定理が成り立つ.

定理 3. $M_{A,B} \in \mathcal{M}(A, B)$.

定理 4. $M_{A,B}$ は実行非依存である.

定理 5. 任意の $A, B \in \mathcal{L}_n$ に対して ψ は A から B を形成する.

なお, これらの証明の詳細については [2] を参照のこと.

参考文献

- [1] R. Diestel: Graph Theory, Second Edition, Springer-Verlag (2000)
- [2] N. Fujinaga, H. Ono, S. Kijima, and M. Yamashita: Pattern formation through optimum matching by oblivious CORDA robots. *OPODIS*, **14**, pp. 1–15 (2010)
- [3] L. Lovasz and M. Plummer: Matching Theory, AMS Chelsea Publishing (2009)
- [4] I. Suzuki and M. Yamashita: Distributed anonymous mobile robots: Formation of geometric patterns. *SIAM Journal on Computing*, **28**, pp. 1347–1363 (1999)
- [5] H. Zhang and F. Zhang: Plane elementary bipartite graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **105**, pp. 291–311 (2000)