数理解析研究所講究録
第 1753 巻 2011 年 90-95

バナッハ空間におけるskewnessについて[1]

三谷健一 (岡山県立大学情報工学部)
斎藤吉助 (新潟大学理学部)

1 序文

Banach空間の定数として, von Neumann-Jordan定数, James定数, the modulus of convexityなど多く存在する. これらは幾何学的構造を調べる際有効な道具となっている. また, 定数自身の相互関係についても研究が行われている ([11, 13, 15, 16, 17]). Fitzpatrick-Reznick[8] は次の定数を定義した: Banach 空間 X に対して,

$$s(X) = \sup\left\{ \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x+ty\| - \|y+tx\|}{t} : \|x\| = \|y\| = 1 \right\}.$$

この定数を X の skewness と言う. 彼らは, この定数を用いた Hilbert 空間の特徴づけ, uniformly non-square 性の特徴づけを行い, また $L_p(1 \leq p \leq \infty)$ 空間における skewness を計算した.

本講演では, 一般の Banach 空間における skewness と幾何学的定数の一つである James 定数との関係についての最近の結果を報告する.

X を Banach 空間とする. X が uniformly non-square であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して

$$\|x\| = \|y\| = 1,\ \left\|\frac{x-y}{2}\right\| > 1-\delta \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$$

であるときを言う. また, X の James 定数を

$$J(X) = \sup\left\{ \min\left(\|x+y\|, \|x-y\|\right) : x, y \in X,\ \|x\| = \|y\| = 1 \right\}.$$

と定義する ([9]).

[1]2000 *Mathematics Subject Classification.* 46B20.

Keywords. skewness. James constant. the modulus of convexity. uniformly non-square.

命題 1 ([9]) (i) 任意の *Banach* 空間 X に対して $\sqrt{2} \leq J(X) \leq 2$.
(ii) X が *uniformly non-square* であることと $J(X) < 2$ は同値.
(iii) 任意の *Hilbert* 空間 X に対して $J(X) = \sqrt{2}$ である.
(iv) $1 \leq p \leq \infty$ とする. このとき, $J(L_p) = \max\{2^{1/p}, 2^{1/p'}\}$, ここで $1/p + 1/p' = 1$.

2 Skewness

Banach 空間の skewness の性質を述べる. [8] にあるように,

$$s(X) = \sup\left\{\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle : x, y \in X, \|x\| = \|y\| = 1\right\}.$$

ここで

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \quad (x, y \in X).$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は X が smooth のとき, Ritt[14] における generalized inner product である. 実際, X が Hilbert 空間のとき, $(\cdot, \cdot)$ を X の内積とすると,

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \frac{1}{2} \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x + ty\|^2 - \|x\|^2}{t} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x\|^2 + 2t(x, y) + t^2\|y\|^2 - \|x\|^2}{t} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{t \to 0^+} (2(x, y) + t\|y\|^2) \\
&= (x, y).
\end{aligned}$$

X が Hilbert 空間ならば差 $\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle$ は 0 であるが, 一般の Banach 空間では 0 になるとは限らない.

例.([8]) 2 次元空間 ℓ_∞^2 を考える. $0 < \alpha < 1$ とする. $x = (1, \alpha - 1), y = (1 - \alpha, 1)$ とおく. $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$. また $t > 0$ (ただし, 十分小) とすると

$$\|x + ty\|_\infty = 1 + t(1 - \alpha), \quad \|y + tx\|_\infty = 1 + t(\alpha - 1).$$

よって, $\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle = 2(1 - \alpha) > 0$.

Skewness の性質として次が知られている.

命題 2 ([8]) (i) *Banach*空間 X において $0 \leq s(X) \leq 2$.

(ii) X が *Hilbert*空間であることと $s(X) = 0$ は同値.

(iii) X^* を X の双対空間とする. このとき $s(X^*) = s(X)$.

(iv) $s(L_1) = s(L_\infty) = 2, s(L_2) = 0$. $2 < p < \infty$ に対して

$$s(L_p) = \max_{t>0} \frac{2(t - t^{p-1})}{1 + t^p}.$$

3 Skewness と James 定数

Banach 空間における uniformly non-square 性の度合いを表す James 定数と skewness との関係を考える. Banach 空間 X に対して, 次の modulus of smoothness を定義する:

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\|}{2} - 1 : x, y \in X, \|x\| = \|y\| = 1\right\}.$$

Baronti-Papini[4] は次を示した.

定理 3 ([4]) X を *Banach*空間とする. このとき,

$$s(X) \leq 2\rho_X(1).$$

Takahashi-Kato[16] は $\rho_X(1)$ と $J(X)$ の関係を与えた.

定理 4 ([16]) X を *Banach*空間とする. このとき,

$$\rho_X(1) \leq 2\left\{1 - \frac{1}{J(X)}\right\}.$$

上記の 2 つの結果から次が得られる.

定理 5 X を *Banach*空間とする. このとき,

$$s(X) \leq 4\left\{1 - \frac{1}{J(X)}\right\}.$$

また, 次の関係が得られる.

補題 6 X を *Banach* 空間とする. このとき, 任意の $0 < t \leq 1$ なる t に対して

$$s(X) \geq \frac{2(J(X) - 2 + t - t^2)}{t(1+t)}.$$

関数

$$f(t) = \frac{2(J(X) - 2 + t - t^2)}{t(1+t)}$$

の最大値を求めることにより次が得られる.

定理 7 X を *Banach* 空間とする. このとき

$$s(X) \geq 2 + 4(2 - J(X)) - 4\sqrt{(2 - J(X))(4 - J(X))}.$$

以上の定理をまとめると,

定理 8 X を *Banach* 空間とする. このとき

$$2 + 4(2 - J(X)) - 4\sqrt{(2 - J(X))(4 - J(X))} \leq s(X) \leq 4\left\{1 - \frac{1}{J(X)}\right\}.$$

この定理から $s(X) = 2$ と $J(X) = 2$ が同値であることがわかる. 従って次が得られる.

系 9 ([8]) X を *Banach* 空間とする. このとき X が *uniformly non-square* であることと $s(X) < 2$ は同値である.

参考文献

[1] D. Amir, *Characterizations of inner product spaces,* Birkhauser Verlag, Basel, Switzerland, 1986.

[2] J. Banas and B. Rzepka, *Functions related to convexity and smoothness of normed spaces,* Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **46** (1997), no. 3, 395–424.

[3] B. Beauzamy, *Introduction to Banach spaces and their geometry,* 2nd ed., North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1985.

[4] M. Baronti and P. L. Papini, *Projections, skewness and related constants in real normed spaces,* Math. Pannonica, **3** (1992), 31–47.

[5] E. Casini, *About some parameters of normed linear spaces,* Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **80** (1986), 11–15.

[6] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., **40** (1936), 396–414.

[7] J. A. Clarkson, *The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space*, Ann. of Math., **38** (1937), 114–115.

[8] S. Fitzpatrick and B. Reznick, *Skewness in Banach spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., **275** (1983), 587-597.

[9] J. Gao and K. S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces,* J. Aust. Math. Soc., A **48** (1990), 101–112.

[10] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces,* Ann. of Math., **80** (1964), 542-550.

[11] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, *On James and Jordan–von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces,* Stud. Math., **144** (2001), 275–295.

[12] J. Lindenstrauss, *On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces,* Michigan Math. J., **20** (1963), 241–252.

[13] L. Y. Nikolova, L. E. Persson and T. Zachariades, *A study of some constants for Banach spaces*, C. R. Acad. Bulg. Sci., **57** (2004), 5–8.

[14] R. K. Ritt, *A generalization of inner product,* Michigan Math. J., **3** (1955), 23–26.

[15] Y. Takahashi, *Some geometric constants of Banach spaces: a unified approach,* Proceedings of the 2nd international symposium on Banach and function spaces

II, Kitakyushu, Japan, September 14–17, 2006. Yokohama Publishers. 191–220 (2008).

[16] Y. Takahashi and M. Kato, *A simple inequality for the von Neumann–Jordan and James constants of a Banach space,* J. Math. Anal. Appl., **359** (2009), 602–609.

[17] C. Yang and F. Wang, *On a new geometric constant related to the von Neumann–Jordan constant,* J. Math. Anal. Appl., **324** (2006), 555–565.