数理解析研究所講究録
第 1765 巻 2011 年 154-167

UC 階層とモノドロミー保存変形，超幾何函数

津田 照久（TSUDA, Teruhisa）

九州大学大学院数理学研究院*
Faculty of Mathematics, Kyushu University

概 要

KP 階層は，ソリトン理論において最も重要な位置を占める非線形偏微分方程式系であり，自然数の重みの時間発展を持つ斉次な無限次元可積分系を成す．それに対して，UC 階層は「KP 階層の斉次性を保ったまま負の重みの無限変数を付け加えた拡張」ということができる．この小文では，UC 階層の相似簡約から自然に現れるモノドロミー保存変形型の有限次元可積分系について論ずる．得られた方程式（=シュレジンジャー系）は，パンルヴェVI 型方程式やガルニエ系を含むような興味深いクラスを与え，多項式ハミルトン系による統一的な表示を持つ．積分表示と捻れドラム理論に基づいた超幾何函数解の構成についても紹介する．詳細は文献 [26, 28] を参照されたい．

1 はじめに—パンルヴェ方程式の特殊多項式

パンルヴェII 型方程式

$$(P_{\mathrm{II}}) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}x^2} = 2q^3 + xq + a$$

は定数パラメタ $a = 0$ のとき，特殊解 $q \equiv 0$ を許す．ベックルント変換（双有理変換の対称性）

$$\pi : q \mapsto -q, \quad a \mapsto -a,$$
$$r_1 : q \mapsto q + \frac{a - \frac{1}{2}}{q^2 - \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{2}}, \quad a \mapsto 1 - a.$$

を用いると，パラメタ a が整数のとき P_{II} は有理解を持つことが分かる．驚くべきことに，有理解の分子と分母に現れる因子はモニックな整数係数多項式となることが観察される．これをヤブロンスキー・ヴォロビエフ多項式と呼ぶ．初めのいくつかは $T_1(x) = x, T_2(x) = x^3 + 4, T_3(x) = x^6 + 20x^3 - 80, T_4(x) = x(x^9 + 60x^3 + 11200), \ldots$ 等である．この多項式の正体は，次

* （平成 23 年 4 月より）一橋大学大学院経済学研究科所属

のようにして，ソリトン理論の立場から自然に理解することができる．典型的なソリトン方程式の一つである（変形）**KdV** 方程式

$$4\frac{\partial v}{\partial t} = -6v^2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \tag{1}$$

を考えよう．変数の次数を $\deg x = 1, \deg t = 3, \deg v = -1$ と数えると (1) は斉次式ゆえ，自己相似解 $v(x,t) = (-3t/4)^{-1/3}q((-3t/4)^{-1/3}x)$ を許す．このとき，函数 $q = q(x)$ が P_{II} を満たすことは容易に確かめられる（[1] 参照）．一方，(1) は 2-コアのヤング図形 $(n \geq n-1 \geq \ldots \geq 2 \geq 1)$ に対するシューア函数で表される有理解，しかも自己相似解，を持つ．この事実は KdV 方程式系が 2-被約の KP 階層であることに基づく（[14] 参照）．以上をまとめると，多項式 $T_n(x)$ がシューア函数の特殊化であることが明らかになる (梶原・太田 [8]).

II 型以外のパンルヴェ方程式に対しても，有理解（又は代数解）に付随した類似の多項式の系列が生成できる．IV 型については岡本多項式，III, V, VI 型については梅村多項式と総称される一連の特殊多項式は，組み合わせ論や表現論の視点から興味深い性質を持つことが知られている（[29] 参照）．先程と同様に，P_{IV} がブジネ方程式一これもやはり KdV 方程式のように KP 階層の理論の範疇にある一の相似簡約であることから，岡本多項式の正体が 3-コアのヤング図形に対するシューア函数であることが分かる（[9, 16] 参照）．

ところが $P_{\mathrm{V}}, P_{\mathrm{VI}}$ の梅村多項式については状況が一変する．即ち，増田等 [12, 13] によって発見されたように，シューア函数ではなく，その一般化である普遍指標（特に 2-コアのヤング図形の組に付随したもの）が現れたのである．また，ガルニエ系一P_{VI} の多変数版一に対しても，普遍指標による解が（後述の頂点作用素を用いて）構成されている [24]．実はこれら一連の結果は，**UC** 階層と呼ぶ KP 階層の拡張を考えることによって，系統的に説明することができる．

2　普遍指標と UC 階層

ヤング図形の組 $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l), \mu = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{l'})$ に対し，普遍指標 $S_{[\lambda,\mu]}$ を捻れたヤコビ・トゥルディ公式（小池 [10]）

$$S_{[\lambda,\mu]} = \det\begin{pmatrix} q_{\mu_{l'-i+1}+i-j}, & i \leq l' \\ p_{\lambda_{i-l'}-i+j}, & i > l' \end{pmatrix}_{1\leq i,j\leq l+l'} \tag{2}$$

によって定義する．但し $p_n = p_n(\boldsymbol{x})$ は母函数

$$e^{\xi(\boldsymbol{x},k)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n(\boldsymbol{x})k^n, \quad \xi(\boldsymbol{x},k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n$$

で決まる変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ に関する多項式とし，一方 $q_n = q_n(\boldsymbol{y})$ は p_n において単純に $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ に置き換えたものとする．2 系列の無限変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ について，各々 $\deg x_n = n, \deg y_n = -n$ と次数を勘定すると，例えば

$$S_{[\emptyset,\emptyset]} = 1, \quad S_{[(1),\emptyset]} = x_1, \quad S_{[(1),(1)]} = x_1y_1 - 1,$$
$$S_{[(2,1),(1)]} = \left(\frac{x_1{}^3}{3} - x_3\right)y_1 - x_1{}^2, \quad \ldots$$

という風に $S_{[\lambda,\mu]}$ は次数がヤング図形の面積の差 $|\lambda| - |\mu|$ に等しい斉次多項式になる．普遍指標は，シューア函数の自然な拡張であり，一般線形群の既約有理表現の指標を与える．実際，$\mu = \emptyset$ とおくと，普遍指標は文字通りシューア函数に帰着する：

$$S_{[\lambda,\emptyset]} = \det\left(p_{\lambda_i - i + j}\right) = S_{\lambda}.$$

また GL_r の既約有理表現は，$l + l' \leq r$ なるヤング図形の組 $[\lambda,\mu]$ で指定できるので，それを $\rho_{[\lambda,\mu]}$ と表すことにする．このとき $\mathrm{tr} \circ \rho_{[\lambda,\mu]} = S_{[\lambda,\mu]}$ が成り立つ．但し，変数の対応は $g \in GL_r$ の固有値 $(t_1, \ldots, t_r)$ を用いて

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} t_i^{\,n}, \quad y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} t_i^{-n}$$

とおいた．

無限次元可積分系の理論と一般線形群の表現論は密接に関係している．些か標語的だが，KP 階層はシューア函数を特徴付ける無限次元可積分系と考えられ，その普遍指標への対応物が UC 階層に他ならない．

互いに可換な頂点作用素の組

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} X_n^{\pm} k^n = e^{\pm\xi(x - \tilde{\partial}_y, k)} e^{\mp\xi(\tilde{\partial}_x, k^{-1})},$$
$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} Y_n^{\pm} k^{-n} = e^{\pm\xi(y - \tilde{\partial}_x, k^{-1})} e^{\mp\xi(\tilde{\partial}_y, k)}$$

を導入しよう．但し，記号

$$\tilde{\partial}_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_3}, \ldots\right)$$

を用いた．

定義 1 ([23])．未知函数 $\tau = \tau(x, y)$ に対する 2 連立双線形方程式

$$\sum_{i+j=-1} X_i^{-}\tau \otimes X_j^{+}\tau = \sum_{i+j=-1} Y_i^{-}\tau \otimes Y_j^{+}\tau = 0$$

を **UC 階層**（の双線形恒等式）と呼ぶ．

函数 τ が変数 y に依存しない場合，UC 階層は KP 階層に帰着する．UC 階層の解空間は佐藤グラスマン多様体—KP 階層の解空間—の直積を成し，特に斉次多項式解の全体は普遍指標の集合に一致する（表 1 参照）．実は，多項式とは限らない一般の斉次解を考えることから，モノドロミー保存変形との繋がりが見えてくる（第 4 節）．

3　モノドロミー保存変形

L 連立 1 階線形常微分方程式

$$\text{(F)} \qquad \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}z} = \sum_{i=0}^{N+1} \frac{A_i}{z - s_i}\Psi \quad (A_i : L \times L \text{ 行列})$$

表 1: KP 階層と UC 階層

	KP 階層	UC 階層
独立変数	$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ $\deg x_n = n$	$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots)$ $\deg x_n = n, \deg y_n = -n$
従属変数	$\tau = \tau(\boldsymbol{x})$	$\tau = \tau(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
双線形恒等式	$\sum_{i+j=-1} X_i^- \tau \otimes X_j^+ \tau = 0$	$\sum_{i+j=-1} X_i^- \tau \otimes X_j^+ \tau = 0$ $\sum_{i+j=-1} Y_i^- \tau \otimes Y_j^+ \tau = 0$
頂点作用素	$\sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n^\pm k^n = e^{\pm\xi(x,k)} e^{\mp\xi(\tilde{\partial}_x, k^{-1})}$	$\sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n^\pm k^n = e^{\pm\xi(x-\tilde{\partial}_y,k)} e^{\mp\xi(\tilde{\partial}_x, k^{-1})}$ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} Y_n^\pm k^{-n} = e^{\pm\xi(y-\tilde{\partial}_x,k^{-1})} e^{\mp\xi(\tilde{\partial}_y, k)}$
斉次多項式解	$S_\lambda(\boldsymbol{x})$：シューア函数	$S_{[\lambda,\mu]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$：普遍指標
解空間	SGM：佐藤グラスマン多様体	SGM × SGM

はリーマン球面 $\mathbb{P}^1$ 上に $N+3$ 個の確定特異点 $S = \{s_0 = 1, s_1, \ldots, s_N, s_{N+1} = 0, s_{N+2} = \infty\}$ を持つフックス型方程式である．正則点 $z = p \in X = \mathbb{P}^1 \setminus S$ を始点とする閉曲線に沿った解析接続は，(F) の解の基本系に対する線形変換を引き起こす．こうして得られる基本群 $\pi_1(X, p)$ の L 次元表現（の共役類）のことを (F) のモノドロミーという．さて，特異点の位置 s_i を動かしたとき，(F) のモノドロミーが変化しないように係数 $A_j = A_j(s)$ の s-依存性を決定しよう．

定理 2 (古典的). (F) のモノドロミーが s_i に依らない為の必要十分条件は，z についての有理函数 $B_i(z)$ が存在して，変形方程式

(D)
$$\frac{\partial \Psi}{\partial s_i} = B_i \Psi$$

が成り立つことである．

(F) と (D) の完全積分可能条件から得られる，A_j に対する s についての非線形偏微分方程式系をモノドロミー保存変形と呼ぶ．適当な規格化の下，有理函数 $B_i(z)$ は A_j で具体的に表される．無限遠点の留数行列 $A_{N+2} = -\sum_{i=0}^{N+1} A_i$ を対角化しておくのが通例で，このとき

$$B_i = \frac{A_i}{s_i - z}$$

となる．結局，(F) のモノドロミー保存変形はシュレジンジャー系 [19]

$$\frac{\partial A_i}{\partial s_i} = -\sum_{j\neq i} \frac{[A_i, A_j]}{s_i - s_j}, \quad \frac{\partial A_i}{\partial s_j} = \frac{[A_i, A_j]}{s_i - s_j} \quad (i \neq j)$$

によって記述される．最初の非自明な例が $L=2, N=1$ のときであり，パンルヴェVI型方程式

$$(P_{\mathrm{VI}})\qquad \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}s^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q-1}+\frac{1}{q-s}\right)\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\right)^2-\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{q-s}\right)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}$$
$$+\frac{q(q-1)(q-s)}{s^2(s-1)^2}\left(a+b\frac{s}{q^2}+c\frac{s-1}{(q-1)^2}+d\frac{s(s-1)}{(q-s)^2}\right)$$

に帰着する．

4 UC 階層の相似簡約

頂点作用素で結ばれた UC 階層の隣接する解の列には，元の双線形恒等式に由来する類似の関係式が成り立つ．典型的には

$$\tau_{m,n}\otimes\tau_{m+1,n+1}=\sum_{i+j=0}X_i^-\tau_{m+1,n}\otimes X_j^+\tau_{m,n+1}$$

のような方程式である．これらは KP 階層の用語に倣えば「変形 UC 階層」とでも呼ぶべきものである．ここで，添字が $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ のように 2 次元分あるのは，互いに可換な頂点作用素の存在の反映である．実際，KP 階層の場合は

$$\sum_{i+j=-2}X_i^-\tau_n\otimes X_j^+\tau_{n+1}=0$$

となる．

さて，UC 階層の解の列 $\{\tau_{m,n}(x,y)\}$ に対する付帯条件として斉次性：$E\tau_{m,n}=d_{m,n}\tau_{m,n}$ と周期性：$\tau_{m+L,n}=\tau_{m,n+L}=\tau_{m,n}$ を課してみよう．但し

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}\left(nx_n\frac{\partial}{\partial x_n}-ny_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right)$$

は次数を測る微分作用素である．例えば $ES_{[\lambda,\mu]}=(|\lambda|-|\mu|)S_{[\lambda,\mu]}$ となる．さらに，独立変数 x_k, y_k を有限個の新たな変数 $\boldsymbol{t}=(t_0,t_1,\ldots,t_N)$ の「冪和」

$$(3)\qquad x_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{N}\theta_i t_i{}^n,\quad y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{N}\theta_i t_i{}^{-n}$$

として読み替える（独立変数の特殊化）．斉次性の条件より，$t_0=1$ としても一般性を失わないことを注意しておく．以上の操作の結果，UC 階層から得られる非線形偏微分方程式系を $\mathcal{G}_{L,N}$ と表す．

定理 3. $\mathcal{G}_{L,N}$ はモノドロミー保存変形である．

<u>証明の概略</u>. 元の双線形恒等式から，波動函数

$$\psi_{m,n} = \frac{\tau_{m,n-1}(\boldsymbol{x} - [k^{-1}], \boldsymbol{y} - [k])}{\tau_{m,n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} e^{\xi(\boldsymbol{x},k)}$$

(k：スペクトル変数) の満たす方程式として，

$$\begin{cases} \text{フックス型方程式 (F)} & (z = k^{-L}) \\ \text{変形方程式 (D)} & (s_i = t_i{}^L) \end{cases}$$

の両方が自ずと従う．ここで記号 $[k] = (k, k^2/2, k^3/3, \ldots)$ を用いた． □

正確には「$N+3$ 個の確定特異点のうち $N+1$ 個の近傍で $L-1$ 次元の正則解を持つ」ような (F) が現れる．あるいは，各特異点での留数行列の固有値の縮退の様子をヤング図形を並べて表したものをスペクトル型と呼ぶが，この場合は

$$(1, 1, \ldots, 1), (1, 1, \ldots, 1), \underbrace{(L-1, 1), \ldots, (L-1, 1)}_{N+1\text{ 個}}$$

のようになる．

興味深いことに，$\mathcal{G}_{L,N}$ は多時間ハミルトン系

$$(\mathcal{H}_{L,N}) \qquad \frac{\partial q_n^{(i)}}{\partial s_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_n^{(i)}}, \quad \frac{\partial p_n^{(i)}}{\partial s_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_n^{(i)}} \quad \begin{pmatrix} 1 \le i, j \le N \\ 1 \le n \le L-1 \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ハミルトン函数 H_i は

$$s_i H_i = \sum_{n=0}^{L-1} e_n q_n^{(i)} p_n^{(i)} + \sum_{j=0}^{N} \sum_{0 \le m < n \le L-1} q_m^{(i)} p_m^{(j)} q_n^{(j)} p_n^{(i)} + \sum_{j=0\ (j \ne i)}^{N} \frac{s_j}{s_i - s_j} \sum_{m,n=0}^{L-1} q_m^{(i)} p_m^{(j)} q_n^{(j)} p_n^{(i)}$$

なる正準変数についての多項式である．ここで $s_0 = q_n^{(0)} = q_0^{(i)} = 1$, $p_n^{(0)} = \kappa_n - \sum_{i=1}^{N} q_n^{(i)} p_n^{(i)}$, $p_0^{(i)} = \theta_i - \sum_{n=1}^{L-1} q_n^{(i)} p_n^{(i)}$ なる略記を用いた．つまり，ハミルトン函数 H_i は q と p に関して各々 3 次と 2 次の多項式である．また，複素パラメタ $(e, \kappa, \theta) = (e_0, \ldots, e_{L-1}, \kappa_0, \ldots, \kappa_{L-1}, \theta_0, \ldots, \theta_N)$ は線形方程式 (F) の確定特異点での指数に対応しており，２つの関係式

$$\sum_{n=0}^{L-1} e_n = \frac{L-1}{2}, \quad \sum_{n=0}^{L-1} \kappa_n = \sum_{i=0}^{N} \theta_i$$

が付随するので，$\mathcal{H}_{L,N}$ の含む定数パラメタの個数は正味 $2L+N-1$ と分かる．特に $L=2$ の場合，$\mathcal{H}_{L,N}$ はガルニエ系に等価であり，さらに $N=1$ とすると P_{VI} のハミルトン系表示が再現される．

なお，変数変換 (3) の下

$$\tau_{m,n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sigma_{m,n}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{t})$$

とおくと，$\mathcal{H}_{L,N}$ の正準変数と UC 階層の τ 函数の関係は

$$(4) \qquad q_n^{(i)} = \left(\frac{t_i}{t_0}\right)^n \frac{\sigma_{n,-n}(\theta_i + 1)\sigma_{0,0}(\theta_0 + 1)}{\sigma_{0,0}(\theta_i + 1)\sigma_{n,-n}(\theta_0 + 1)}, \quad q_n^{(i)} p_n^{(i)} = \frac{\theta_i}{L} \frac{\sigma_{n-1,-n-1}(\theta_i - 1)\sigma_{n,-n}(\theta_i + 1)}{\sigma_{n,-n-1}\sigma_{n-1,-n}}$$

で与えられる．但し，函数 $\sigma_{m,n}$ の含む定数パラメタ $\boldsymbol{\theta}=(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_N)$ の内，例えば θ_i のみを ± 1 ずらしたものを $\sigma_{m,n}(\theta_i\pm 1)$ と表すような略記を用いた．

構成からハミルトン系 $\mathcal{H}_{L,N}$ の様々な性質がUC階層から導かれることが大切である．

(i) τ 函数と広田の双線形形式．UC階層の双線形恒等式から直ちに

$$
\begin{aligned}
&(t_i-t_j)\sigma_{m,n}\sigma_{m+1,n+1}(\theta_i+1,\theta_j+1)\\
&\qquad = t_i\sigma_{m+1,n}(\theta_i+1)\sigma_{m,n+1}(\theta_j+1)-t_j\sigma_{m+1,n}(\theta_j+1)\sigma_{m,n+1}(\theta_i+1),\\
&(t_iD_i+\theta_i)\,\sigma_{m+1,n}\cdot\sigma_{m,n+1}=\theta_i\sigma_{m,n}(\theta_i-1)\sigma_{m+1,n+1}(\theta_i+1),\\
&\Big((t_j-t_i)D_i+\theta_i\Big)\sigma_{m,n}(\theta_j-1)\cdot\sigma_{m+1,n}=\theta_i\sigma_{m,n}(\theta_i-1)\sigma_{m+1,n}(\theta_i+1,\theta_j-1)
\end{aligned}
$$

が得られる（D_i は $t_i=s_i{}^{1/L}$ に関する広田微分の記号を表す）．この双線形方程式系は変数変換 (4) を通して $\mathcal{H}_{L,N}$ と等価である．

(ii) 普遍指標による解．$S_{[\lambda,\mu]}$ はUC階層の斉次多項式解ゆえ簡約化の過程で生き残り，$\mathcal{H}_{L,N}$ の解を与える．なお周期条件の反映から，λ,μ として L-コアのヤング図形が現れる．

(iii) ワイル群対称性．頂点作用素はUC階層の解の対称性を与えるが，その作用の順番の置換が $\mathcal{H}_{L,N}$ の双有理的正準変換の起源の一つである．

(iv) 線形補助問題（ラックス形式）．上の定理3の証明の通り，UC階層の波動函数を考えればよい．元の線形常微分方程式とその変形方程式がともに双線形恒等式のみから得られるので，系の両立条件の成立はあらかじめ保証されている．

注. KP階層やUC階層のような無限次元可積分系に対して,「周期性」,「斉次性」,「独立変数の特殊化」の3つの簡約条件を課すことでパンルヴェ系のような有限次元可積分系を得る操作を相似簡約と呼ぶ．この小文ではモノドロミー保存変形の導出を考えたが，全く同様の構造は q-類似に対しても成り立つ．すなわち，変数変換 (3) の代わりにその q-類似

$$
x_n=\frac{\sum_i t_i{}^n-q^n\sum_j t_j{}^n}{n(1-q^n)},\quad y_n=\frac{\sum_i t_i{}^{-n}-q^{-n}\sum_j t_j{}^{-n}}{n(1-q^{-n})}
$$

を適用すれば良い．例えば，次のような q-差分方程式系 [25]

$$
\begin{aligned}
\overline{f}_{m,n}&=\frac{c_{m,n}}{c_{m,n+1}}\frac{(g_{m+1,n}-\alpha)(g_{m,n+1}-c_{m,n+1}\beta)}{(g_{m,n+1}-\alpha)(g_{m+1,n}-c_{m+1,n}\beta)}f_{m+1,n+1},\\
\overline{g}_{m,n}&=\frac{c_{m+1,n}}{c_{m+1,n+1}}\frac{\left(\overline{f}_{m+1,n}-q\gamma\right)\left(\overline{f}_{m,n+1}-c_{m,n+1}\delta\right)}{\left(\overline{f}_{m,n+1}-q\gamma\right)\left(\overline{f}_{m+1,n}-c_{m+1,n}\delta\right)}g_{m+1,n+1}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

がUC階層の相似簡約として得られる．ここで $\alpha\delta/\beta\gamma=1$ を満たす $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ と $c_{m,n}$ はパラメタで，$f_{m,n}$ と $g_{m,n}$ が未知函数である．また，q-差分方程式の離散的時間発展を

$$
T:(\alpha,\beta,\gamma,\delta;f_{m,n},g_{m,n})\mapsto\left(q\alpha,\beta/q,q\gamma,\delta/q;\overline{f}_{m,n},\overline{g}_{m,n}\right)
$$

と表した．添字 (m,n) について $(2,2)$ 周期性を課すと，q-パンルヴェVI型方程式

$$(q\text{-}P_{\rm VI}) \qquad \overline{f} = \frac{c_{1,1}}{f}\frac{(\alpha g-1)(g-c_{1,2}\beta)}{(g-\alpha)(\beta g-c_{1,2})}, \quad \overline{g} = \frac{c_{1,2}}{g}\frac{\left(q\gamma\overline{f}-1\right)\left(\overline{f}-c_{1,1}\delta\right)}{\left(\overline{f}-q\gamma\right)\left(\delta\overline{f}-c_{1,1}\right)}$$

$(f=f_{1,1},\, g=g_{1,2})$ が得られる．この意味で (5) は q-$P_{\rm VI}$ の高階拡張を与えている．

5 超幾何函数 $F_{L,N}$

多重指数 $s^{m} = \prod_{i=1}^{N} s_i^{m_i}$ の記法の下，無限級数

$$F_{L,N} = \sum_{m_i\geq 0} \frac{(\alpha_1)_{|m|}\cdots(\alpha_{L-1})_{|m|}(\beta_1)_{m_1}\cdots(\beta_N)_{m_N}}{(\gamma_1)_{|m|}\cdots(\gamma_{L-1})_{|m|}(1)_{m_1}\cdots(1)_{m_N}} s^{m}$$

によって N 変数の超幾何函数 $F_{L,N}(\alpha,\beta,\gamma;s)$ を定義する．ここで，$(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ （ポホハマの記号），$|m| = \sum_{i=1}^{N} m_i$ とした．次表のように，超幾何函数 $F_{L,N}$ は古典的に良く知られた対象を特別な場合として含んでいる．

(L,N)	超幾何函数 $F_{L,N}$
$(2,1)$	ガウスの ${}_2F_1$
$(L,1)$	トマエの ${}_LF_{L-1}$
$(2,N)$	アペル・ロリチェラの F_D

オイラー作用素

$$\delta_i = s_i\frac{\partial}{\partial s_i}, \quad \mathcal{D} = \sum_{i=1}^{N}\delta_i$$

を用いると，定義より直ちに $y=F_{L,N}$ の満たす超幾何微分方程式

$$(6) \qquad \left\{ s_i(\beta_i+\delta_i)\prod_{k=1}^{L-1}(\alpha_k+\mathcal{D}) - \delta_i\prod_{k=1}^{L-1}(\gamma_k-1+\mathcal{D}) \right\} y = 0$$

従うが，以下ではオイラー型積分表示

$$(7) \qquad F_{L,N} = \prod_{k=1}^{L-1}\frac{\Gamma(\gamma_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\gamma_k-\alpha_k)} \times \int_{\Delta_0}\Phi\varphi_0$$

を出発点に，等価な線形パフ系を構成することを考える．級数 $F_{L,N}$ は原点の近傍で収束して正則函数を定める．その解析接続を超幾何函数と呼ぶ訳だが，その特異性の起こる場所さえ，(1 変数の場合と異なり）超幾何微分方程式 (6) からは直接見て取れない．一方，線形パフ系（後述の定理 4）の形から，特異点は $s_i=0, s_i=1, s_i=\infty, s_i=s_j\ (i\neq j)$ に限ることが分かる．

まず上記の積分表示 (7) において，被積分形式は

$$\Phi = \prod_{k=1}^{L-1} u_k^{\lambda_k}(u_{k-1}-u_k)^{\mu_k}\prod_{i=1}^{N}(1-s_iu_{L-1})^{\nu_i}$$

$(u_0 = 1)$ なる $U = \mathbb{C}^{L-1} \setminus D$ 上の多価函数に

$$\varphi_0 = \frac{\mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_{L-1}}{u_{L-1} \prod_{k=1}^{L-1}(u_{k-1} - u_k)} \in \Omega^{L-1}(*D)$$

を乗じたものであり，積分域 $\Delta_0 = \{0 \le u_{L-1} \le \cdots \le u_2 \le u_1 \le 1\} \subset \mathbb{R}^{L-1}$ は $L-1$-単体である．但し，超平面の合併

$$D = \bigcup_{k=1}^{L-1}(\{u_k = 0\} \cup \{u_k = u_{k-1}\}) \cup \bigcup_{i=1}^{N}\{u_{L-1} = 1/s_i\}$$

は Φ の特異点集合であり，記号

$$\Omega^p(*D) = \{\,\text{高々 } D \text{ のみに極を持つ有理 } p\text{-形式}\,\}$$

を用いた．なお定数パラメタの対応は

$$\lambda_k = \begin{cases} \alpha_k - \gamma_{k+1} & (k \ne L-1) \\ \alpha_{L-1} & (k = L-1) \end{cases}, \quad \mu_k = \gamma_k - \alpha_k, \quad \nu_i = -\beta_i$$

とした．

さて，函数 $1/\Phi$ の多価性が決める U 上の局所系を $\mathcal{L}$（その双対を $\mathcal{L}^\vee$）とおく．この局所系を係数とする（コ）ホモロジー群の構造は次のようになる：

(i) $\dim H^p(U, \mathcal{L}) = \dim H_p(U, \mathcal{L}^\vee) = \begin{cases} N(L-1)+1 & (p = L-1) \\ 0 & (p \ne L-1) \end{cases}$

(ii) コホモロジー群 $H^{L-1}(U, \mathcal{L}) \cong \Omega^{L-1}(*D)/\nabla\Omega^{L-2}(*D)$ の基底は，$N(L-1)+1$ 個の微分形式

$$\varphi_0, \quad \varphi_n^{(i)} = \frac{\mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_{L-1}}{u_{L-1}(1 - s_i u_{L-1}) \prod_{k \ne n}(u_{k-1} - u_k)} \quad \begin{pmatrix} 1 \le i \le N \\ 1 \le n \le L-1 \end{pmatrix}$$

によって代表される．但し $\nabla = \mathrm{d} + \mathrm{d}\log\Phi\wedge$ は共変微分作用素である．

(iii) $H_{L-1}(U, \mathcal{L}^\vee)$ の基底 $=$ $U \cap \mathbb{R}^{L-1}$ の有界な部屋．

実際，任意のサイクル $\Delta \in H_{L-1}(U, \mathcal{L}^\vee)$ に対して超幾何積分

$$y_0 = \int_\Delta \Phi\varphi_0, \quad y_n^{(i)} = \int_\Delta \Phi\varphi_n^{(i)}$$

を考えると，線形微分方程式系

$$(s_i - 1)\frac{\partial y_0}{\partial s_i} = \beta_i\left(-y_0 + \sum_{m=1}^{L-1} y_m^{(i)}\right),$$

$$(s_i - s_j)\frac{\partial y_n^{(j)}}{\partial s_i} = \beta_i\left(y_n^{(i)} - y_n^{(j)}\right),$$

$$s_i\frac{\partial y_n^{(i)}}{\partial s_i} = -\alpha_n y_n^{(i)} + (\gamma_n - \alpha_n)\sum_{m=n+1}^{L-1} y_m^{(i)} + \frac{\gamma_n - \alpha_n}{s_i - 1}\left(-y_0 + \sum_{m=1}^{L-1} y_m^{(i)}\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{N} \frac{\beta_j s_j}{s_i - s_j}\left(y_n^{(j)} - y_n^{(i)}\right)$$

が成り立つ．定理としてまとめておこう．

定理 4. ベクトル値函数

$$\vec{y} = \vec{y}(s;\Delta) = {}^{\mathrm{T}}\left(y_0, y_1^{(1)}, \dots, y_{L-1}^{(1)}, \dots, y_1^{(N)}, \dots, y_{L-1}^{(N)}\right)$$

は階数 $N(L-1)+1$ の線形パフ系

$$\text{(P)} \qquad \mathrm{d}\vec{y} = \sum_{0 \le i < j \le N+1} C_{ij} \mathrm{d}\log(s_i - s_j)\,\vec{y}$$

を満たす（係数 C_{ij} はパラメタ $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ の 1 次式）．

特に原点で正則な (P) の解は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
y_0 &= cF_{L,N},\\
y_1^{(i)} &= \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{\gamma_1} cF_{L,N}(\beta_i + 1, \gamma_1 + 1),\\
y_2^{(i)} &= \frac{\alpha_1(\gamma_2 - \alpha_2)}{\gamma_1\gamma_2} cF_{L,N}(\alpha_1 + 1, \beta_i + 1, \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1), \quad \dots\\
y_n^{(i)} &= \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}(\gamma_n - \alpha_n)}{\gamma_1 \cdots \gamma_n} cF_{L,N}(\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_{n-1} + 1, \beta_i + 1, \gamma_1 + 1, \dots, \gamma_n + 1), \quad \dots
\end{aligned}$$

但し $c = \prod_{k=1}^{L-1} \Gamma(\alpha_k)\Gamma(\gamma_k - \alpha_k)/\Gamma(\gamma_k)$ とした．なお，隣接関係式（付録 A）を用いると，各 $y_n^{(i)}$ を y_0 の導函数の線形結合として表すこともできる．

6 $\mathcal{H}_{L,N}$ の超幾何函数解

多項式ハミルトン系 $\mathcal{H}_{L,N}$ の相空間の次元 $2N(L-1)$ は，対応するフックス型方程式 (F) のアクセサリ・パラメタの数に丁度等しい．$\mathcal{H}_{L,N}$ の初期値の空間は一般に複雑な代数多様体であるが，定数パラメタがある超平面上に制限された場合，射影空間 $\mathbb{P}^{N(L-1)}$ の点で径数づけられるような特殊解の族が存在する．次元の勘定は次表の通りである．

ハミルトン系 $\mathcal{H}_{L,N}$	相空間の次元 $= 2N(L-1)$ 定数パラメタは $2L+N-1$ 個
$F_{L,N}$ の超幾何系 (P)	パフ系の階数 $= N(L-1)+1$ 定数パラメタは $2L+N-2$ 個

以下の定理が成り立つ．

定理 5. $\kappa_0 - \sum_{i=1}^N \theta_i = 0$ のとき $\mathcal{H}_{L,N}$ は特殊解

$$q_n^{(i)} = 0, \quad p_n^{(i)} = -\theta_i \frac{y_n^{(i)}}{y_0}$$

を許す．但し $\{y_0, y_n^{(i)}\}$ は (P) の任意の解として，パラメタの対応は $\alpha_n = e_n - e_0, \beta_i = -\theta_i$, $\gamma_n = e_n - e_0 - \kappa_n$ である．

注. $P_{\mathrm{VI}}\ (=\mathcal{H}_{2,1})$, ガルニエ系 $(=\mathcal{H}_{2,N})$ の超幾何函数解は各々 Fuchs [5] と岡本・木村 [17] によって与えられた. P_{VI}-鎖 $(=\mathcal{H}_{L,1})$ についても最近, 鈴木 [21] によって独立に考察されている.

A 超幾何函数 $F_{L,N}$ の隣接関係式

ここでは $F_{L,N}$ の隣接関係式をまとめておく.

$$
\begin{aligned}
F_{L,N}(\alpha_n+1) &= \frac{\mathcal{D}+\alpha_n}{\alpha_n}F_{L,N},\\
F_{L,N}(\beta_i+1) &= \frac{\delta_i+\beta_i}{\beta_i}F_{L,N},\\
F_{L,N}(\gamma_n+1) &= \frac{\gamma_n}{\varepsilon_L}\left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial s_i}\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{L-1}(\mathcal{D}+\gamma_k-1)-\sum_{j=0}^{L-1}\varepsilon_j(\mathcal{D}+\gamma_n)^{L-1-j}\right\}F_{L,N},\\
F_{L,N}(\alpha_n-1) &= \frac{\alpha_n-1}{\varepsilon'_L}\left\{\sum_{i=1}^{N}s_i(\delta_i+\beta_i)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{L-1}(\mathcal{D}+\alpha_k)-\sum_{j=0}^{L-1}\varepsilon'_j(\mathcal{D}+\alpha_n-1)^{L-1-j}\right\}F_{L,N},\\
F_{L,N}(\gamma_n-1) &= \frac{\mathcal{D}+\gamma_n-1}{\gamma_n-1}F_{L,N},\\
F_{L,N}(\beta_i+1,\beta_j-1) &= \frac{(s_i-s_j)\frac{\partial}{\partial s_i}+\beta_i}{\beta_i}F_{L,N},\\
F_{L,N}(\alpha_1+1,\dots,\alpha_{L-1}+1,\beta_i+1,\gamma_1+1,\dots,\gamma_{L-1}+1) &= \frac{\gamma_1\cdots\gamma_{L-1}}{\alpha_1\cdots\alpha_{L-1}\beta_i}\frac{\partial F_{L,N}}{\partial s_i}.
\end{aligned}
$$

但し ε_j は L 個の変数 $\alpha_k-\gamma_n$ $(k=1,\dots,L-1)$ と $\sum_{i=1}^{N}\beta_i-\gamma_n$ に関する j 次の基本対称式である. 同様に, ε'_j は $\gamma_k-\alpha_n$ $(k=1,\dots,L-1)$ と $1-\alpha_n$ に関する j 次の基本対称式である.

B KP/UC 階層とパンルヴェ型常微分方程式

本論ではフックス型方程式の変形に関する話題を扱ってきたが, 特異点を合流して生ずる不確定特異点を含んだ場合についても議論は全く同様である. ここでは, 特に変形パラメタが 1 次元の場合, 即ち, 得られる非線形系が常微分方程式の場合に注目して, KP/UC 階層とパンルヴェ型方程式の関係をまとめておく (表 2, 3 参照. 詳細は文献 [27] を参照されたい).

定理 6. パンルヴェ方程式 P_{II}, $P(A^{(1)}_{L-1})$, P_{III}-鎖は, 各々 KP 階層の周期 $2, L(\geq 3), L(\geq 2)$ の相似簡約である. また $P(A^{(1)}_{2L-1})$ と P_{VI}-鎖は UC 階層の周期 (L,L) の相似簡約である[1].

[1] 記号 $P(A^{(1)}_{L-1})$ は $A^{(1)}_{L-1}$ 型の高階パンルヴェ方程式 [15], または周期 L のダルブー鎖 [3, 30] を表す. P_{III}-鎖は P_{III} の高階拡張 ($2L-2$ 階) で, 元々 KP 階層とは異なる文脈から発見された [4, 20, 31]. P_{VI}-鎖 ($=\mathcal{H}_{L,1}$) は, 第 4 節で見たように, あるクラスのシュレジンジャー系に等価な P_{VI} の高階拡張 ($2L-2$ 階) である. なお P_{VI}-鎖はドリンフェルト・ソコロフ階層からも導出できる [6, 22].

表 2: KP 階層からパンルヴェ方程式へ

周期	変数 x の特殊化	パンルヴェ方程式	$z = k^L$ に関する線形常微分方程式
$L = 2$	$x_n = 0\ (n \neq 1, 3)$	P_{II}	2×2 系 確定特異点 1 個 不確定特異点 1 個（ポアンカレ階数 3/2）
$L\ (\geq 3)$	$x_n = 0\ (n \neq 1, 2)$	$P(A_{L-1}^{(1)})$: $L = 3 \Rightarrow P_{\mathrm{IV}}$ $L = 4 \Rightarrow P_{\mathrm{V}}$	$L \times L$ 系 確定特異点 1 個 不確定特異点 1 個 (階数 $2/L$)
$L\ (\geq 2)$	$x_1 = t + a$ $x_n = a/n\ (n \neq 1)$	P_{III}-鎖： $L = 2 \Rightarrow P_{\mathrm{III}}$	$L \times L$ 系 確定特異点 2 個 不確定特異点 1 個（階数 $1/L$）

表 3: UC 階層からパンルヴェ方程式へ

周期	変数 (x, y) の特殊化	パンルヴェ方程式	$z = k^L$ に関する線形常微分方程式
(L, L)	$x_n = t + a/n$ $y_n = -t + a/n$	$P(A_{2L-1}^{(1)})$: $L = 2 \Rightarrow P_{\mathrm{V}}$	$L \times L$ 系 確定特異点 2 個 不確定特異点 1 個（階数 1）
(L, L)	$x_n = (a + bt^n)/n$ $y_n = (a + bt^{-n})/n$	P_{VI}-鎖： $L = 2 \Rightarrow P_{\mathrm{VI}}$	$L \times L$ 系（フックス型） 確定特異点 4 個

上の定理で，KP 階層と P_{II} 及び $P(A_{L-1}^{(1)})$ の関係については，各々 Ablowitz-Segur [1] と野海・山田 [16], Schiff [18] によって，既によく知られた結果である．

注. P_{I} の導出はやや例外的で，KP 階層に対して 2-被約条件：$\partial\tau/\partial x_{2n} \equiv 0$ と斉次性：$L_{-2}\tau = c\tau$ と独立変数の特殊化：$x_n = 0\ (n \neq 1, 5)$ を課すことで得られる（[2, 7, 11] 参照）．但し，ビラソロ作用素 $L_{-2} = {x_1}^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x_{n+2}\partial/\partial x_n$ を用いた．対応する $z = k^2$ についての線形方程式は $z = \infty$ にポアンカレ階数 5/2 の不確定特異点を持つ 2×2 系である．

C 普遍指標の「フック」による表示式

ここでは元のヤコビ・トゥルディ型公式 (2) とは異なる普遍指標の表示について紹介する．

ヤング図形 $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l)$ の主対角線上にある箱の数を r とする．主対角線上の点 (i, i) の右にある箱の個数 $m_i = \lambda_i - i$ と下にある箱の個数 $n_i = \lambda'_i - i$（λ' は λ の共役）を用いて，ヤング図形を

$$\lambda = (m_1, \ldots, m_r | n_1, \ldots, n_r)$$

と表すことができる(フロベニウスの記法). 例えば $\lambda = (4,3,3,1) \leftrightarrow (3,1,0|3,1,0)$ 等である. 記号 $h^{(x)}_{m,n}$ と $h^{(x,y)}_{m,n}$ をフックに対応したシューア函数

$$h^{(x)}_{m,n} = S_{(m+1,1^n)}(x) = S_{(m|n)}(x) = (-1)^n \sum_{0\le k} p_{m+k+1}(x)p_{n-k}(-x)$$

及び普遍指標

$$h^{(x,y)}_{m,n} = S_{[(m),(1^n)]}(x,y) = (-1)^n \sum_{0\le k} p_{m-k}(x)q_{n-k}(-y)$$

として定義する.

命題 7. ヤング図形の組 λ,μ をフロベニウスの記法を用いて

$$\lambda = (m_1,\ldots,m_r|n_1,\ldots,n_r),$$
$$\mu = (\tilde{m}_1,\ldots,\tilde{m}_{\tilde{r}}|\tilde{n}_1,\ldots,\tilde{n}_{\tilde{r}})$$

と表す. このとき

$$S_{[\lambda,\mu]}(x,y) = \det\left(\begin{array}{cc|cc} h^{(x)}_{m_i,n_j}, & i,j\le r & h^{(x,y)}_{m_i,\tilde{n}_{j-r}}, & i\le r<j \\ \hline h^{(y,x)}_{\tilde{m}_{i-r},n_j}, & j\le r<i & h^{(y)}_{\tilde{m}_{i-r},\tilde{n}_{j-r}}, & r<i,j \end{array}\right)_{1\le i,j\le r+\tilde{r}}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] Ablowitz, M.J., Segur, H.: Exact linearization of a Painlevé transcendent. Phys. Rev. Lett. **38**, 1103–1106 (1977)

[2] Adler, M., van Moerbeke, P.: A matrix integral solution to two-dimensional W_p-gravity. Comm. Math. Phys. **147**, 25–56 (1992)

[3] Adler, V.E.: Nonlinear chains and Painlevé equations. Phys. D **73**, 335–351 (1994)

[4] Adler, V.E., Shabat, A.B., Yamilov, R.I.: Symmetry approach to the integrability problem. Theor. Math. Phys. **125**, 1603–1661 (2000)

[5] Fuchs, R.: Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen. Math. Ann. **63**, 301–321 (1907)

[6] Fuji, K., Suzuki, T.: Drinfeld-Sokolov hierarchies of type A and fourth order Painlevé systems. Funkcial. Ekvac. **53**, 143–167 (2010)

[7] Fukuma, M., Kawai, H., Nakayama, R.: Infinite dimensional Grassmannian structure of two-dimensional quantum gravity. Comm. Math. Phys. **143**, 371–403 (1992)

[8] Kajiwara, K., Ohta, Y.: Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé II equation. J. Math. Phys. **37**, 4693–4704 (1996)

[9] Kajiwara, K., Ohta, Y.: Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé IV equation. J. Phys. A **31**, 2431–2446 (1998)

[10] Koike, K.: On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: By means of the universal characters. Adv. Math. **74**, 57–86 (1989)

[11] Kontsevich, M.: Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. Comm. Math. Phys. **147**, 1–23 (1992)

[12] Masuda, T.: On a class of algebraic solutions to the Painlevé VI equation, its determinant formula and coalescence cascade. Funkcial. Ekvac. **46**, 121–171 (2003)

[13] Masuda, T., Ohta, Y., Kajiwara, K.: A determinant formula for a class of rational solutions of Painlevé V equation. Nagoya Math. J. **168**, 1–25 (2002)

[14] 三輪哲二，伊達悦朗，神保道夫：ソリトンの数理，岩波書店 2007.

[15] Noumi, M., Yamada, Y.: Higher order Painlevé equations of type $A_L^{(1)}$. Funkcial. Ekvac. **41**, 483–503 (1998)

[16] Noumi, M., Yamada, Y.: Symmetries in the fourth Painlevé equation and Okamoto polynomials. Nagoya Math. J. **153**, 53–86 (1999)

[17] Okamoto, K., Kimura, H.: On particular solutions of the Garnier systems and the hypergeometric functions of several variables. Quart. J. Math. **37**, 61–80 (1986)

[18] Schiff, J.: Bäcklund transformations of MKdV and Painlevé equations. Nonlinearity **7**, 305–312 (1994)

[19] Schlesinger, L.: Über eine klasse von differentialsystemen beliebiger ordnung mit festen kritischen punkten. J. Reine Angew. Math. **141**, 96–145 (1912)

[20] Shabat, A.B.: Third version of the dressing method. Theor. Math. Phys. **121**, 1397–1408 (1999)

[21] Suzuki, T.: A particular solution of a Painlevé system in terms of the hypergeometric function ${}_{n+1}F_n$. SIGMA **6**, 078 (2010)

[22] Suzuki, T.: A class of higher order Painlevé systems arising from integrable hierarchies of type A. Preprint, arXiv:1002.2685

[23] Tsuda, T.: Universal characters and an extension of the KP hierarchy. Comm. Math. Phys. **248**, 501–526 (2004)

[24] Tsuda, T.: Toda equation and special polynomials associated with the Garnier system. Adv. Math. **206**, 657–683 (2006)

[25] Tsuda, T.: On an integrable system of q-difference equations satisfied by the universal characters: its Lax formalism and an application to q-Painlevé equations. Comm. Math. Phys. **293**, 347–359 (2010)

[26] Tsuda, T.: Hypergeometric solution of a certain polynomial Hamiltonian system of isomonodromy type. Quart. J. Math. (2010), doi:10.1093/qmath/haq040

[27] Tsuda, T.: From KP/UC hierarchies to Painlevé equations. Int. J. Math., in press; arXiv:1004.1347

[28] Tsuda, T.: UC hierarchy and monodromy preserving deformation. MI Preprint Series, Kyushu University, MI2010-7; available also from arXiv:1007.3450

[29] 梅村浩：Painlevé 方程式の 100 年，数学 **51**, 395–420 (1999)

[30] Veselov, A.P., Shabat, A.B.: A dressing chain and the spectral theory of the Schrödinger operator. Funct. Anal. Appl. **27**, 81–96 (1993)

[31] Willox, R., Hietarinta, J.: Painlevé equations from Darboux chains. I. P_{III}–P_{V}. J. Phys. A **36**, 10615–10635 (2003)