数理解析研究所講究録
第 1767 巻 2011 年 115-124

SL_2 の被覆群の跡公式とその応用

京都大学大学院理学研究科　池田保
京都大学大学院理学研究科　平賀郁

1　SL_2 の被覆群の跡公式の安定化

講演では SL_2 の偶数次の被覆群の跡公式の安定化と，その応用として Hilbert modular form に対する Kohnen plus space の理論への応用について述べた．講演の時点では Kohnen plus space は基礎体の判別式が奇数の場合にしか構成されていなかったが，その後の研究によりこの条件は外すことができたので，この講究録では一般的な形で述べることにする．

まず，移行因子 (transfer factor) を定義し，その性質について述べる．移行因子 $\delta_{\psi}^{+}(\tilde{h},g)$ の定義は Adams, Schultz, Trehan らによる．

F を局所体, n を偶数とする．F は 1 の原始 n 乗根をもつものとする．F における 1 の n 乗根のなす群を μ_n で表す．μ_n の $\mathbb{C}^{\times}$ への埋め込みを一つ取って固定し、以後 $\mu_n\subset\mathbb{C}^{\times}$ とみなす．

F の非自明な加法的指標 $\psi : F\longrightarrow\mathbb{C}^{\times}$ を一つ取って固定する．$\phi\in\mathcal{S}(F)$ を F 上の Schwartz 函数とするとき，ϕ の Fourier 変換 $\hat{\phi}$ は

$$\hat{\phi}(x)=\int_{F}\phi(y)\psi(xy)\,dy$$

により定義される．ここで Haar 測度 dy は Plancherel の公式 $\int_{F}|\phi(x)|^{2}\,dx=\int_{F}|\hat{\phi}(x)|^{2}\,dx$ が成り立つように正規化されているとする．$a\in F^{\times}$ とするとき，任意の $\phi\in\mathcal{S}(k)$ に対して

$$\int_{F}\phi(x)\psi(ax^{2})\,dx=\alpha_{\psi}(a)|2a|^{-1/2}\int_{F}\hat{\phi}(x)\psi(-\frac{x^{2}}{4a})\,dx$$

が成り立つような定数 $\alpha(a)=\alpha_{\psi}(a)$ が存在する．これを ψ により定まる a の Weil 定数という．Weil 定数 $\alpha_{\psi}(a)$ は次の等式を満たす．

$$\begin{aligned}\alpha_{\psi}(ab^{2})&=\alpha_{\psi}(a),\\ \alpha_{\psi}(-a)&=\overline{\alpha_{\psi}(a)},\\ \alpha_{\psi}(a)^{8}&=1,\\ \frac{\alpha_{\psi}(a)\alpha_{\psi}(b)}{\alpha_{\psi}(1)\alpha_{\psi}(ab)}&=\langle a,b\rangle_{2},\qquad(a,b\in F^{\times}).\end{aligned}$$

ここで $\langle\ ,\ \rangle_{2}$ は F 上の 2 次の Hilbert 記号である．

$\mathrm{SL}_2(F)$ の Kubota 2-cocycle $\boldsymbol{c}(g_1,g_2)$ は次式で定義される．

$$\boldsymbol{c}(g_{1},g_{2})=\langle\frac{\boldsymbol{x}(g_{1})}{\boldsymbol{x}(g_{1}g_{2})},\frac{\boldsymbol{x}(g_{2})}{\boldsymbol{x}(g_{1}g_{2})}\rangle_{n},$$

$$\boldsymbol{x}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} c & \text{if } c \neq 0, \\ d & \text{if } c = 0. \end{cases}$$

ここで $\langle\ ,\ \rangle_n$ は F 上の n 次の Hilbert 記号である．Metaplectic 群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ は Kubota 2-cocycle $\boldsymbol{c}(g_1, g_2)$ で定義される $\mathrm{SL}_2(F)$ の n 重被覆群である．すなわち $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ の元は組 $[g, \zeta]$, $(g \in \mathrm{SL}_2(F),\ \zeta \in \mu_n)$ からなり，それらの積は $[g_1, \zeta_1] \cdot [g_2, \zeta_2] = [g_1, g_2, \boldsymbol{c}(g_1, g_2)\zeta_1\zeta_2]$ で与えられる．簡明のため，$[g, 1]$ を単に $[g]$ で表すことがある．H を $\mathrm{SL}_2(F)$ の部分集合とするとき，H の $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ における逆像を $\widetilde{H}$ で表す．

$\mathrm{SL}_2(F)$ の正則半単純な元 h_1, h_2 が安定的に共役であるとは $h_1 = gh_2g^{-1}$ を満たす $g \in \mathrm{GL}_2(F)$ が存在することである．$\mathrm{GL}_2(F)$ から $\mathrm{SL}_2(F)$ への写像 τ^+, τ^- を

$$\tau^+(g) = (\det g)^{-n/2} g^n, \qquad \tau^-(g) = -(\det g)^{-n/2} g^n$$

により定義する．τ^+, τ^- が誘導する $\mathrm{PGL}_2(F)$ から $\mathrm{SL}_2(F)$ への写像も同じ記号で表す．$\mathrm{PGL}_2(F)$ の元 g が τ-正則であるとは $\tau^+(g)$ が正則であることとする．正則半単純な元 $[h, \zeta] \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ と τ-正則半単純な元 $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$ に対して，移行因子 $\delta_\psi^+([h, \zeta], g)$ を次のように定義する (cf. [1], [10])．まず，$h \in \mathrm{SL}_2(F)$ と $\tau^+(g)$ が安定的に共役でない場合は, $\delta_\psi^+([h, \zeta], g) = 0$ とおく．$h \in \mathrm{SL}_2(F)$ と $\tau^+(g)$ が安定的に共役の場合は

$$\delta_\psi^+([h, \zeta], g) = \begin{cases} \zeta \dfrac{\alpha_\psi(1)}{\alpha_\psi(\det g)} \langle \det g, -\boldsymbol{x}(h) \rangle_2 & \text{if } n \equiv 2 \bmod 4, \\ \zeta \langle \det g, \boldsymbol{x}(h) \rangle_2 & \text{if } n \equiv 0 \bmod 4. \end{cases}$$

によって移行因子 $\delta_\psi^+([h, \zeta], g)$ を定義する．また，もう一つの移行因子 $\delta_\psi^-(\tilde{h}, g)$ を

$$\delta_\psi^-(\tilde{h}, g) = \alpha_\psi(1)^{-2} \delta_\psi^+([-\mathbf{1}_2]\tilde{h}, g)$$

によって定義する．このとき，これらの移行因子について次の補題が成り立つ．

補題 1. $g, g' \in \mathrm{PGL}_2(F)$, $\tilde{h}, \tilde{h}' \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$, $\varepsilon \in \{+, -\}$ とする．このとき，次の (1), (2), (3) が成り立つ．

(1) $\delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}, g)$ は $\tilde{h}$ に関して genuine な函数である．すなわち $\delta_\psi^\varepsilon([h, \zeta], g) = \zeta \delta_\psi^\varepsilon([h], g)$.

(2) g と g' が $\mathrm{PGL}_2(F)$ において共役ならば $\delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}, g) = \delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}, g')$.

(3) $\tilde{h}$ と $\tilde{h}'$ が $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ において共役ならば $\delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}, g) = \delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}', g)$.

補題 2. $g, g' \in \mathrm{PGL}_2(F)$, $h, h' \in \mathrm{SL}_2(F)$, $\varepsilon, \varepsilon' \in \{+, -\}$ とする．次の (1), (2), (3), (4) が成り立っているとする．

(1) $\tau^\varepsilon(g) = h$ かつ $\tau^{\varepsilon'}(g') = h'$.

(2) h と h' は楕円的である．

(3) h と h' は安定的に共役である．

(4) g と g' は共役ではない．

このとき，次が成り立つ．

$$\frac{\delta_\psi^{\varepsilon'}([h],g')}{\delta_\psi^{\varepsilon}([h],g)} = -\frac{\delta_\psi^{\varepsilon'}([h'],g')}{\delta_\psi^{\varepsilon}([h'],g)}.$$

$\widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)})$ を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ 上の support が compact で anti-genuine かつ滑らかな函数全体のなす空間とする．ただし $\tilde{\varphi}$ が anti-genuine とは $\tilde{\varphi}([h,\zeta]) = \zeta^{-1}\tilde{\varphi}([h])$ が成り立つことである．また，$C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathrm{F}))$ を $\mathrm{PGL}_2(F)$ 上の support が compact で滑らかな函数全体のなす空間とする．$\tilde{h} = [h,\zeta] \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$, $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$, $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)})$, $\varphi \in C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$ に対して軌道積分

$$\begin{aligned} I(\tilde{h},\widetilde{\varphi}) =& \Delta(h)\int_{Z_{\widetilde{\mathrm{SL}_2}}(\tilde{h})\backslash\widetilde{\mathrm{SL}_2}} \widetilde{\varphi}(\tilde{x}^{-1}\tilde{h}\tilde{x})\,d\tilde{x}, \\ I(g,\varphi) =& \Delta(g)\int_{Z_{\mathrm{PGL}_2}(g)\backslash\mathrm{PGL}_2} \varphi(x^{-1}gx)\,dx, \end{aligned}$$

を考える．

$\varepsilon \in \{+,-\}$ とするとき，$\varphi^\varepsilon \in C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$ が移行因子 δ_ψ^ε に関する $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)})$ の移行 (transfer) であるとは，$g \in \mathrm{PGL}_2(F)$ で $\tau^\varepsilon(g)$ が正則半単純ならば

$$\sum_h \delta_\psi^\varepsilon([h],g) I([h],\tilde{\varphi}) = I(g,\varphi^\varepsilon)$$

が成り立つことをいう．ここで h は $\mathrm{SL}_2(F)$ の正則半単純な共役類を走るものとする．任意の anti-genuine な函数 $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C}_0^\infty(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)})$ に対して，移行因子 δ_ψ^ε に関する移行 $\varphi^\varepsilon \in C_0^\infty(\mathrm{PGL}_2(F))$ が存在することが知られている．また，$\tilde{\varphi} \in \widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2})$ が $\tilde{\varphi}([-\mathbf{1}_2]\tilde{h}) = \overline{\alpha(1)}^2\tilde{\varphi}(\tilde{h})$ を満たすときには δ_ψ^+ に関する移行と δ_ψ^- に関する移行は同じものになる．このときは単に $\tilde{\varphi}$ の移行という．

F が非アルキメデス的であり，ψ はオーダー 0 であるとする．また $n \in \mathfrak{o}^\times$ と仮定する．このとき，被覆 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)} \to \mathrm{SL}_2(F)$ は極大コンパクト部分群 $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ 上で一意的に分裂する．この分裂により $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ の部分群とみなすことにする．$\mathcal{H}(\mathrm{PGL}_2(F)//\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o}))$ を $(\mathrm{PGL}_2(F),\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o}))$ に関する Hecke 環とし，$\widetilde{\mathcal{H}}(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}//\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))$ を $(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)},\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))$ に関する anti-genuine なテスト関数からなる Hecke 環とする．このとき，標準的な同型写像

$$\boldsymbol{i}_v : \mathcal{H}(\mathrm{PGL}_2(F)//\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o})) \simeq \widetilde{\mathcal{H}}(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}//\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))$$

で移行を保存するものが存在する．$\varphi \in \mathcal{H}(\mathrm{PGL}_2(F)//\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o}))$ とするとき，φ は $\boldsymbol{i}_v(\varphi) \in \widetilde{\mathcal{H}}(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}//\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))$ の移行である．

F を 1 の原始 n 乗根を含む代数体とする．$\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ の n 重被覆群とする．$C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$ を $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ 上のサポートが compact で滑らかな函数全体のなす空間とする．$g = (g_v) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$, $\varphi = \prod_v \varphi_v \in C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$ とするとき，軌道積分 $I(g,\varphi)$ を

$$I(g,\varphi) := \prod_v I(g_v,\varphi_v)$$

によって定義する．同様に，$\widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})})$ を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ 上のサポートが compact で滑らかな anti-genuine な函数全体のなす空間とする．$h = (h_v) \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$, $\tilde{\varphi} = \prod_v \tilde{\varphi}_v \in \widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})})$

に対して軌道積分 $I(h,\tilde{\varphi})$ を

$$I(h,\tilde{\varphi}) := \prod_v I(h_v, \tilde{\varphi}_v)$$

によって定義する．$\varphi^\epsilon = \prod_v \varphi_v^\epsilon \in C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$, $\tilde{\varphi} = \prod_v \tilde{\varphi}_v \in \widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})})$ とする．すべての v について φ_v^ϵ が $\tilde{\varphi}_v$ の $\delta_{\psi_v}^\epsilon$ に関する移行であるとき，φ^ϵ は $\tilde{\varphi}$ の δ_ψ^ϵ に関する移行であるという．

定理 1. φ^+, φ^- を $\tilde{\varphi}$ の それぞれ $\delta_\psi^+, \delta_\psi^-$ に関する移行とするとき，

$$2 \sum_{\substack{h \in \mathrm{SL}_2(F)/\sim \\ h:\text{正則楕円的}}} I(h,\tilde{\varphi}) = \sum_{\substack{g \in \mathrm{PGL}_2(F)/\sim \\ g:\tau\text{-正則楕円的}}} \left(I(g,\varphi^+) + I(g,\varphi^-)\right)$$

が成り立つ．

定理 1 は $\widetilde{\mathrm{SL}_2}$ の跡公式の楕円項の安定化を与えている．

2 Kohnen plus space の理論への応用

安定跡公式の応用として，Kohnen plus space の理論の Hilbert modular form への一般化を考察する．この節では $n=2$ とし，被覆群は 2 重被覆群のみを考える．Hilbert symbol $\langle\ ,\ \rangle$ も 2 次のもののみを考える．まず最初に一変数の保型形式に関する Kohnen plus space の理論を復習する．$\Gamma_0(4) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ 1/2 の保型因子 $j^{1/2}(\gamma,z)$ は

$$j^{1/2}(\gamma,z) = \left(\frac{c}{d}\right)\epsilon_d^{-1}(cz+d)^{1/2}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4), z \in \mathfrak{h},$$

$$\epsilon_d = \begin{cases} 1, & \text{if } d \equiv 1 \bmod 4, \\ \sqrt{-1}, & \text{if } d \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

により定義される．$k \geq 2$ を正整数とするとき $j^{k+(1/2)}(\gamma,z) = (j^{1/2}(\gamma,z))^{2k+1}$ とおく．この保型因子に関する $\Gamma_0(4)$ の正則尖点形式の空間を $S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4))$ で表す．この尖点形式の空間の Kohnen plus subspace は次のように定義される．

$$S^+_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4)) = \left\{ h(z) \in S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4)) \,\middle|\, h(\tau) = \sum_{(-1)^k n \equiv 0,1(4)} c(n)q^n \right\}$$

このとき，Kohnen は以下のような結果を証明した．

定理 (Kohnen)　Hecke 環上の加群として（標準的ではない）同型

$$S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \simeq S^+_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4)).$$

が存在する．$S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4))$ 上の Hecke 作用素 $\mathbf{U}, \mathbf{W}$ を以下のように定義する．

$$\mathbf{U}h(z) = \frac{1}{4}\sum_{i \bmod 4} h\left(\frac{z+i}{4}\right),$$

$$\mathbf{W}h(z) = (-2\sqrt{-1}z)^{-k-(1/2)} h\left(-\frac{1}{4z}\right).$$

このとき， Kohnen plus space $S^{+}_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4))$ は $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$ を用いて以下のように特徴づけられる.

$$S^{+}_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4)) = \{h \in S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4)) \mid \mathbf{WU}h = (-1)^{(k^2+k)/2}2^k h\}.$$

F を次数 d の総実代数体、 $\mathbb{A}$ を F の adele 環とする. $\psi_1 : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$ を $\mathbb{A}/F$ の加法的指標で無限成分が $x \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ となるようなものとする. $\mathcal{D}_F$ を $F/\mathbb{Q}$ の共役差積とする. F の $\mathbb{R}$ への相異なる埋め込みを $\iota_1, \ldots, \iota_d$ で表す. $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ を d 個の整数の組で $k_i \geq 2$, $(i = 1, 2, \cdots d)$ とする. F の単数 $\eta \in \mathfrak{o}_F^\times$ で $(-1)^{k_i}\iota_i(\eta) > 0$, $(i = 1, \ldots, d)$ を満たすものが存在するものと仮定する. 以下ではこのような単数 η を一つ取って固定する. $k_1 = \cdots = k_d = k$ の場合には $\eta = (-1)^k$ ととるものとする. $\mathbb{A}/F$ の加法的指標 ψ を $\psi(x) = \psi_1(\eta x)$ により定義する.

v を F の非アルキメデス的素点とするとき, $\mathrm{SL}_2(F_v)$ のコンパクト開部分群 $\Gamma_{0,v}(4)$ を

$$\Gamma_{0,v}(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(F_v) \,\middle|\, a, d \in \mathfrak{o}_v, b \in \mathcal{D}_v^{-1}, c \in 4\mathcal{D}_v \right\}$$

によって定義する. ここで $\mathcal{D}_v = \mathfrak{o}_{F_v}\mathcal{D}_F$ である. $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F_v)}$ を $\mathrm{SL}_2(F_v)$ の二重被覆群とし, $\Gamma_{0,v}(4)$ の $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F_v)}$ における逆像を $\widetilde{\Gamma_{0,v}(4)}$ で表す. $\widetilde{\Gamma_{0,v}(4)}$ の genuine な指標 $\varepsilon_v : \widetilde{\Gamma_{0,v}(4)} \to \mathbb{C}^\times$ を次のように定義する.

$v \nmid 2$ のときには ε_v は $\widetilde{\Gamma_{0,v}(4)}$ の唯一の genuine な指標とする. $v|2$ のときには

$$\varepsilon_v([g, \zeta]) = \zeta \frac{\alpha_{\psi_v}(1)}{\alpha_{\psi_v}(d)} \langle d, \boldsymbol{x}(g) \rangle_v, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{0,v}(4).$$

と定義する. ここで α_{ψ_v} は Weil 定数である.

$j(\gamma, z) = cz + d$, $(\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathfrak{h})$ を通常の保型因子とする. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の二重被覆群を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ とするとき, $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \times \mathfrak{h}$ の保型因子 $\tilde{j}(\tilde{\gamma}, z)$ を

$$\tilde{j}\left(\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \zeta\right], z\right) = \begin{cases} \zeta\sqrt{d} & \text{if } c = 0, d > 0, \\ -\sqrt{-1}\zeta\sqrt{|d|} & \text{if } c = 0, d < 0, \\ \zeta(cz + d)^{1/2} & \text{if } c \neq 0. \end{cases}$$

によって定義する. ただし $-\pi/2 < \arg((cz+d)^{1/2}) \leq \pi/2$ とする. 定義より $\tilde{j}([\gamma, \zeta], z)^2 = j(\gamma, z)$ が成り立つ.

$\mathrm{SL}_2(F)$ の合同部分群 $\Gamma_0(4)$ を

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(F) \mid a, d \in \mathfrak{o}_F, b \in \mathcal{D}_F^{-1}, c \in 4\mathcal{D}_F \right\}$$

によって定義する. $\Gamma_0(4) \times \mathfrak{h}^d$ の保型因子 $j^{k+(1/2)}(\gamma, z)$ を

$$j^{k+(1/2)}(\gamma, z) = \prod_{v < \infty} \varepsilon_v([\gamma]) \prod_{i=1}^{d} \left(\tilde{j}(\iota_i([\gamma]), z_i)\right)^{2k_i+1}$$

によって定義する．$F=\mathbb{Q}$ の場合にはこの定義は古典的な定義と一致する．この保型因子によって定まる重さ $k+(1/2)$ の Hilbert 尖点形式の空間を $S_{k+(1/2)}(4)$ で表す．すなわち，

$$\begin{aligned} S_{k+(1/2)}(4) =\{h : \mathfrak{h}^d \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C}, \mid \\ h(\gamma(z)) = j^{k+(1/2)}(\gamma, z)h(z), \ {}^\forall\gamma \in \Gamma_0(4), \quad h: \text{尖点形式}\}. \end{aligned}$$

とおく．$S_{k+(1/2)}(4)$ に属する尖点形式 $h(z)$ は F の整数環 $\mathfrak{o}_F$ を添数集合にもつ Fourier 展開

$$h(z) = \sum_{\xi\in\mathfrak{o}_F} c(\xi)q^\xi,$$

を持つ．ここで $q^\xi := \exp(2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^d(\iota_i(\xi)z_i))$ である．$\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ を adele 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ の２重被覆群とすると，$S_{k+(1/2)}(4)$ の元は adele 空間 $\mathrm{SL}_2(F)\backslash\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ 上の保型形式 φ で次の性質 (1) ～ (4) を満たすものとみなすことができる．

(1) v を有限素点とするとき， $\varphi(gk) = \varepsilon_v^{-1}(k)\varphi(g)$, $\quad (g \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})},\ k \in \widetilde{\Gamma_{0,v}(4)})$.

(2) φ は重さ $k+(1/2)$ を持つ． すなわち $\boldsymbol{k}_i(\theta) = \iota_i\left(\left[\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right]\right)$, $(i=1,2,\ldots,d)$ とするとき，

$$\varphi(g\boldsymbol{k}_i(\theta)) = \exp((k_i+(1/2))\sqrt{-1}\theta)\varphi(g), \quad (g\in\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}, -\pi<\theta\le\pi)$$

が成り立つ．

(3) Δ_i $(i=1,2,\ldots,d)$ を i 番目の無限成分に対応する Casimir 作用素とするとき，

$$\Delta_i\varphi = -\frac{(2k_i+1)(2k_i-3)}{16}\varphi$$

が成り立つ．

(4) φ は尖点的である．すなわち

$$\int_{x\in F\backslash\mathbb{A}} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right) dx = 0, \quad (g\in\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})})$$

が成り立つ．

Hilbert 尖点形式の空間 $S_{k+(1/2)}(4)$ に対する Kohnen plus space を

$$S^+_{k+(1/2)}(4) := \left\{ h(z)\in S_{k+(1/2)}(4) \;\middle|\; h(\tau) = \sum_{\substack{\xi\in\mathfrak{o}_F \\ \eta\xi\equiv\square(4)}} c(\xi)q^\xi \right\}$$

によって定義する．ここで $x\equiv\square(4)$ は $x\equiv y^2 \bmod 4\mathfrak{o}_F$ を満たす $y\in\mathfrak{o}_F$ が存在することを意味するものとする．

v を F の非アルキメデス的素点とする．$\widetilde{\mathcal{H}}_v = \widetilde{\mathcal{H}}(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F_v)}//\widetilde{\Gamma_{0,v}(4)};\varepsilon_v)$ を次のように定義される Hecke 環とする．

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{H}}(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F_v)}//\widetilde{\Gamma_{0,v}(4)};\varepsilon_v) = \{f\in\widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F_v)}) \mid f(k_1hk_2) = \varepsilon_v(k_1)\varepsilon_v(k_2)f(h) \\ {}^\forall k_1, k_1\in\widetilde{\Gamma_{0,v}(4)}, {}^\forall h\in\widetilde{\mathrm{SL}_2(F_v)}\}. \end{aligned}$$

$\widetilde{\mathrm{SL}_2(F_v)}$ の Weil 表現を ω_{ψ_v} とする．ω_{ψ_v} の表現空間は Schwartz 空間 $\mathcal{S}(F_v)$ であり，$\phi \in \mathcal{S}(F_v)$ に対して

$$\begin{aligned}\omega_{\psi_v}\left(\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}, \zeta\right]\right)\phi(t) &= \zeta\frac{\alpha_{\psi_v}(1)}{\alpha_{\psi_v}(a)}|a|_v^{1/2}\phi(at)\\ \omega_{\psi_v}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \zeta\right]\right)\phi(t) &= \zeta\psi_v(bt^2)\phi(t)\\ \omega_{\psi_v}\left(\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \zeta\right]\right)\phi(t) &= \zeta|2|_v^{1/2}\overline{\alpha_{\psi_v}(1)}\hat{\phi}(-2t).\end{aligned}$$

が成り立つ．Weil 表現 ω_{ψ_v} は次の内積に関してユニタリ表現となる．

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{F_v} \phi_1(t)\overline{\phi_2(t)}\,dt, \qquad \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(F_v).$$

ここで dt は F_v の Haar 測度で $\mathfrak{o}_v$ の体積が 1 となるものである．ϕ_0 を $\mathfrak{o}_v$ の特性函数とする．

$$\Gamma_v = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \,\middle|\, a, d \in \mathfrak{o}_v, b \in (4\mathcal{D}_v)^{-1}, c \in 4\mathcal{D}_v\right\}.$$

とおくとき， Hecke 環 $\widetilde{\mathcal{H}}_v$ のベキ等元 E_v^K を

$$E_v^K(g) = \begin{cases} |2|_v^{-1}(\phi_0, \omega_{\psi_v}(g)\phi_0) & \text{if } g \in \widetilde{\Gamma_v}, \\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

によって定義する．

定理 2：標準的な同型

$$\boldsymbol{i}_v : \widetilde{\mathcal{H}}_v \simeq \mathcal{H}^{E_v^K}$$

で移行を保存するものが存在する．すなわち $\varphi_v \in \mathcal{H}_v$ とするとき φ_v は $\boldsymbol{i}_v(\varphi_v)$ の移行である．

大局 Hecke 環 $\widetilde{\mathcal{H}}$ を $\widetilde{\mathcal{H}} = \otimes_{v<\infty}\widetilde{\mathcal{H}}_v$ により定義すると，$S_{k+(1/2)}(4)$ には大局 Hecke 環 $\widetilde{\mathcal{H}}$ が右移動 ρ により自然に作用する．ベキ等元 $E^K \in \widetilde{\mathcal{H}}$ を $E^K = \prod_{v<\infty} E_v^K$ により定義する．E^K はベキ等元なので $\rho(E^K)$ は $S_{k+(1/2)}(4)$ 上の射影作用素となる．

定理 3：$S^+_{k+(1/2)}(4)$ は射影作用素 $\rho(E^K) : S_{k+(1/2)}(4) \longrightarrow S_{k+(1/2)}(4)$ の像に等しい．すなわち，

$$S^+_{k+(1/2)}(4) = \{h \in S_{k+(1/2)}(4) \mid h = \rho(E^K)h\}.$$

が成り立つ．

$\widetilde{\mathcal{H}}$ の部分環 $\widetilde{\mathcal{H}}^{E^K}$ を

$$\widetilde{\mathcal{H}}^{E^K} = E^K * \widetilde{\mathcal{H}} * E^K = \prod_{v<\infty} \widetilde{\mathcal{H}}^{E_v^K}$$

により定義する．このとき，定理 3 により $\widetilde{\mathcal{H}}^{E^K}$ は $S^+_{k+(1/2)}(4)$ に右移動 ρ により作用する．

S_{2k} を adele 空間 $\mathrm{PGL}_2(F)\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})/\prod_{v<\infty}\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o}_v)$ 上の保型形式 φ で次の性質を満たすものとする．

(1) φ は重さ $2k$ を持つ．すなわち $\boldsymbol{k}_i(\theta)=\iota_i\left(\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)\right)$, $(i=1,2,\ldots,d)$ とするとき，

$$\varphi(g\boldsymbol{k}_i(\theta))=\exp(2k_i\sqrt{-1}\theta)\varphi(g),\quad (g\in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}),\theta\in\mathbb{R})$$

が成り立つ．

(2) Δ_i $(i=1,2,\ldots,d)$ を i 番目の無限成分に対応する Casimir 作用素とするとき，

$$\Delta_i\varphi=-k_i(k_i-1)\varphi$$

が成り立つ．

(3) φ は尖点的である． すなわち

$$\int_{x\in F\backslash\mathbb{A}}\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)dx=0,\quad (g\in\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$$

が成り立つ．

大局 Hecke 環 $\mathcal{H}$ を $\mathcal{H}=\prod_{v<\infty}\mathcal{H}$ により定義すると $\mathcal{H}$ は S_{2k} に右移動で作用する．
定理 2 により標準的な同型

$$\boldsymbol{i}=\prod_{v<\infty}\boldsymbol{i}_v:\mathcal{H}\simeq\widetilde{\mathcal{H}}^{E^K}$$

が存在する．

定理 4：$\varphi=\mathcal{H}$, $\tilde{\varphi}=\boldsymbol{i}(\varphi)\in\widetilde{\mathcal{H}}^{E^K}$ とするとき，Hecke 作用素の跡の等式

$$\mathrm{tr}(\varphi|_{S_{2k}})=\mathrm{tr}(\tilde{\varphi}|_{S^+_{k+(1/2)}(4)})$$

が成り立つ．とくに同型 $\boldsymbol{i}:\mathcal{H}\simeq\widetilde{\mathcal{H}}^{E^K}$ により $S^+_{k+(1/2)}(4)$ を $\mathcal{H}$ 加群とみるとき S_{2k} と $S^+_{k+(1/2)}(4)$ は $\mathcal{H}$ 加群として同型である．

$F=\mathbb{Q}$ の場合には E^K は Hecke 作用素 $\mathbf{WU}$ の固有空間

$$\{h\in S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4))\,|\,\mathbf{WU}h=(-1)^{(k^2+k)/2}2^kh\}.$$

への射影作用素に一致する．したがって定理 3, 定理 4 は Kohnen の結果の Hilbert 保型形式への一般化と考えられる．

次に $S^+_{k+(1/2)}(4)$ の Hecke 同時固有形式の Fourier 係数に関する結果を述べる．v を代数体 F の非アルキメデス的素点とする．$\xi\in F_v^\times$ に対して対称的な Laurent 多項式 $\Psi_v(\xi,X)\in\mathbb{C}[X+X^{-1}]$ を次のように定義する．$\delta_1=\mathrm{ord}_v(\xi)$ とし δ_0 を $F_v(\sqrt{\xi})/F_v$ の導手の指数とする．このとき

$$\mathfrak{f}_\xi=(\delta_1-\delta_0)/2,$$

$$\chi_\xi=\begin{cases}1 & (\xi\in F_v^{\times 2}\text{ の場合})\\ -1 & (F_v(\sqrt{\xi})/F_v\text{ が不分岐 2 次拡大の場合})\\ 0 & (F_v(\sqrt{\xi})/F_v\text{ が分岐 2 次拡大の場合})\end{cases}$$

とおく．このとき，

$$\Psi_v(\xi, X) = \begin{cases} \dfrac{X^{\mathfrak{f}_\xi+1} - X^{-\mathfrak{f}_\xi-1}}{X - X^{-1}} - \chi_\xi q_v^{-1/2} \dfrac{X^{\mathfrak{f}_\xi} - X^{-\mathfrak{f}_\xi}}{X - X^{-1}} & (\mathfrak{f}_\xi \geq 0 \text{ の場合}) \\ 0 & (\mathfrak{f}_\xi < 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

と定義する．ここで q_v は v の剰余体の位数である．

定理 5：$h(z) = \sum_{\eta\xi \equiv \square(4)} c(\xi) q^\xi \in S^+_{k+(1/2)}(4)$ を Hecke 同時固有形式とする．対応する S_{2k} の Hecke 同時固有形式を $f(z)$ とする．$f(z)$ の非アルキメデス的素点 v における佐武 parameter を α_v とする．このとき，$\xi \in F^\times$ に対して $h(z)$ の Fourier 係数 $c(\xi)$ は次のように表される．

$$c(\xi) = c_\xi \prod_{v<\infty} \Psi_v(\eta\xi, \alpha_v) \prod_{i=1}^{d} |\iota_i(\eta\xi)|^{(k_i/2)-(1/4)}$$

ここで c_ξ は ξ の $F^\times/F^{\times 2}$ における類のみによって定まる定数である．

例 1.

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ とするとき，$\dim_{\mathbb{C}} S_{(6,6)} = 1$ が知られている．よって $\dim_{\mathbb{C}} S^+_{(7/2,7/2)}(4) = 1$ となる．$S^+_{(7/2,7/2)}(4)$ は次のような元 $h(z)$ によって生成される．

$$\begin{aligned} h(z) =& q^{(5+\sqrt{5})/2} + q^{(5-\sqrt{5})/2} - 3q^3 + 2q^4 - 3q^{(9+3\sqrt{5})/2} - 3q^{(9-3\sqrt{5})/2} \\ &+ q^{5+2\sqrt{5}} + q^{5-2\sqrt{5}} + 2q^{6+2\sqrt{5}} + 2q^{6-2\sqrt{5}} \\ &- q^{(13+\sqrt{5})/2} - q^{(13-\sqrt{5})/2} + 31q^7 - 44q^8 - q^{(17+5\sqrt{5})/2} \\ &- 11q^{(17+3\sqrt{5})/2} - 11q^{(17-3\sqrt{5})/2} - q^{(17-5\sqrt{5})/2} \\ &- 11q^{9+2\sqrt{5}} - 11q^{9-2\sqrt{5}} + 36q^{10+2\sqrt{5}} + 36q^{10-2\sqrt{5}} + \cdots \end{aligned}$$

例 2.

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ とするとき，$\dim_{\mathbb{C}} S_{(4,4)} = 1$ が知られている．よって $\dim_{\mathbb{C}} S^+_{(5/2,5/2)}(4) = 1$ となる．$S^+_{(5/2,5/2)}(4)$ は次のような元 $h(z)$ によって生成される．

$$\begin{aligned} h(z) =& q - 4q^{(7+\sqrt{13})/2} - 4q^{(7-\sqrt{13})/2} + 3q^4 + 13q^5 \\ &+ q^{(11+3\sqrt{13})/2} + q^{(11-3\sqrt{13})/2} - 26q^{(15+\sqrt{13})/2} \\ &- 26q^{(15-\sqrt{13})/2} + 39q^8 + 16q^9 - 4q^{(19+5\sqrt{13})/2} \\ &- 26q^{(19+3\sqrt{13})/2} - 26q^{(19-3\sqrt{13})/2} - 4q^{(19-5\sqrt{13})/2} \\ &+ 13q^{10+2\sqrt{13}} + 13q^{10-2\sqrt{13}} + \cdots \end{aligned}$$

References

[1] J. Adams, *Characters of covering groups of SL(n)*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu, **2** (2003), 1–21.

[2] Y. Flicker, *Automorphic forms on covering groups of* GL(2), Inv. Math. **57** (1980), 119–182.

[3] S. Gelbart, I. I. Piatetski-Shapiro, *Some Remarks on Metaplectic Cusp Forms and the Correspondence of Shimura and Waldspurger*, Israel J. Math. **44** (1983), 97–126.

[4] W. Kohnen, *Modular forms of half-integral weight on* $\Gamma_0(4)$, Math. Ann. **248** (1980), 249–266.

[5] H. Kojima, *The trace formula for Hecke operators of Hilbert modular forms of rational weight* Japan J. Math. **20** (1994), 115–131.

[6] H. Y. Loke and G. Savin, *Representations of the two-fold central extension of* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$, Pacific J. Math. **247** (2010), 435–454.

[7] J. Schultz, *Lifting of Characters on* $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F)$ *and* $\mathrm{SO}_{1,2}(F)$ *for* F *a non-archimedean local field*, dissertation, University of Maryland, 1998.

[8] H. Shimizu, *On traces of Hecke operators*, J. Fac. Sic. Univ. Tokyo **10** (1963), 1–19.

[9] G. Shimura, *On modular forms of half integral weight*, Ann. Math. **97** (1973) 440–481.

[10] A. Trehan, *Lifting of characters and functions on metaplectic groups*, Dissertation, University of Maryland, 2004.

[11] J.-L. Waldspurger. *Correspondances de Shimura et quaternions*, Forum Math. **3** (1991), 219–307.

[12] Wen-Wei Li, *Transfert d'intégrales orbitales pour le groupe métaplectique*, preprint. arXiv:0906.4053

[13] Wen-Wei Li, *La formule des traces pour les revêtements de groupes réductifs connexes. I. Le développement géométrique fin*, preprint, arXiv:1004.4011

[14] Wen-Wei Li, *Le lemme fondamental pondéré pour le groupe métaplectique*, preprint, arXiv:1006.4780