数理解析研究所講究録
第 1767 巻 2011 年 188-197

カスプ形式の空間の次元についての法2の合同式

金沢大学・理工研究域　若槻 聡 (Satoshi Wakatsuki)
Institute of Science and Engineering, Kanazawa University

この原稿では、まず最初にカスプ形式の空間の次元と保型表現の数と四元数体の極大整環の類数とタイプ数が同一視できることを解説する。そのあと、カスプ形式もしくは2次のジーゲルカスプ形式の空間の次元についての法2の合同式が虚二次体の類数とPGSp(2) のアーサー予想に関係することについて紹介する。オリジナルの結果の次元についての法2の合同式については自分の論文 [16] で詳しく書いた。しかし保型表現と関係付けるための議論について詳しく説明しなかったので、この原稿で保型表現による解釈を詳しく解説することにした。カスプ形式の空間の次元を保型表現の数として解釈すると、従来と少し異なる視点で保型形式の空間の次元の数値を楽しむことができると思う。

1. 四元数体の類数とタイプ数と保型表現の数とカスプ形式の空間の次元について

四元数体の類数とタイプ数と保型表現の数とカスプ形式の空間の次元の間にある関係について説明する。

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の正定値四元数体 $\mathbf{B}$ を考えよう。簡単のため、$\mathbf{B}$ の判別式を素数 p とする。環 R に対して $R^\times$ を R の可逆元全体からなる群とする。$\mathfrak{O}$ を $\mathbf{B}$ の一つの極大整環とする。$\mathbb{Q}$ の各素点 v に対して $\mathbf{B}_v=\mathbf{B}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_v$ とする。同様に有限素点 $v<\infty$ について $\mathfrak{O}_v=\mathfrak{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_v$ とする。そして $\mathbf{K}_{\mathrm{fin}}=\prod_{v<\infty}\mathfrak{O}_v^\times$ と置く。$\mathbb{A}$ を $\mathbb{Q}$ のアデール環、$\mathbb{A}^\times$ を $\mathbb{Q}$ のイデール群、$\mathbf{B}_{\mathbb{A}}^\times$ を $\mathbf{B}$ のイデール群とする。$\mathbf{B}$ の類数 $H_{\mathbf{B}}$ は

$$H_{\mathbf{B}}=|\mathbf{B}^\times\backslash\mathbf{B}_{\mathbb{A}}^\times/(\mathbf{B}_\infty^\times\mathbf{K}_{\mathrm{fin}})|<+\infty$$

と定義される。ただし、有限集合 S に対して $|S|$ はその位数を意味する。特に、$\mathfrak{O}$ の右イデアルの同値類の数と $H_{\mathbf{B}}$ は一致し、そして、$H_{\mathbf{B}}$ は極大整環 $\mathfrak{O}$ の選択によらないことが知られている。次に二つの整環 $\mathfrak{O}_1$ と $\mathfrak{O}_2$ が同じタイプであるとは、ある $a\in\mathbf{B}^\times$ が存在して $\mathfrak{O}_1=a\mathfrak{O}_2a^{-1}$ が成り立つことを意味する。これは $\mathbf{B}$ の極大整環全体の集合上に同値関係を与える。そして、その同値類の数のことを極大整環のタイプ数と呼び、この論文では $T_{\mathbf{B}}$ と記述する。もし $\mathbf{B}_{\mathbb{A},\mathfrak{O}}^\times=\{x\in\mathbf{B}_{\mathbb{A}}^\times \mid x\mathfrak{O}x^{-1}=\mathfrak{O}\}$ とすると、

$$T_{\mathbf{B}}=|\mathbf{B}^\times\mathbb{A}^\times\backslash\mathbf{B}_{\mathbb{A}}^\times/\mathbf{B}_{\mathbb{A},\mathfrak{O}}^\times|<+\infty$$

となる (cf. [8]). ただし、$x=(x_v)_v$ とすると、$x\mathfrak{O}x^{-1}$ は $\cap_{v<\infty}(x_v\mathfrak{O}_vx_v^{-1})$ を意味するものとする。

二つの数 $H_{\mathbf{B}}$ と $T_{\mathbf{B}}$ を保型表現の言葉に翻訳してみよう。まず L^2 空間 $L^2(\mathbf{B}^\times\mathbb{A}^\times\backslash\mathbf{B}_{\mathbb{A}}^\times)$ を考える。この空間上の $\mathbf{B}_{\mathbb{A}}^\times$ の右正則表現 $R_{\mathbf{B}}$ は可算個の既約ユニタリ表現の直交直和に分解する。$\widehat{\mathbf{B}_{\mathbb{A}}^\times}$ は $\mathbf{B}_{\mathbb{A}}^\times$ の既約ユニタリ表現の同値類とし、m_π は非負の整数（π の重複度）とすると、

$$R_{\mathbf{B}}\cong\bigoplus_{\pi\in\widehat{\mathbf{B}_{\mathbb{A}}^\times}}m_\pi\cdot\pi$$

と書くことができる。ただし、右正則表現 $R_{\mathbf{B}}$ における中心 $\mathbb{A}^\times$ の作用は自明であるので、$m_\pi>0$ を満たす π における中心の作用は自明である。また重複度1の定理が成り

立つので、m_π は零でないなら $m_\pi = 1$ が成り立つ。ここで、$\mathbf{B}_\mathbb{A}^\times$ の任意の部分群 G に対して π の表現空間 V_π の部分空間 $V_{\pi,G}$ を

$$V_{\pi,G} = \{v \in V \mid \text{任意の } g \in G \text{ について } \pi(g)v = v \text{ が成り立つ}\}$$

と定義する。$\mathbf{B}^\times$ の中心は $\mathbb{Q}^\times$ であり $\mathbb{A}^\times = \mathbb{Q}^\times(\mathbb{R}^\times \prod_{v<\infty} \mathbb{Z}_v^\times)$ となることに注意した上で $H_\mathbf{B}$ の定義をみると、

$$H_\mathbf{B} = \sum_{\pi \in \widehat{\mathbf{B}_\mathbb{A}^\times}} m_\pi \dim_\mathbb{C} V_{\pi, \mathbf{B}_\infty^\times \mathbf{K}_{\mathrm{fin}}}$$

となる。$\dim_\mathbb{C} V_{\pi,\mathbf{B}_\infty^\times \mathbf{K}_{\mathrm{fin}}} \neq 0$ となる既約ユニタリ表現 $\pi = \otimes_v \pi_v$ を考えよう。実素点においては $\mathbf{B}_\infty^\times$ 上不変なのだから、$\dim_\mathbb{C} V_{\pi,\mathbf{B}_\infty^\times \mathbf{K}_{\mathrm{fin}}} \neq 0$ となる $\pi = \otimes_v \pi_v$ について π_∞ は自明な表現となる。素点 p について $\mathbb{Q}_p^\times \mathfrak{O}_p^\times$ で固定されるベクトルを持つ表現 π_p を考えよう。$\mathbf{B}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の division algebra なのだから、$\mathfrak{O}_p$ は四元数体 $\mathbf{B}_p$ の唯一の極大整環であり、素元 ϖ_p について $\varpi_p \mathfrak{O}_p$ は $\mathfrak{O}_p$ の極大イデアルとなる。$(\varpi_p \mathfrak{O}_p)^2 = p\mathfrak{O}_p$ となるのだから、$[\mathbf{B}_p^\times : \mathbb{Q}_p^\times \mathfrak{O}_p^\times] = 2$ を得る。こうなると、π_p は既約なのだから 1 次元表現しかありえなく、しかも不分岐であることを考慮すると、$\dim_\mathbb{C} V_{\pi,\mathbf{B}_\infty^\times \mathbf{K}_{\mathrm{fin}}} \neq 0$ となる $\pi = \otimes_v \pi_v$ についての π_p は自明な表現もしくは不分岐な 2 次指標で自明な表現をひねったものとなる (cf. [5, p.62])。以下、1_v を $\mathbf{B}_v^\times$ の自明な表現とし、χ_v を $\mathbb{Q}_p^\times$ 上の不分岐な 2 次指標とし、$\chi_v 1_v$ を自明な表現を 2 次指標でひねったものとする。つまり、n_v を $\mathbf{B}_v$ 上のノルムとすると、$\chi_v 1_v(g_v) = \chi_v(n_v(g_v))$ と与えられる。そして、$\dim_\mathbb{C} V_{\pi,\mathbf{B}_\infty^\times \mathbf{K}_{\mathrm{fin}}} \neq 0$ ならば $\dim_\mathbb{C} V_{\pi,\mathbf{B}_\infty^\times \mathbf{K}_{\mathrm{fin}}} = 1$ となることも分かる。以上の考察により、

$$\text{(1.1)} \qquad H_\mathbf{B} = \left| \left\{ \pi = \otimes_v \pi_v \in \widehat{\mathbf{B}_\mathbb{A}^\times} \;\middle|\; \begin{array}{l} m_\pi = 1,\ \pi_\infty = 1_\infty,\ \pi_p = 1_p \text{ or } \chi_p 1_p, \\ \text{かつ 任意の } v \neq \infty, p \text{ について } \pi_v \text{ は不分岐} \end{array} \right\} \right|$$

と類数 $H_\mathbf{B}$ を保型表現の言葉で記述することができた。$\mathbf{B}_\mathbb{A}^\times$ の自明な表現 $1_\mathbf{B} = \otimes_v 1_v$ は必ず右辺の集合に含まれることに注意されたい。また $1_\mathbf{B}$ と異なる表現については素点 $v \neq \infty, p$ において π_v は不分岐な主系列表現となっている。つぎに $T_\mathbf{B}$ について考える。[8, Lemma 10] に書かれているように、$\mathbf{B}_{\mathbb{A},\mathfrak{O}}^\times$ は $\mathbf{B}_\infty^\times \mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$ を含み、$[\mathbf{B}_{\mathbb{A},\mathfrak{O}}^\times \mathbb{A}^\times ; (\mathbf{B}_\infty^\times \mathbf{K}_{\mathrm{fin}})\mathbb{A}^\times] = 2$ となる。さらに $\mathbf{B}_{\mathbb{A},\mathfrak{O}}^\times$ は元 (x_v), $x_p = \varpi_p$, $x_v = 1$ ($^\forall v \neq p$) を含む。その結果、

$$\text{(1.2)} \qquad T_\mathbf{B} = \left| \left\{ \pi = \otimes_v \pi_v \in \widehat{\mathbf{B}_\mathbb{A}^\times} \;\middle|\; \begin{array}{l} m_\pi = 1,\ \pi_\infty = 1_\infty,\ \pi_p = 1_p, \\ \text{かつ 任意の } v \neq \infty, p \text{ について } \pi_v \text{ は不分岐} \end{array} \right\} \right|$$

が導かれる。これにて $H_\mathbf{B}$ と $T_\mathbf{B}$ の保型表現的な意味がはっきりした。

次に正則カスプ形式の空間の次元を保型表現の言葉に翻訳しよう。上半平面 $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ に $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ が

$$g \cdot z = (az+b)(cz+d)^{-1}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),\ z \in \mathfrak{H}$$

と作用する。素数 p に対して離散群 $\Gamma_0(p)$ が

$$\Gamma_0(p) = x\,M(2,\mathbb{Z})\,x^{-1} \cap \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

と定義される。SL$(2,\mathbb{Q})$ の算術的部分群 Γ について、k を 2 以上の偶数としたとき、Γ に関する重さ k の正則カスプ形式の空間 $S_k(\Gamma)$ が

$$S_k(\Gamma)=\left\{ f:\mathfrak{H}\to\mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は正則}, \\ f(\gamma\cdot z)=(cz+d)^k f(z)\,,\ {}^\forall z\in\mathfrak{H}\,,\ {}^\forall\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma, \\ \sup_{z\in\mathfrak{H}}|\mathrm{Im}(z)^{k/2}f(z)|<+\infty \end{array} \right\}$$

と定義される。次に $S_k(\Gamma_0(p))$ の部分空間 $S_k^{\mathrm{old}}(\Gamma_0(p))$ が

$$S_k^{\mathrm{old}}(\Gamma_0(p))=\{c_1f(z)+c_2f(pz)\,|\,c_1,c_2\in\mathbb{C} \text{ and } f\in S_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))\}$$

と定義される。

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k^{\mathrm{old}}(\Gamma_0(p))=2\times\dim_{\mathbb{C}} S_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$$

となることが知られている。そして、部分空間 $S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p))$ を Petersson 内積による $S_k(\Gamma_0(p))$ 上の $S_k^{\mathrm{old}}(\Gamma_0(p))$ の直交補空間とする。$S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p))$ に属するカスプ形式を新形式と呼ぶ。続いて Atkin-Lehner involution を導入する。$S_k(\Gamma_0(p))$ 上の線型作要素 W_p を

$$(W_p\cdot f)(z)=p^{-k/2}\,z^{-k}\,f(-1/pz)$$

と定義する。定義より $W_p\circ W_p=\mathrm{id}_{S_k(\Gamma_0(p))}$ であり、$\mathrm{tr}W_p|_{S_k^{\mathrm{old}}(\Gamma_0(p))}=0$ が分かる。そして、

$$S_k^{\mathrm{new}\,\pm}(\Gamma_0(p))=\{f\in S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p))\,|\,W_p\cdot f=\pm(-1)^{k/2}f\}$$

と置く。こうすると、$S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p))$ がさらに直交直和に分解して、

$$S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p))=S_k^{\mathrm{new}\,+}(\Gamma_0(p))\oplus S_k^{\mathrm{new}\,-}(\Gamma_0(p))$$

が成り立つ。符号 $+$ と $-$ は L-関数の関数等式の符号を意味することに注意しよう。これより空間 $S_k^{\mathrm{new}\,\pm}(\Gamma_0(p))$ の次元を保型表現の言葉に翻訳することを目標に議論する。L^2 空間 $L^2(\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A}))$ の離散スペクトル上への右正則表現 R_{dis} は PGL$(2,\mathbb{A})$ の可算個の既約ユニタリ表現の直交直和に分解する。つまり、$\widehat{\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})}$ を PGL$(2,\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合とすると、

$$R_{\mathrm{dis}}\cong\bigoplus_{\pi\in\widehat{\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})}} m_\pi^{\mathrm{dis}}\cdot\pi$$

となる。重複度 1 定理より、$m_\pi^{\mathrm{dis}}=0$ または 1 である。極小 K-type を SO(2) に制限したときの既約成分の一つが $e^{i\theta}\mapsto e^{ki\theta}$ であるような PGL(2) の離散系列表現を σ_k と書く。有限素点 v について $K_v=\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_v)$ として $K=\prod_{v<\infty}K_v$、そして

$$K_0(p)=K_{0,p}\times\prod_{v<\infty\,,\,v\neq p}K_v\,,\quad K_{0,p}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in K_p\,\middle|\,c\in p\mathbb{Z}_p\right\}$$

と置く。$\pi=\otimes_v\pi_v$ に対して $\pi_{\mathrm{fin}}=\otimes_{v<\infty}\pi_v$ と置く。π の表現空間 V_π について $H=K$ or $K_0(p)$ とすると部分空間

$$V_{\pi,k,H}=\{x\in V_\pi\,|\,\pi_{\mathrm{fin}}(h)x=x \text{ for any } h\in H \text{ and } \pi_\infty(r_\theta)x=e^{ki\theta}x\}$$

が定義される。ただし、$r_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ と置いた。こうすると、

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))=\sum_{\pi=\otimes_v\pi_v\in\widehat{\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})},\ \pi_\infty\cong\sigma_k} m_\pi^{\mathrm{dis}}\dim_{\mathbb{C}} V_{\pi_{\mathrm{fin}},k,K}\,,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k(\Gamma_0(p)) = \sum_{\pi=\otimes_v \pi_v \in \widehat{\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})},\, \pi_\infty \cong \sigma_k} m_\pi^{\mathrm{dis}} \dim_{\mathbb{C}} V_{\pi_{\mathrm{fin}},k,K_0(p)}$$

が成り立つことが既約分解から従う。さらに Casselman [2] の結果より、$\dim_{\mathbb{C}} V_{\pi_{\mathrm{fin}},k,K} \neq 0$ なら

$$\dim_{\mathbb{C}} V_{\pi_{\mathrm{fin}},k,K} = 1 \quad \text{かつ} \quad \dim_{\mathbb{C}} V_{\pi_{\mathrm{fin}},k,K_0(p)} = 2$$

となり、$\dim_{\mathbb{C}} V_{\pi_{\mathrm{fin}},k,K} = 0$ かつ $\dim_{\mathbb{C}} V_{\pi_{\mathrm{fin}},k,K_0(p)} \neq 0$ のときは

$$\dim_{\mathbb{C}} V_{\pi_{\mathrm{fin}},k,K_0(p)} = 1$$

となる。空間 $S_k(\Gamma_0(p))$ を L^2 空間に持ち上げると空間

$$\bigoplus_{\pi=\otimes_v \pi_v \in \widehat{\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})},\, \pi_\infty \cong \sigma_k} V_{\pi,k,K_0(p)}$$

に一致して、空間 $S_k^{\mathrm{old}}(\Gamma_0(p))$ を L^2 空間に持ち上げると空間

$$\bigoplus_{\pi=\otimes_v \pi_v \in \widehat{\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})},\, \pi_\infty \cong \sigma_k} (\dim_{\mathbb{C}} V_{\pi,k,K}) \cdot V_{\pi,k,K_0(p)}$$

に、最後に空間 $S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p))$ を L^2 空間に持ち上げると空間

$$\bigoplus_{\pi=\otimes_v \pi_v \in \widehat{\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})},\, \pi_\infty \cong \sigma_k} (1 - \dim_{\mathbb{C}} V_{\pi,k,K}) \cdot V_{\pi,k,K_0(p)}$$

と一致する。有限素点 v について、$\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_v)$ の Steinberg 表現を St_v と記述する。$\mathbb{Q}_v^\times$ 上の不分岐な 2 次指標を χ_v とし、$\chi_v \mathrm{St}_v$ を χ_v で St_v をひねったものとする。つまり、$\chi_v \mathrm{St}_v(g_v) = \chi_v(\det g_v) \times \mathrm{St}_v(g_v)$ となる。Casselman [2] の証明を見れば分かるように、$\dim_{\mathbb{C}} V_{\pi,k,K_0(p)} = 1$ の場合は、π_p は St_p もしくは $\chi_p \mathrm{St}_p$ のどちらかになる。そうすると、以上の議論によって

(1.3) $\quad \dim_{\mathbb{C}} S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p)) =$

$$\left| \left\{ \pi = \otimes_v \pi_v \in \widehat{\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})} \;\middle|\; \begin{array}{l} m_\pi^{\mathrm{dis}} = 1,\ \pi_\infty \cong \sigma_k,\ \pi_p \cong \mathrm{St}_p \text{ or } \chi_p \mathrm{St}_p, \\ \text{かつ 任意の } v \neq \infty, p \text{ について } \pi_v \text{ は不分岐} \end{array} \right\} \right|$$

が成り立つ。Atkin-Lehner involution について St は -1 の固有値を、$\chi_p \mathrm{St}_p$ は 1 の固有値を持つことが知られている (cf. [13])。その結果、もし $k/2$ が奇数 (resp. $k/2$ が偶数) ならば

(1.4) $\quad \dim_{\mathbb{C}} S_k^{\mathrm{new}\,+}(\Gamma_0(p)) =$

$$\left| \left\{ \pi = \otimes_v \pi_v \in \widehat{\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})} \;\middle|\; \begin{array}{l} m_\pi^{\mathrm{dis}} = 1,\ \pi_\infty \cong \sigma_k,\ \pi_p \cong \mathrm{St}_p \text{ (resp. } \chi_p \mathrm{St}_p), \\ \text{かつ 任意の } v \neq \infty, p \text{ について } \pi_v \text{ は不分岐} \end{array} \right\} \right|,$$

$\dim_{\mathbb{C}} S_k^{\mathrm{new}\,-}(\Gamma_0(p)) =$

$$\left| \left\{ \pi = \otimes_v \pi_v \in \widehat{\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})} \;\middle|\; \begin{array}{l} m_\pi^{\mathrm{dis}} = 1,\ \pi_\infty \cong \sigma_k,\ \pi_p \cong \chi_p \mathrm{St}_p \text{ (resp. } \mathrm{St}_p), \\ \text{かつ 任意の } v \neq \infty, p \text{ について } \pi_v \text{ は不分岐} \end{array} \right\} \right|$$

が成り立つ。これにより次元を保型表現の数で表すことができた。

保型表現の数に関する等式 (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) を用いて H_{B} と T_{B} と次元の間にある関係式を導こう。そのため GL(2) の Jacquet-Langlands 対応を思い出す。局所対応として、無限素点 ∞ では $\mathrm{B}_\infty^\times$ の自明な表現 1_∞ と $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現 σ_2 が対応し、有限素点 p においては $\mathrm{B}_p^\times$ の自明な表現 1_p (resp. 自明な表現を χ_p でひねった表現 $\chi_p 1_p$) と $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Q}_p)$ の Steinberg 表現 St_p (resp. Steinberg 表現を χ_p をひねった表

現 $\chi_p \mathrm{St}_p$) が対応する。定数関数の存在に注意しながら、等式 (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) を用いれば

$$H_{\mathrm{B}} = \dim_{\mathbb{C}} S_2^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p)) + 1 \text{ and } T_{\mathrm{B}} = \dim_{\mathbb{C}} S_2^{\mathrm{new}\,+}(\Gamma_0(p)) + 1 \tag{1.5}$$

が従う。ただし、$S_2(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) = \{0\}$ なので $S_2^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p)) = S_2(\Gamma_0(p))$ であることに注意する。これらの等式は明示的公式の比較によっても得られる (cf. [4])。

2. 算術的公式と合同式

類数 H_{B} とタイプ数 T_{B} の公式が知られている (cf. [3, 8])。$\dim_{\mathbb{C}} S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p))$ と $\dim_{\mathbb{C}} S_k^{\mathrm{new}\,\pm}(\Gamma_0(p))$ の公式も知られている (cf. [6, 17])。前セクションで述べた等式 (1.5) を通じて、どちらの数も一致するし、公式としても一致している。そのため、公式としては片方の場合だけで良い。このセクションでは、カスプ形式の空間の次元の公式を紹介する。

まず次の公式は [6] とかを見れば、すぐに分かる。2 以上の偶数 k と素数 p に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p)) = \frac{k-1}{12}(p-1) + \frac{1}{4}(-1)^{k/2}\cdot\nu_{p,2} + \frac{1}{3}t_{k,3}\cdot\nu_{p,3} + \begin{cases} -1 & \text{if } k=2 \\ 0 & \text{if } k>2 \end{cases}.$$

ただし、

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } p=2 \\ 1 & \text{if } p\equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{if } p\equiv 3 \bmod 4 \end{cases}, \qquad \left(\frac{-3}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } p=3 \\ 1 & \text{if } p\equiv 1 \bmod 3 \\ -1 & \text{if } p\equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

$$t_{k,3} = \begin{cases} 1 & \text{if } k\equiv 0 \mod 3 \\ 0 & \text{if } k\equiv 1 \mod 3 \\ -1 & \text{if } k\equiv 2 \mod 3 \end{cases}, \quad \nu_{p,2} = \left(\left(\frac{-1}{p}\right)-1\right), \quad \nu_{p,3} = \left(\left(\frac{-3}{p}\right)-1\right)$$

と置いた。Atkin-Lehner involution の跡の公式は [17] で与えられている。記述の簡略化のため素数 p に対して $p>3$ を仮定すると、2 以上の偶数 k について

$$\mathrm{tr} W_p = -\frac{(-1)^{k/2}}{2}h(-p)\,\eta_p + \begin{cases} 1 & \text{if } k=2 \\ 0 & \text{if } k>2 \end{cases}$$

となる。ただし、$h(-p)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数とし、$\eta_p = \begin{cases} 1 & \text{if } p\equiv 1 \mod 4 \\ 2 & \text{if } p\equiv 7 \mod 8 \\ 4 & \text{if } p\equiv 3 \mod 8 \end{cases}$ と定める。

前セクションで述べた性質により、

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k^{\mathrm{new}\,+}(\Gamma_0(p)) = \frac{(-1)^{k/2}\mathrm{tr} W_p + \dim_{\mathbb{C}} S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p))}{2}$$

なのだから、$\dim_{\mathbb{C}} S_k^{\mathrm{new}\,\pm}(\Gamma_0(p))$ に関する公式もすぐに分かる。

当然、これらの公式は非負の整数をはじき返すのだけれども、公式を見た感想として「これらの公式の数値は何故に整数になるのか?」「数値そのものに数論的な意味があるのか?」という疑問を良く聞く。おそらく Pizer はそれらの疑問に対する一つの返答として、彼自身の T_{B} の公式より虚二次体の類数の満たす 2 の冪を法とする合同式を導いた (cf. [8, 9])。我々は [16] において Pizer の [8, 9] での T_{B} の公式を用いた計算を

カスプ形式の空間の次元公式を用いて解釈し直した。[16] での計算結果をまとめる。公式からの直接計算により、偶数 $k>2$ と素数 $p>3$ に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p)) \equiv \begin{cases} 0 \mod 2 & \text{if} \quad p \equiv 1 \text{ or } 3 \mod 8 \\ 1 \mod 2 & \text{if} \quad p \equiv 5 \text{ or } 7 \mod 8 \end{cases}$$

が成り立つ。そして、$\dim_{\mathbb{C}} S_k^{\mathrm{new}\,+}(\Gamma_0(p))$ が整数であることから上述の等式より $\mathrm{tr}W_p \equiv \dim_{\mathbb{C}} S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(p)) \mod 2$ となるので、上の $\mathrm{tr}W_p$ の明示的公式より、偶数 $k>2$ と素数 $p>3$ について

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k(\Gamma_0(p)) \equiv h(-p) \times \begin{cases} 1/2 \mod 2 & \text{if } p \equiv 1 \mod 4 \\ 1 \mod 2 & \text{if } p \equiv 7 \mod 8 \\ 0 \mod 2 & \text{if } p \equiv 3 \mod 8 \end{cases}$$

が成り立つ。カスプ形式の空間の次元の偶数奇数は虚二次体の類数 $h(-p)$ の 2 の冪の合同式と関係していることが分かる。

3. 2 次のジーゲルカスプ形式の空間の次元について

まずは 2 次のジーゲルカスプ形式の空間について復習する。既約有理表現 $\rho_{k,j}$: $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(j+1,\mathbb{C})$ を j 次の対称テンソル表現 Sym_j によって $\rho_{k,j} = \det^k \otimes \mathrm{Sym}_j$ と定める。2 次のジーゲル上半空間 $\mathfrak{H}_2$ を

$$\mathfrak{H}_2 = \{\, Z \in M(2,\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z \text{ かつ } \mathrm{Im}(Z) \text{ は正定値} \,\}$$

と定める。ただし、$M(2,\mathbb{C})$ は複素数 $\mathbb{C}$ を成分とする 2 行 2 列の行列全体とし、${}^tZ$ は $Z \in M(2,\mathbb{C})$ の転置行列とする。$\mathbb{Q}$ 上定義される階数 2 のシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(2)$ を

$$\mathrm{Sp}(2) = \left\{ g \in \mathrm{GL}(4) \mid g \begin{pmatrix} O_2 & I_2 \\ -I_2 & O_2 \end{pmatrix} {}^tg = \begin{pmatrix} O_2 & I_2 \\ -I_2 & O_2 \end{pmatrix} \right\}$$

と定める。$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ は $\mathfrak{H}_2$ に

$$g \cdot Z := (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$$

($Z \in \mathfrak{H}_2$ かつ $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2,\mathbb{R})$) と作用する。$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Q})$ の算術的部分群 Γ に対して、ジーゲルカスプ形式の空間 $S_{k,j}(\Gamma)$ を次の二つの条件 (1) と (2) を満たす正則関数 $f : \mathfrak{H}_2 \to \mathbb{C}^{j+1}$ 全体から成る空間として定義する。

(1) $f(\gamma \cdot Z) = \rho_{k,j}(CZ+D) f(Z) \chi(\gamma)$ ($\forall \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma, \forall Z \in \mathfrak{H}_2$),

(2) $|\rho_{k,j}(\mathrm{Im}(Z)^{1/2}) f(Z)|_{\mathbb{C}^{j+1}}$ は $\mathfrak{H}_2$ 上有界である。ただし $\mathrm{Im}(Z)^{1/2}$ は $(\mathrm{Im}(Z)^{1/2})^2 = \mathrm{Im}(Z)$ を満たす対称行列とする。

もし $-I_4 \in \Gamma$ かつ j が奇数ならば, $S_{k,j}(\Gamma) = \{0\}$ となることに注意しよう。

続いて次元 $\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\Gamma)$ と $\mathrm{PGSp}(2)$ の保型表現の数の関係について考えよう。まず $\mathbb{Q}$ 上定義される代数群 $\mathrm{GSp}(2)$ を

$$\mathrm{GSp}(2) = \left\{ g \in \mathrm{GL}(4) \mid {}^{\exists}\lambda(g) \in \mathrm{GL}(1) \text{ s.t. } g \begin{pmatrix} O_2 & I_2 \\ -I_2 & O_2 \end{pmatrix} {}^tg = \lambda(g) \begin{pmatrix} O_2 & I_2 \\ -I_2 & O_2 \end{pmatrix} \right\}$$

と定める。そして、Z を $\mathrm{GSp}(2)$ の中心として、

$$G = \mathrm{PGSp}(2) = \mathrm{GSp}(2)/Z$$

と置く。$\widehat{G(\mathbb{A})}$ を $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合とする。$L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ の離散スペクトル $L^2_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ は

$$L^2_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})) \cong \bigoplus_{\pi\in\widehat{G(\mathbb{A})}} m_\pi^{\mathrm{dis}}\cdot\pi$$

と可算個の既約ユニタリ表現の直交直和に分解する。ただし、m_π^{dis} は非負の整数で、π の重複度と呼ばれる。$\mathrm{GSp}(2,\mathbb{R})^+ = \{g\in\mathrm{GSp}(2,\mathbb{R})\,|\,\lambda(g)>0\}$ と置く。そして、$K_{\mathrm{fin}}=\prod_{v<\infty}K_v$ を $\mathrm{GSp}(2,\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ の開コンパクトな部分群とする。ここで、各有限素点 v について

$$K_v\supset\{\mathrm{diag}(x,x,y,y)\in\mathrm{GSp}(2,\mathbb{Z}_v)\,|\,x,\,y\in\mathbb{Z}_v^\times\}$$

と仮定する。算術的部分群 Γ を

$$\Gamma=\mathrm{GSp}(2,\mathbb{Q})\cap(\mathrm{GSp}(2,\mathbb{R})^+K_{\mathrm{fin}})$$

によって定義する。$G(\mathbb{A})$ の保型表現 $\pi=\otimes_v\pi_v$ に対して、$\pi_{\mathrm{fin}}=\otimes_{v<\infty}\pi_v$ と置く。そして、π_{fin} の表現空間を $V_{\pi,\mathrm{fin}}$ として、その部分空間 $N_{\pi,K_{\mathrm{fin}}}$ を

$$N_{\pi,K_{\mathrm{fin}}}=\{v\in V_{\pi,\mathrm{fin}}\,|\,\pi_{\mathrm{fin}}(k)v=v\quad({}^\forall k\in K_{\mathrm{fin}})\}$$

とする。もちろん π は許容表現なので、$\dim_{\mathbb{C}}N_{\pi,K_{\mathrm{fin}}}$ は有限になる。$G(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現 $\sigma_{k,j}$ を、極小 K-type が $Sp(2,\mathbb{R})$ の極大コンパクト群 $\mathrm{U}(2)$ に制限した時に $\det^k\otimes\mathrm{Sym}_j$ を既約成分に持つものとする。$k\geq 3$ と $j\geq 0$ を仮定する。以上の設定の下で次の等式が成り立つ。

$$\dim_{\mathbb{C}}S_{k,j}(\Gamma)=\sum_{\pi\in\widehat{G(\mathbb{A})},\,\pi_\infty\cong\sigma_{k,j}} m_\pi^{\mathrm{dis}}\cdot\dim_{\mathbb{C}}N_{\pi,K_{\mathrm{fin}}}. \tag{3.1}$$

セクション 1 での議論と同様にこの等式により、[11, 14] の局所新形式の結果を用いれば、次元と保型表現の数を関係付けることがでる。

$G(\mathbb{Q}_p)$ のコンパクト部分群 $K_{0,p}=G(\mathbb{Z}_p)$,

$$K_{1,p}=G(\mathbb{Z}_p)\cap x_1M(2,\mathbb{Z}_p)x_1^{-1},\quad x_1=\mathrm{diag}(1,1,p,p),$$

$$K_{2,p}=G(\mathbb{Q}_p)\cap x_2M(2,\mathbb{Z}_p)x_2^{-1},\quad x_2=\mathrm{diag}(1,1,p,1)$$

を考える。そして、$l=0$, 1, or 2 について

$$K_{l,\mathrm{fin}}=\prod_{v<\infty,\,v\neq p}G(\mathbb{Z}_v)\times K_{l,p}$$

とコンパクト群 $K_{l,\mathrm{fin}}$ を定める。明らかに

$$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})=\mathrm{GSp}(2,\mathbb{Q})\cap(\mathrm{GSp}(2,\mathbb{R})^+K_{0,\mathrm{fin}})$$

が成り立つ。さらに

$$\Gamma_0^{(2)}(p)=\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})\cap x_1M(4,\mathbb{Z})x_1^{-1},\quad K(p)=\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Q})\cap x_2M(4,\mathbb{Z})x_2^{-1}$$

と置くと、

$$\Gamma_0^{(2)}(p)=\mathrm{GSp}(2,\mathbb{Q})\cap(\mathrm{GSp}(2,\mathbb{R})^+K_{1,\mathrm{fin}}),$$
$$K(p)=\mathrm{GSp}(2,\mathbb{Q})\cap(\mathrm{GSp}(2,\mathbb{R})^+K_{2,\mathrm{fin}})$$

と対応する。次の様なこれらの離散群に対する空間の次元の関係式を考える。

$$Y(k,j,p)=\begin{cases}\dim_{\mathbb{C}} S_{j+2}^{\mathrm{new}\,-}(\Gamma_0(p))\times\dim_{\mathbb{C}} S_{j+2k-2}^{\mathrm{new}\,-}(\Gamma_0(p)) & \\ \quad +\dim_{\mathbb{C}} S_{j+2}^{\mathrm{new}\,+}(\Gamma_0(p))\times\dim_{\mathbb{C}} S_{j+2k-2}^{\mathrm{new}\,+}(\Gamma_0(p)) & \text{if } k \text{ is even}\\ \dim_{\mathbb{C}} S_{j+2}^{\mathrm{new}\,-}(\Gamma_0(p))\times\dim_{\mathbb{C}} S_{j+2k-2}^{\mathrm{new}\,+}(\Gamma_0(p)) & \\ \quad +\dim_{\mathbb{C}} S_{j+2}^{\mathrm{new}\,+}(\Gamma_0(p))\times\dim_{\mathbb{C}} S_{j+2k-2}^{\mathrm{new}\,-}(\Gamma_0(p)) & \text{if } k \text{ is odd}\end{cases},$$

$$SK(k,j,p)=\begin{cases}0 & \text{if } j>0\\ \dim_{\mathbb{C}} S_{2k-2}^{\mathrm{new}\,+}(\Gamma_0(p)) & \text{if } j=0 \text{ and } k \text{ is even}\\ -\dim_{\mathbb{C}} S_{2k-2}^{\mathrm{new}\,-}(\Gamma_0(p)) & \text{if } j=0 \text{ and } k \text{ is odd}\end{cases},$$

$$\begin{aligned}E(k,j,p)=&\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\Gamma_0^{(2)}(p))-\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(K(p))-2\cdot\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))\\ &-Y(k,j,p)-SK(k,j,p).\end{aligned}$$

我々の明示的次元公式（Hashimoto, Ibukiyama, W., Tsushima による）と計算機を用いることで、[16, Theorem 3] において $k\geq 5$, $j\geq 0$ に対して $E(k,j,p)$ が非負の偶数になることを示した。

これより $E(k,j,p)$ が非負の偶数になる意味を考えてみよう。まずは保型表現の数に関する記号から定めよう。Roberts と Schmidt の表 (cf. [11, 14]) に合わせて Sally-Tadić[12] の $\mathrm{GSp}(2,\mathbb{Q}_p)$ の許容表現の分類の記号を用いる (IIa や IIIb など)。R をその分類のクラスの一つとする。そして、$X(R,k,j,p)$ を表現 $\pi=\otimes_v\pi_v\in\widehat{G(\mathbb{A})}$ で

(i) $\pi_\infty\cong\sigma_{k,j}$,
(ii) π_p belongs to the class R,
(iii) 各 $v\neq p,\infty$ について π_v は不分岐

を満たすものから成る $\widehat{G(\mathbb{A})}$ の部分集合とする。まず Schmidt の局所新形式の空間の次元と等式 (3.1) より

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\Gamma_0^{(2)}(p))-\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(K(p))-2\cdot\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))\\ &=\sum_{\pi\in X(\mathrm{IIIa},k,j,p)}2\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}}+\sum_{\pi\in X(\mathrm{IIIb},k,j,p)}(-2)\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}}+\sum_{\pi\in X(\mathrm{IVb},k,j,p)}2\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}}\\ &\quad+\sum_{\pi\in X(\mathrm{IVc},k,j,p)}(-2)\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}}+\sum_{\pi\in X(\mathrm{IVd},k,j,p)}(-2)\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}}+\sum_{\pi\in X(\mathrm{VIa},k,j,p)}m_\pi^{\mathrm{dis}}\\ &\quad+\sum_{\pi\in X(\mathrm{VIb},k,j,p)}m_\pi^{\mathrm{dis}}+\sum_{\pi\in X(\mathrm{VIc},k,j,p)}(-1)\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}}+\sum_{\pi\in X(\mathrm{VId},k,j,p)}(-1)\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}}\end{aligned}$$

が成り立つ。当然この等式では偶数になる理由が全く分からない。偶数なることを説明するためにはアーサー予想が必要となる。**以下、G の保型表現に関するアーサー予想を仮定する。** L^2-保型表現 $\pi=\otimes_v\pi_v$, $\pi_\infty\cong\sigma_{k,j}$ は次の三つのタイプに分類される (cf. [1])。

(G) 一般タイプ　(Y) 吉田タイプ　(SK) 斎藤-黒川タイプ

(Y) と (SK) の保型表現のパケットは GL(2) の保型表現によって構成される。つまり、その数は GL(2) の保型表現の数によって記述できる。Roberts[10] によりタイプ (Y) のパケットは構成されており、アーサー予想の仮定と局所表現の分類より、$Y(k,j,p)$ は $S_{k,j}(\Gamma_0^{(2)}(p))$ におけるタイプ (Y) の保型形式から成る部分空間の次元と等しくなる。また $S_{k,j}(K(p))$ と $S_{k,j}(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ は (Y) の保型形式を持たない。$SK_{k,j}(\Gamma)$ をタイ

プ (SK) の保型形式から成る $S_{k,j}(\Gamma)$ の部分空間とする。一方、(SK) のパケットは [7, 15] で構成されており、仮定と局所表現の分類から $SK(k,j,p) = \dim_{\mathbb{C}} SK_{k,j}(\Gamma_0^{(2)}(p)) - \dim_{\mathbb{C}} SK_{k,j}(K(p)) - 2\cdot\dim_{\mathbb{C}} SK_{k,j}(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ が導かれる。よって、もし $X_G(R,k,j,p)$ をタイプ (G) から成る $X(R,k,j,p)$ の部分集合とすると、

$$\begin{aligned} E(k,j,p) = & \sum_{\pi\in X_G(\mathrm{IIIa},k,j,p)} 2\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}} + \sum_{\pi\in X_G(\mathrm{IIIb},k,j,p)} (-2)\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}} + \sum_{\pi\in X_G(\mathrm{IVb},k,j,p)} 2\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}} \\ & + \sum_{\pi\in X_G(\mathrm{IVc},k,j,p)} (-2)\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}} + \sum_{\pi\in X_G(\mathrm{IVd},k,j,p)} (-2)\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}} + \sum_{\pi\in X_G(\mathrm{VIa},k,j,p)} m_\pi^{\mathrm{dis}} \\ & + \sum_{\pi\in X_G(\mathrm{VIb},k,j,p)} m_\pi^{\mathrm{dis}} + \sum_{\pi\in X_G(\mathrm{VIc},k,j,p)} (-1)\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}} + \sum_{\pi\in X_G(\mathrm{VId},k,j,p)} (-1)\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}} \end{aligned}$$

を得る。アーサー予想によると (G) に属する保型表現は一般ラマヌジャン予想を満たすため、局所表現はすべて緩増加である。そのため、

$$E(k,j,p) = \sum_{\pi\in X_G(\mathrm{IIIa},k,j,p)} 2\cdot m_\pi^{\mathrm{dis}} + \sum_{\pi\in X_G(\mathrm{VIa},k,j,p)} m_\pi^{\mathrm{dis}} + \sum_{\pi\in X_G(\mathrm{VIb},k,j,p)} m_\pi^{\mathrm{dis}}$$

を得る。あとは VIa と VIb の適切な二つの元が局所 L-パケットを構成することに気をつければ、アーサー予想の仮定の下で $E(k,j,p)$ が非負の偶数になることが理解できる。これが $E(k,j,p)$ が非負の偶数になるになることの表現論的な解釈になる。$E(k,j,p)$ が偶数であることより空間の次元と虚二次体の類数についてのいくつかの合同式も得られる。

REFERENCES

[1] J. Arthur, Automorphic representations of GSp(4), Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory, 65–81, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004.

[2] W. Casselman, On some results of Atkin and Lehner, Math. Ann. **201** (1973), 301–314.

[3] M. Eichler, Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren (German), J. Reine Angew. Math. **195** (1955), 127–151.

[4] Y. Hasegawa, K. Hashimoto, On type numbers of split orders of definite quaternion algebras, Manuscripta Math. **88** (1995), 525–534.

[5] H. Jacquet, R. P. Langlands, Automorphic forms on GL(2), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[6] T. Miyake, Modular forms, Translated from the Japanese by Yoshitaka Maeda, Springer-Verlag, Berlin, 1989. x+335 pp.

[7] I. Piatetski-Shapiro, On the Saito-Kurokawa Lifting, Invent. Math. **71** (1983), 309–338.

[8] A. Pizer, Type numbers of Eichler orders, J. Reine Angew. Math. **264** (1973), 76–102.

[9] A. Pizer, On the 2-part of the class number of imaginary quadratic number fields, J. Number Theory **8** (1976), 184–192.

[10] B. Roberts, Global L-packets for GSp(2) and theta lifts. Doc. Math. **6** (2001), 247–314

[11] B. Roberts, R. Schmidt, Local Newforms for GSp(4), Springer Lecture Notes in Mathematics **1918** (2007).

[12] P. Sally, M. Tadić, Induced representations and classifications for $\mathrm{GSp}(2,F)$ and $\mathrm{Sp}(2,F)$, Mém. Soc. Math. Fr. **52** (1993), 75–133.

[13] R. Schmidt, Some remarks on local newforms for GL(2), J. Ramanujan Math. Soc. **17** (2002), 115–147.

[14] R. Schmidt, Iwahori-spherical representations of GSp(2) and Siegel modular forms of degree 2 with square-free level, J. Math. Soc. Japan **57** (2005), 259–293.

[15] R. Schmidt, The Saito-Kurokawa lifting and functoriality, Amer. J. Math. **127** (2005), 209–240.

[16] S. Wakatsuki, Congruences modulo 2 for dimensions of spaces of cusp forms, submitted.

[17] M. Yamauchi, On the traces of Hecke operators for a normalizer of $\Gamma_0(N)$. J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973), 403–411.

Faculty of Mathematics and Physics, Institute of Science and Engineering, Kanazawa University, Kakumamachi, Kanazawa, Ishikawa, 920-1192, Japan

E-mail address: `wakatuki@kenroku.kanazawa-u.ac.jp`