数理解析研究所講究録
第 1778 巻 2012 年 143-149



# Barbour path of operator monotone functions

木更津工業高等専門学校　和田　州平 (Shuhei Wada)
Kisarazu National College of Technology
富山大学・理学部　　久保　文夫 (Fumio Kubo)
Faculty of Science, University of Toyama
富山高等専門学校　中村　登 (Noboru Nakamura )
Toyama National College of Technology
入善高等学校　大野　晃司 (Koji Ohno)
Toyama prefectual Nyuzen highschool

## 1　背景と目的

冪関数の族 $\{t^{x}\ :\ 0\leq x\leq 1\}$ は正規作用素単調関数の族 (久保-安藤 [4] の意味での作用素平均の族) として良く知られておりこの関数族の「path としての幾何学的性質」も詳しく調べられている [3, 2]. 関数 $t^{x}$ を線型分数関数

$$\frac{\alpha x+\beta(1-x)}{x+\gamma(1-x)} \tag{1.1}$$

で補間すると

$$L_{t}(x)=\frac{tx+\sqrt{t}(1-x)}{x+\sqrt{t}(1-x)}\quad (0\leq x\leq 1) \tag{1.2}$$

となる $(L_{t}(0)=t^{0}, L_{t}(1/2)=t^{1/2}, L_{t}(1)=t^{1}$ は容易に確認できる). $\{L_{x}\}$ は $\{t^{x}\}$ と同じく関数 1 から関数 $t$ に至る,「作用素平均の作る path」である.

筆者らは, 作用素平均の作る path(1.1) について考察してきた. 本稿ではこれら path の持つ基本的な性質について述べる. 詳しくは, path

$$\frac{tx+f(t)(1-x)}{x+f(t)(1-x)}\quad (0\leq x\leq 1) \tag{1.3}$$

が作用素平均のつくる path となるための条件, およびその凸性について議論する.

## 2　Barbour path の基本的性質

上記の path(1.1) を Barbour path と呼ぶことにする. ここで $\alpha, \beta, \gamma$ は開区間 $(0, \infty)$ 上の正数値連続関数とする. Barbour path の命名は J.M.Barbour

[1] が楽器の設計に関連して，関数 (1.2) を用いたことに因んでいる．Barbour path はその始点，中間点，終点が決まれば一意に定まる．

**命題 2.1.** 正の連続関数 $f(t), g(t), h(t)$ が与えられて，有限個の点を除き $f(t) \neq h(t)$ のとき，(始点，中間点，終点) $=(f(t), g(t), h(t))$ となる *Barbour path* が存在すれば，それは一意である．

Barbour path $\varphi_t(x) = \frac{\alpha x+\beta(1-x)}{x+\gamma(1-x)}$ の他の性質をいくつか挙げておこう．
(1) $(\varphi_t(0), \varphi_t(1/2), \varphi_t(1)) = (1, 1, t)$ あるいは $(\varphi_t(0), \varphi_t(1/2), \varphi_t(1)) = (1, t, t)$ となる Barbour path は存在しない．
(2) Barbour path $\varphi_t(x)$ が存在して，$(\varphi_t(0), \varphi_t(1/2), \varphi_t(1))$ が作用素単調の組であっても $\varphi_t(x)$ は作用素平均の path であるとは限らない．例えば $(\varphi_t(0), \varphi_t(1/2), \varphi_t(1)) = (1, t, \sqrt{t})$ となる Barbour path $\varphi_t(x)$ は作用素平均の path ではない（$\varphi_t(1/3)$ は monotone でない）．
(3) Barbour path の分子分母に現れる関数 $\alpha, \beta, \gamma$ が作用素平均であっても，Barbour path 全体として作用素平均のクラスに入っていない例もある．例えば $x = \frac{1}{2}$ のとき，

$$\frac{t^{\frac{1}{4}}x + \sqrt{t}(1-x)}{x + \sqrt{t}(1-x)}$$

は monotone でない．

作用素平均 $f, g, h$ に対して $f, g, h$ が，それぞれ始点，中間点，終点 となっている Barbour path を，$[f, g, h]$ と書くことにする．

# 3　作用素単調性を保存する変換

以後，

$$OM_+ := \{f | f : (0, \infty) \to (0, \infty),\ \ f \text{ は作用素単調}\}$$

$$OM_+^1 := \{f | f : (0, \infty) \to (0, \infty),\ \ f(1) = 1,\ \ f \text{ は作用素単調}\}$$

とする．$OM_+$ の要素 $f$ に対して

$$\hat{f} = \frac{t+f}{1+f}$$

と定義する．対応 $f \mapsto \hat{f}$ は $OM_+$ から $OM_+^1$ への 1 対 1 の変換であるが onto ではない．実際，

$$\widehat{OM_+} := \{\hat{f} | f \in OM_+\}$$

とすると，$\widehat{OM_+} \not\ni 1, t$ である．この変換 $f \mapsto \hat{f}$ の逆変換は容易に計算できる．$\widehat{OM_+}$ の要素 $g$ について

$$\check{g}(t) = \frac{t-g}{g-1}$$

とすれば，これが求める逆変換である．さらに一般に $OM_+^1 \setminus \{1,t\}$ の要素 $g$ に対して $\check{g}$ が定義できる．ここで $\check{g} = \frac{t-1}{g(t)-1} - 1$ に注意すれば $\check{g}$ の作用素単調性は $\frac{t-1}{g(t)-1}$ の作用素単調性と同値であることがわかる．$\frac{t-1}{g(t)-1}$ の作用素単調性はよく知られている (see [5] ) ので以下が成り立つ．

**命題 3.1.** (i) $OM_+^1 \setminus \{1,t\} = \widehat{OM_+}$

(ii) $\{f \in OM_+^1 \mid ! \le f \le \nabla\} = \widehat{OM_+^1}$

上の命題から，$OM_+^1 \setminus \{1,t\}$ の要素 $g$ に対して $\check{g} \in OM_+$ が定まり，

$$\varphi_t(x) = \frac{tx + \check{g}(t)(1-x)}{x + \check{g}(t)(1-x)}$$

とすれば $\varphi_t(x)$ は $OM_+^1$ 上の Barbour path $[1, g, t]$ である．

**命題 3.2.** $OM_+^1 \setminus \{1,t\}$ に属する関数 $g$ に対して，*Barbour path* $[1,g,t]$ が $OM_+^1$ 上に唯一つ存在する．

自明でない作用素平均 $\sigma$ に対して得られた Barbour path $[1,\sigma,t]$ の各点を用いて，関数 $f$ と $g$ の平均をとると以下の結果となる．

**定理 1.** 相異なる正規作用素単調関数 $f, g$ と自明でない作用素平均 $\sigma$ に対して作用素平均からなる *Barbour path* $[f, f\sigma g, g]$ が唯一つ存在する．

Barbour path$[1, f, t]$ の各点は作用素平均であるから，変換^で写すことができる．$\hat{1} = \frac{t+1}{2}$, $\hat{t} = \frac{2t}{1+t}$ だから $[1, f(t), t]$ を^で写した先の Barbour path は $[\nabla, \hat{f}, !]$ となる．

**命題 3.3.** $OM_+^1 \setminus \{1,t\}$ に属する関数 $f$ に対して，$OM_+^1$ 上の *Barbour path* $[\nabla, \hat{f}, !]$ が唯一つ存在する．

**系 3.4.** *Barbour path* $[\nabla, \#, !]$ が $OM_+^1$ 上に唯一つ存在する．

## 4 Barbour path の凸性

Barbour path の凸性について考える．

$$\varphi(x) := \frac{fx + g(1-x)}{x + h(1-x)}$$

とおく．$\varphi$ が凸であることと，$\frac{d^2\varphi}{dx^2} \geq 0$ は同値なので 2 回微分してみる．

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{2(1-h)^2}{(x+h(1-x))^2}\left(-\frac{f-g}{1-h}+\varphi\right)$$

なので，

$$\varphi \text{が凸である} \iff \varphi \geq \frac{f-g}{1-h}$$

となる．

上の議論において $\widehat{OM_+^1} = \{f \in OM_+^1 \mid ! \leq f \leq \nabla\}$ に属する関数 $f$ に対して，

$$\varphi(x) = \frac{tx + \check{f}(1-x)}{x + \check{f}(1-x)}$$

とすると，$\varphi$ が凸であることと以下が同値となる

$$\varphi \geq \frac{t-\check{f}}{1-\check{f}}. \tag{4.1}$$

ここで分母が 0 の場合に $\varphi$ は凸であることは明らか．

この式 (4.1) について，詳しく見て行こう．まず，$0<t<1$ の場合について，3 通りに分けて考える．

(1) $0<t<1$ のとき

(1-1) $0<t<1$ かつ $1<\check{f}(t)$ のとき

$$\check{f}(\check{f}-1) < \check{f}(\check{f}-t)$$

$$(\check{f}-1)(t-\check{f})x + \check{f}(\check{f}-1) < (\check{f}-1)(t-\check{f})x + \check{f}(\check{f}-t)$$

$$[1,f,t] < \frac{t-\check{f}}{1-\check{f}}$$

となり，(4.1) は成り立たない

(1-2)　$0<t<1$ かつ $t<\check{f}(t)<1$ のときは $\frac{t-\check{f}}{1-\check{f}}$ が負になるので明らかに (4.1) が成立．

(1-3) $0<t<1$ かつ $\check{f}(t)<t$ のとき

$$\check{f}(1-\check{f}) \geq \check{f}(t-\check{f})$$

$$(1-\check{f})(t-\check{f})x + \check{f}(1-\check{f}) \geq (1-\check{f})(t-\check{f})x + \check{f}(t-\check{f})$$

$$[1,f,t] \geq \frac{t-\check{f}}{1-\check{f}}$$

したがって (4.1) が成立する．

次に $t>1$ の場合について，3 通りに分けて考える．

(2) $1<t$ のとき

(2-1) $1<t$ かつ $t<\check{f}(t)$ のとき

$$\check{f}(\check{f}-1) \geq \check{f}(\check{f}-t)$$

$$(\check{f}-1)(t-\check{f})x+\check{f}(\check{f}-1) \geq (\check{f}-1)(t-\check{f})x+\check{f}(\check{f}-t)$$
$$[1,f,t] \geq \frac{t-\check{f}}{1-\check{f}}$$

となり，(4.1) は成り立つ

(2-2) $1<t$ かつ $t>\check{f}(t)>1$ のときは $\frac{t-\check{f}}{1-\check{f}}$ が負になるので明らかに (4.1) が成立.

(2-3) $1<t$ かつ $\check{f}(t)<1$ のとき

$$\check{f}(1-\check{f})<\check{f}(t-\check{f})$$
$$(1-\check{f})(t-\check{f})x+\check{f}(1-\check{f})<(1-\check{f})(t-\check{f})x+\check{f}(t-\check{f})$$
$$[1,f,t]<\frac{t-\check{f}}{1-\check{f}}$$

したがって (4.1) は成り立たない.

以上の議論から以下が成り立つ.

$$[1,f,t] \text{ が凸} \iff \check{f}(1)=1.$$

さらに命題 3.1 を用いて以下がわかる.

**定理 2.** $[1,f,t]$ が凸 $\iff$ $!(t) \leq f(t) \leq \nabla(t)$

## 5 log 凸性

log 凸性について考える. $f \in OM_+^1 \setminus \{1,t\}$ かつ $!(t) \leq f(t) \leq \nabla(t)$ を仮定する.

$\Phi_t(x) := \log[1,f,t]$ とおく.

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}=\frac{(1-\check{f})^2}{\{tx+\check{f}(1-x)\}^2}\left([1,f,t]^2-\frac{(t-\check{f})^2}{(1-\check{f})^2}\right)$$

となるから,

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} \quad \geq 0 \quad \iff [1,f,t] \geq \left|\frac{t-\check{f}}{1-\check{f}}\right|=\left(\frac{t+1}{2}\right)\left(\frac{f-!}{\nabla-f}\right).$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Phi}{dx^2} \quad \geq 0 \quad &\iff [1,f,t] \geq \nabla\left(\frac{f-!}{\nabla-f}\right)\\ &\iff tx+\check{f}(1-x)-\nabla\left(\frac{f-!}{\nabla-f}\right)(x+\check{f}(1-x)) \geq 0\end{aligned}$$

となる．直前の不等式の左辺を $g(x)$ とおくと $g$ の最小値は $g(0)$ か $g(1)$ だから，

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} \geq 0 \iff \min\{g(0), g(1)\} \geq 0$$

まず，$g(1) \geq 0$ を整理すると

$$\left(\frac{\nabla + 1}{\nabla + t}\right) t \geq f$$

で左辺は $\hat{!}$ である．つぎに，$g(0) \geq 0$ を整理すると

$$\left(\frac{\nabla + t}{\nabla + 1}\right) \geq f$$

で左辺は $\hat{\nabla}$ である．

**定理 3.** $[1, f, t]$ が log 凸 $\iff$ $!(t) \leq f(t) \leq \min\{\hat{!}(t), \hat{\nabla}(t)\}$

## 6　Barbour 変換

$OM_+$ 上の変換 $f \mapsto \hat{f} = \frac{t+f}{1+f}$ について再考する．既に見たように，以下の関係が成り立つ．

$$OM_+^1 \setminus \{1\} = \widehat{OM_+ \cup \{0\}}$$

$$\{f \in OM_+^1 \mid ! \leq f \leq \nabla\} = \widehat{OM_+^1}$$

ここでは，この変換 $f \mapsto \hat{f}$ を 2 回繰り返した変換 $f \mapsto \hat{\hat{f}}$ について考える．$OM_+ \cup \{0\}$ の要素 $f$ について

$$\hat{\hat{f}} = \nabla\left(1 + \frac{! - \nabla}{\nabla + f}\right)$$

と書ける．逆に $\hat{\hat{f}}$ を使って $f$ を書き下すと

$$f = \nabla\left(-1 + \frac{\nabla - !}{\nabla - \hat{\hat{f}}}\right)$$

となる．したがって，以下がわかる．

**命題 6.1.** $OM_+ \cup \{0\}$ の要素 $f, g$ について以下は同値．

(1) $f \leq g$

(2) $\hat{\hat{f}} \leq \hat{\hat{g}}$

**系 6.2.**

$$\{f \in OM_+^1 \mid f \leq !\} = \{!\}.$$

**系 6.3.**

$$\{f \in OM_+^1 \mid ! \leq f \leq \hat{\nabla}, \hat{!}\} = \{\hat{g} \mid g \in OM_+ \cup \{0\}, g \leq 1, t\}.$$

上の系から定理 3 で現れた集合 $\{f \in OM_+^1 \mid ! \leq f \leq \hat{\nabla}, \hat{!}\}$ は明らかに空でないことがわかる．例えば

$$! \leq \hat{\left(\frac{\hat{!}}{2}\right)} \leq \hat{\nabla}, \hat{!}$$

となる．

**謝辞**　本研究，特に主定理の別証明および log 凸性を満たす関数に関して刺激的な助言をくださった，東北大学の日合文雄 教授に感謝します．

## 参考文献

[1] J. M. Barbour, *A geometrical approximation to the roots of numbers*, Amer. Math. Monthly, **64** (1957), 1-9.

[2] R. Bhatia and J. Holbrook, *Riemannian geometry and matrix geometric means*, Linear Algebra Appl. **413** (2006), no. 2-3, 594–618.

[3] G. Corach, H. Porta and L. Recht, *Geodesics and operator means in the space of positive operators*, Internat. J. Math. **4** (1993), no. 2, 193–202.

[4] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246** (1979), no. 3, 205–224.

[5] M. Uchiyama, *Majorization and some operator monotone functions*, Linear Algebra Appl. **432** (2010) 1867–1872