数理解析研究所講究録
第 1787 巻 2012 年 65-78

大成算経巻之十六（權術）について

四日市大学・関孝和数学研究所　藤井康生（Yasuo　Fujii）
Seki Kowa Institute of Mathematics,
Yokkaichi Univeresity

大成算経巻之十六權術の問題の注・解説である．森本先生の「大成算経巻之十六後集題術弁（読み下し文)」(文献３）を用いさせていただいた．巻之十六の全容については柏原「『大成算経」巻之十六　題術弁について」(文献1）がある．術文中には縦書きの式（傍書法）が記入されているところがあるが, 横書きにしたため省略した．その代わり, 術文を数式であらわした所に対応する番号を入れた．数学史の研究で発表時には全問の注・解説（文献４）を配付したが，本稿では特徴のある權術のみについて述べる．權術の中で逐次近似法である索は後の和算家に大きな影響を及ぼした．松永良弼は「算法全経（廉術)」を著し，有馬頼ゆきは「逐索奇法」で逐索と呼び，松永の廉術を詳しく述べている．安島直円も「廉術変換」他で発展させている．また大成算経の權術，特に索は『算法勿憚改』の影響を受け発展させたと考えられる．

1　大成算経巻之十六の構成について

題術弁

全題第一　問題の与えられた条件が正しい（完全な）もの．

見題　加減乗除で解けるもの,

隠題　天元術を用いるもの．

伏題　補助の未知数を用いるもの,

潜題　年利之問題で１年より小さい期間が出ることや，多角形で一辺だけ短いものがあるなど畸数を含むもの．

病題第二　問題の与えられた条件が正しくない（不完全な）もの．

転題　与えられた条件が足りないもの．

繁題　与えられた条件が過剰のもの．層題　与えられた条件が不要に複雑にしているもの．例として約分をしていない，立方根にしているもの等を載せている．

反題　与えられた条件が正しくなく，答えの値は求められても，大小関係などの題意に矛盾する．

虚題　与えられた条件では方程式の解が無い，負の解になる，解が求められても題意に反するなど．答えが求められないもの．

変題　与えられた条件では２つ以上の解が求められる．

□題　方程式の係数が0になるもの.
散題　与えられた量が少数であったり，与えられた量の一方が大きく，他方が小さくその差が大きく計算が面倒なもの.
実術第三
權術第四　好ましくない解法だが，問題や学ぶ者の力に応じて使う方法.
碎　1からはじめて2，3，4，と進み，結果に到達する目子算
索　逐次近似法によって解くもの.
断　求めやすいものを先に求める.
約　計算の途中で分数が出てきたときに割り算として計算するもの.
踈　定数の近似値を用いて計算をしているもの.
偏術第五　問題の解法や解答の書き方に偏りがあるもの.
□　術文中に割注があるもの
□　術文中に割注がないもの
略　術文中の傍書式に算木形式を用いないもの
塞　方程式の係数を述べたもの.
□　天元術を用いなくても解ける問題に天元術を用いたもの.
邪術第六　解法が適当でないもの.
重　術文中で不要な計算をしているもの.
滞　答えの値は正しいが術文が正しくないもの.
攣　問題より答えを正しく求められないもの.
戻　術文中で相消する両式が等しく，方程式を導くことができないもの.

2　權術第四，碎，索，断，約，踈

権術（けんじゅつ）に五あり。砕（さい）は、一を以て首（はじめ）となし、逐一、数を増減し、毎次、題数を比重し、積を馴らして之を求め、遂に定数を得る者これなり。（俗に目の子算と謂う。）搾（さく）は、木に臨んで或いは仮に親法を設け、或いは即ち題数に属し、初数を窺い得て後、術に依りて有余不足を視て其の差を以て損益して屡（しばしば）之を求め、遂に的数を得る者これなり。（俗に之を攷帯従と謂う。）此の両術は、浅きより深きを窮め遠きより近きに至るの法にして、其の所為、漸く遅しと雖も、得難きの数を求むるは、過るなし。是を以て或いは式を得て数を乗ずること最も高くして開出得難き者、或いは弧円截補の功にして輒［すみやかに］求め難き者、皆之に依って却って速やかに其の数を求め得る。是故に、諸術の本と為すなり。断（だん）は、或いは理に随いて易く暁かにして、乗除の先後争わず其の技錯乱して之を求め、或いは数を択び易く得、所問の本末を論ぜず、術を数次累（かさ）ねて之を求むるものこれなり。約（やく）は、或いは題数に依り、或いは所問に依り、術中に於いて真数を除し、段数を約すものこれなり。疎（そ）は、定率を立て所問を求む。故に答数の源に合技ると雖も、起術の功の速やかなるものこれなり。此の五斜、皆難を以て実術に非ず。専ら、解き難きに功を省くの要（かなめ）と為す。之を以て、或いは学者の浅深に準じ、或いは求数の一偏の用を成せば、悉（ことごと）く之を用うべし

2.1　碎　三問

2.1.1　16-46

仮如有銀一千枚問該重
答曰重四十三貫泉
術日一枚重四十三泉進位一十枚重知四百三十泉又進位一百枚重知四貫三百銭復進位一千枚重知四十三貫泉即為答数也
此術従一位拠進退之故不用定位法而自分大小之数名也
問題
銀 1000 枚が有る．その重さを問う
答えて曰く重さ 43 貫文
術曰く　1 枚の重さ 43 文，10 枚の重さ 430 文，100 枚の重さ 4300 文，1000 枚の重さ 43000 文，これは 43 貫である．

2.1.2　16-47

仮如有貧難五人毎人賜金一十五両問計金
答曰計七十五両
術日先置賜金一十五両于上位人数五内減一余四人置下位次上位加一十五両下位減一人得上位三十両下位三人　上位加一十五両下位減一人得上位四十五両下位二人上位加一十五両下位減一人得上位六十両下位一人　上位加十五両下位減一人得上位七十五両下位恰（あたかも）尽故即為計金也
此術以所言之一人為首逐加減之以尽為度故不用乗法自得総数也
問題
貧しく困難な 5 人がいる．1 人につき金 15 両を与える．金の合計を問う．
答えて曰く合計 75 両
術曰く　上位　1 人に与える金 15 両を置き，下位　5 人から 1 人を引いて残り 4 人
15 両を加え 30 両　,　　1 人を引いて残り 3 人
15 両を加え 45 両　,　　1 人を引いて残り 2 人
15 両を加え 60 両　,　　1 人を引いて残り 1 人
15 両を加え 75 両　,　　1 人を引いて残り 0 人
金 75 両

2.1.3　16-48

仮如有直積四十八寸只云長一尺二寸問闊
答曰闊四寸
術日先闊一寸置上位以長一尺二寸減積四十八寸余三十六寸置下位　上位加一寸得二寸下位減長一尺二寸余二十四寸上位加一得三寸下位減長一尺二寸余一十二寸又上位加一得四寸下

位減長一尺二寸恰尽故以上位為闊也
此術雖題中不言属一之数亦如前以一為首挹増損尽之故不用除法而得答数也

問題
長方形（直）が有る．面積は48寸である．只云う長を1尺2寸とする．闊を問う
答えて曰く闊4寸
術曰く上位　闊を1寸とする，　下位　48から12を引いて36
1寸を加えて闊を2寸，　36から12を引いて24
1寸を加えて闊を3寸，　24から12を引いて12
1寸を加えて闊を4寸，　12から12を引いて0
闊4寸
如是等者不記九数不塾乗除之従皆用此法也

2.2 索　三問

2.2.1 16-49

仮如有粳（うるち）糯（もち）二米共二十四石粳価全一十両糯価金二十両只云毎一両米差三斗問毎両米
答曰　毎両粳米一石　糯米七斗
術曰先以云差三斗即視第一毎両粳米以価一十両相乗得三石以減共数二十四石余二十一石以糯価二十両除之得第一毎両糯米一石〇三升加差三斗得第二米両粳米一石三斗九升以粳価一十両相乗得一十三石五斗以減共数余一十石〇5斗以糯価二十両除之得第二毎両糯米五斗二升五合加差得第三毎両粳米八斗二升五合以粳価相乗八石三斗五升以減共数余一十五石七斗五升以糯価除之得第三毎両米七斗八升七合五勺加差得第四毎両粳米一石〇八升七合五勺以粳価相乗得一十石〇八斗七升五合以減共数余一十三石一斗二升五合以糯価除之得第四毎両糯米六斗五升六合二勺五抄加差得第五毎両粳米九斗五升六合三勺五抄以粳価相乗得九石五斗六升二合五勺以減共数余一十四石四斗五升七合五勺以糯価除之得第五毎糯米七斗二升一合八勺七抄五撮（さつ）処如此窮毎両米之微也
此術題中差即準毎一両粳米糯米空以之為第一数聯綿而求之得定数也
問題
粳米と糯米の2種類の米が24石有る．粳米の価格は金10両，糯米の価格は金20両である．只云う，金1両につき粳米は糯米より3斗多い．金1両あたりの粳米，糯米を問う．
答えて曰く　金1両につき粳米1石，糯米7斗
術曰く
金1両あたりの粳米，糯米を粳米，糯米とする，粳米=0.3，糯米=0より始める

第1 差0.3粳米 $0.3 \times 10 = 3$ 糯米21 $21 \div 20 = 1.05$

第2 差0.3粳米 $1.35 \times 10 = 13.5$ 糯米10.5 $10.5 \div 20 = 0.525$

第3 差0.3粳米 $0.825 \times 10 = 8.25$ 糯米15.75 $15.75 \div 20 = 0.7875$

第 4　差 0.3 粳米　$1.0875 \times 10 = 10.875$　糯米 13.12521　$13.125 \div 20 = 0.65625$

第 5　差 0.3 粳米　$0.95625 \times 10 = 9.5625$　糯米 14.4375　$14.4375 \div 20 = 0.721875$

注記 粳米　$a_n \to a$　糯米　$b_n \to b$

$10a + 20b = 24 \quad a = b + 0.3 \quad a = 1 \quad b = 0.7$

$b_0 = 0$

$a_1 = 0.3 \quad b_1 = (24 - 10a_1) \div 20 = \frac{24}{20} - \frac{3}{20} = \frac{21}{20}$

$a_2 = b_1 + 0.3 = \frac{24}{20} - \frac{3}{20} + \frac{3}{10} \quad b_2 = (24 - 10a_2) \div 20 = \frac{24}{20} - \frac{24}{20 \cdot 2} + \frac{3}{20 \cdot 2} - \frac{3}{20}$

$a_3 = b_2 + 0.3 = \frac{24}{20} - \frac{24}{20 \cdot 2} + \frac{3}{20 \cdot 2} - \frac{3}{20} + \frac{3}{10}$

$b_3 = \frac{24}{20} - \frac{24}{20 \cdot 2} + \frac{24}{20 \cdot 2^2} - \frac{3}{20 \cdot 2^2} + \frac{3}{20 \cdot 2} - \frac{3}{20}$

$b = \frac{24}{20}\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \cdots\} - \frac{3}{20}\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \cdots\}$

$= \frac{24}{20}\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{3}{20}\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{24}{20}\frac{2}{3} - \frac{3}{20}\frac{2}{3} = \frac{7}{10}$

$a = b + 0.3 = 1$

この術は題中の差を金 1 両あたりの粳米，糯米空，とし，第 1 数とし続けて求めていき，定数を得る．

2.2.2　16-50

仮如有圭長二尺闊一尺六寸只云従左截積七十寸問截長闊
答曰　截長五寸　截闊一尺二寸
術曰置截積七十寸以闊一尺六寸除之得四寸三分七厘五毛為第一截長依梯術求仮闊一尺二寸五分積六十二寸三分四厘三毛七糸五以減截積七十寸余七寸六分五厘六毛二糸五以仮闊一尺一寸五分除之得六分一厘二毛五糸加第一截長四寸三分七厘五毛得四寸九分八厘七毛五糸為第二截長又依梯術求仮闊一尺二寸〇一厘積六十九寸八分四厘九毛九糸三七五以減截積余一分五厘〇〇六二六以第二仮闊一尺二寸〇一厘除之得一厘二毛四糸九四七九六二五加第二截長四寸九分八厘七毛五糸得四寸九分九厘九毛九糸九四七九六為第二截長逐如此求之也
此術以截積準直積以闊準縦求横為第二截長自是逐求積與截積相減余又準小形之置積以其闊準縦求小闊処加前截長也
問題
二等辺三角形（圭）がある．高さ（長）2 尺，底辺（闊）1 尺 6 寸とする．只云，左截積 70 寸のとき截長と截闊を問う．

答えて曰く　截長 5 寸　截闊 1 尺 2 寸

術曰く

截積 (70) ÷ 闊 (16) = 4.375 ··· 第 1 截長

仮闊 $= (20 - 4.375) \times 16 \div 20 = 12.5$　積 $= (16 + 12.5)4.375 \div 2 = 62.34375$

差 $= 70 - 62.34375 = 7.65625$

$$\frac{\text{差}}{\text{仮闊}} = \frac{7.65625}{12.5} = 0.6125 \quad 4.375 + 0.6125 = 4.9875 \cdots \text{第 2 截長}$$

闊 $= (20 - 4.9875) \times 16 \div 20 = 12.01$　積 $= (16 + 12.01)4.9875 \div 2 = 69.8499375$

差 $= 70 - 69.8499375 = 0.1500625$

$$\frac{\text{差}}{\text{仮闊}} = \frac{0.1500625}{12.01} = 0.012494796 \quad 4.9875 + 0.01249479 = 4.999994796 \cdots \text{第 3 截長}$$

注記 截長 $a_1 = \frac{70}{16}$　闊 $b_1 = (20 - a_1)\frac{16}{20}$　積 $c_1 = (16 + b_1)\frac{a_1}{2}$　差 $d_1 = 70(\text{条件より}) - c_1$

$$\frac{\text{差}}{\text{仮闊}} = \frac{d_1}{b_1} = e_1$$

$$a_2 = a_1 + e_1 \quad b_2 = (20 - a_2)\frac{16}{20} \quad c_2 = (16 + b_2)a_2 \div 2 \quad d_2 = 70 - c_2$$

$$\frac{\text{差}}{\text{仮闊}} = \frac{d_2}{b_2} = e_2 \quad a_3 = a_2 + e_2$$

$$c_2 = \frac{\{16 + (20 - a_1)\frac{16}{20}\}a_1}{2} = \frac{16a_1 + 16a_1 - \frac{16}{20}a_1^2}{2} = \frac{32a_1 - \frac{16}{20}a_1^2}{2}$$

$$d_2 = 70(A) - c_1$$

$$e_1 = \frac{d_2}{b_2} = \frac{140(2A) - (32a_1 - \frac{16}{20}a_1^2)}{2(20 - a_1)\frac{16}{20}} = \frac{35(A/2) \times 5 - 40a_1 + a_1^2}{2(20 - a_1)}$$

$$a_2 = a_1 + e_1 = \frac{35(A/2) \times 5 - a_1^2}{2(20 - a_1)}$$

$$a_{i+1} = \frac{35 \times 5 - a_i^2}{2(20 - a_i)}$$

$$5 - a_{i+1} = \frac{25 - 10a_i + a_i^2}{2(20 - a_i)} = \frac{(5 - a_i)^2}{2(20 - a_i)}$$

$$|5 - a_{i+1}| = \frac{|5 - a_i|^2}{|2(20 - a_i)|} < \frac{1}{2}|5 - a_i|^2 \ \rightarrow \ 0 \quad (a_i > a_1 = \frac{70}{16})$$

$$a_n \rightarrow \ 5$$

$$\frac{(16 + b)a}{2} = 70 \quad b : (20 - a) = 16 : 20 \quad b = (20 - a)\frac{16}{20}$$

$$a^2 - 40a + 175 = 0 \quad (a - 5)(a - 35) = 0 \quad a = 5$$

この術は截積を以て直積に準じ，闊を以て縦に準じて横を求め，第 1 截長と為す．自ずから是においって求める積と截積を相減じた余りまた小形に準じ積を置き其の闊を縦に準じ小闊を求め前に加え截長也

2.2.3　16-51

仮如有円径一尺只云従辺截積一十五寸問截矢
答曰　截矢二寸四分五厘八毛九糸八八三微強
術曰　列截積一十五寸以減半円積三十九寸二分七厘微弱余二十四寸二分七厘以円径一尺除之得二寸四分二厘七毛以減半円径五寸余二寸五分七厘三毛断末二位而得二寸五分為第一仮矢依弧術求得仮弦八寸六分六厘〇二糸五四弧積一十五寸三分五厘四毛六糸二一内減截積一十五寸余三分五厘四毛六糸二一以仮弦八寸六分六厘〇一糸五四除之得四厘一毛微弱以減為第一截矢二寸五分余二寸四分五厘九毛為第二截矢又依弧術求得仮弦八寸六分一厘二毛三糸九〇八四一弧積一十五寸〇〇〇五糸二八四四八内減截積一十五寸余五糸二八四四八以第三仮弦八寸六分一厘二毛三糸九〇八四一除之得六忽一一七微弱以減第二截矢二寸四糸五厘九毛余二寸四分五厘八毛九糸三八八三微強為第三截矢以之即為答数逐如此究其微也
此術以截積減半円積余準直積以円径準長而求開以減半径余為第一截矢従是処求弧積与截積相減以其余準小形之直積以仮弦準長求小闊屢減于前矢也
問題
円が有る．直径 1 尺とする．只云う辺に従って截積 15 寸のとき截矢を問う
答えて曰く　截矢 2 寸 4 分 5 厘 8 毛 9 糸 883 微強
術曰く，$\frac{\pi}{4} = 0.7854$

$$\text{半円径} - \frac{\text{半円積} - \text{截積}}{\text{円径}} = 5 - \frac{39.27 - 15}{10} = 5 - 2.427 = 2.573 \quad \text{第 1 仮矢} = 2.5$$

$$\text{仮弦} = \sqrt{4\,\text{矢}\,(\text{径} - \text{矢})} = \sqrt{4 \times 2.5 \times 7.5} = \sqrt{75} = 8.660254\ ,\ \text{弧積} = 15.354621$$

$$\text{第 1 截矢} - \frac{\text{弧積} - \text{截積}}{\text{仮弦}} = \text{第 2 截矢}$$

$$2.5 - 0.354621 \div 8.660254 = 2.5 - 0.041 = 2.459$$

$$\text{仮弦} = 8.612390841 \quad \text{弧積} = 15.000528448$$

$$\text{第 2 截矢} - \frac{\text{弧積} - \text{截積}}{\text{仮弦}} = \text{第 3 截矢}$$

$$2.459 - 0.000528448 \div 8.612390841 = 2.459 - 0.00006117 = 2.45893883$$

注記 截矢 $c_0 = \frac{R}{2} = r$，弧積 $S_0 = \frac{\pi r^2}{2}$，弦 $a_0 = R = 2r$　截積 A

$$r - \frac{\frac{\pi r^2}{2} - A}{R} = c_1 \quad c_0 - \frac{S_0 - A}{a_0} = c_1 \quad S_1\ ,\ a_1$$

$$c_1 - \frac{S_1 - A}{a_1} = c_2 \quad S_2\ ,\ a_2$$

$$\text{弧積} = \frac{1}{4}\{\ \text{弧} \times \text{径} - (\text{径} - 2\ \text{矢})\ \text{弦}\ \}$$

$$A = \frac{1}{4}\{sR - (R - 2c)a\} \quad a = \sqrt{r^2 - (r - 2c)^2} = \sqrt{4c(R - c)}$$

$$s = R\arcsin\frac{a}{R} = R\arccos\frac{R-2c}{R}$$

$$S_0 = \frac{1}{4}\{s_0R - (R-2c_0)a_0\} = \frac{\pi rR}{4} = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$S_1 = \frac{1}{4}\{s_1R - (R-2c_1)a_1\}\ ,\ s_1 = R\arccos\frac{R-2c_1}{R}\ ,\ a_1 = \sqrt{4c_1(R-c_1)}$$

$$f(c) = A\ ,\ f(c_0) = S_0$$

$$\frac{f(c_0)-f(c)}{c_0-c_1} = a_0\ ,\ \frac{f(c_i)-f(c)}{c_i-c_{i+1}} = a_i$$

$$f(c) = \frac{R^2}{4}\arccos\frac{R-2c}{R} - \frac{1}{4}(R-2c)\sqrt{4c(R-c)}$$

$$(\arccos\frac{R-2c}{R})' = \frac{1}{\sqrt{c(R-c)}}$$

$$\{(R-2c)\sqrt{c(R-c)}\}' = -2\sqrt{c(R-c)} + \frac{(R-2c)^2}{2\sqrt{c(R-c)}}$$

$$f(c)' = \frac{R^2}{4\sqrt{c(R-c)}} - \frac{1}{2}\{-2\sqrt{c(R-c)} + \frac{(R-c)^2}{2\sqrt{c(R-c)}}\} = 2\sqrt{c(R-c)} = a$$

$$\frac{f(c_i)-f(c)}{c_i-c_{i+1}} \fallingdotseq f(c_i) = a_i$$

$$c_i - \frac{f(c_i)-f(c)}{a_i} = c_{i+1}$$

この術は半円積から截積を減じた余り直積に準じる，円径を以て長に準じる．闊を求め半径より減じ第 1 截矢と為す．是に従って弧積を求め截積と相減して其の余りを以て小形の直積に準じて仮弦を長に準じ小闊を求め屡前矢より減じるなり．
是は真の技に非ずと雖も割円を用いて珠を裁る，形を寄せ珠其の功が有る也

補足　弧積について

研幾算法の第 1 問に弧積の問題が載せられているが，術文のままでは式が合わないように思われる．術文を以下のように修正する．
術文は，弦を a，矢を c，弧積を x とする．

甲 $= 16cx$ ，乙 $= 4c^2 + a^2$ ，丙 $= ((\text{乙} - 8c^2)a + \text{甲})^2$ ，丁 $= 183275520c^8\text{乙} + 81\ \text{乙}^5$

$A = 5733613568c^10 + 261217536c^6\text{乙}^2 + 96337664c^4\text{乙}^3 + 73573068c^2\text{乙}^4 - \text{丁} =$ 寄左

$B = 73549440c^4\text{乙} \times \text{丙} =$ 寄左相消 ，$A - B = 0$

ここで，Bについて術文ではc（矢）の三自乗（c^4 のこと）となっているが,

$B = 73549440c^2$乙 $\times$ 丙＝寄左相消

このようにcの２乗 (c^2) に修正すると，大成算経に載せられている値に近い値が求められる．
矢＝ 2.5 のとき，弧積= 15.354623
矢＝ 2.459 のとき，弧積= 15.0005333387
となり，まだ一致はしませんが近い値が求められる．

如是等者雖非真之技用割円裁珠之寄形而珠有其功也

2.3　断　三問

2.3.1　16-52

仮如有織工五人織錦三十匹今使二十一人織之問織錦
答曰錦一百二十六匹
術日置錦三十匹以工五人除之得一人織数六匹以人数二十一相乗得今織錦一百二十六匹也 此術先求属一人之数後乗人数得総計故所為之理自明也
問題
織工５人がいる．錦 30 匹を織る．今 21 人で織る．織る錦の数を問う．
答えて曰く錦 126 匹
術曰く

$30 \div 5 = 6$ ，$6 \times 21 = 126$

2.3.2　16-53

仮如有菱積一十八寸只云長為実平方開之得数與闊為実平方開之得数和共五寸問長闊
答曰長九寸　闊四寸
術曰立天元一為長開方数①　以減和余為闊開方数②　自之為闊③　寄左　列長開方数自之為長④　以寄左相乗為二段菱積⑤　再寄　列積倍之與再寄相消得開方式⑥　三乗方開之得長開平方数自之為長又以開方数減和余自之即闊也
此術先依求于商数術中之理易暁也
問題
菱形が有る．面積は 18 寸である．只云う長いほうの対角線（長）の平方根と短い方の対角線（闊）の平方根の和を５寸とする．長，短２本の対角線を問う．
答えて曰く長い方の対角線９寸短い方の対角線４寸
術曰く，長い方の対角線を a, 短い方の対角線を b, 面積を S ，$S = 18$ ，只云う数（和）を h とする．長い方の対角線の平方根を未知数とする①.

$\sqrt{a}$を未知数 x とする．$h - x = \sqrt{b}$ ②，$(h-x)^2 = b$

$25-10x+x^2=b$ ③,④ 寄左

$a\times$ 寄左 $=2S=25x^2-10x^3+x^4$ ⑤ 再寄

$2S=36$ 再寄相消　$-36+25x^2-10x^3+x^4=0$ ⑥

$(x-3)(x+1)(x^2-8x+12)=0$，$x=3$，$a=9$，$b=4$

2.3.3　16-54

仮如有勾股積二百十寸只云弦三尺七寸問勾股
答曰勾一尺二寸　股三尺五寸
術日列弦三尺七寸自乗得一千三百六十九寸内減四之積八百四十寸余五百二十九寸為実開平方除之得勾股差二尺三寸立天元一為勾①　加入差為股②　以勾相乗為二段積③　寄左　列積倍之與寄左相消得開方式④　平方開之得勾加差即股也
此術亦二次求之故雖損功就簡而施之也
問題
直角三角形（勾股）が有る．面積は 210 寸である．只云う弦を 3 尺 7 寸とする．直角をはさむ 2 辺（高さ（勾），底辺（股））を問う
答えて曰く高さ 1 尺 2 寸，底辺 3 尺 5 寸
術曰く高さを a，底辺を b，弦を c，$c=37$，面積を S，$S=210$ とする．

$c^2-4S=37^2-4\times 210=1369-840=529$

注，$S=\dfrac{1}{2}ab$，$c^2-4S=(a^2+b^2)-2ab=(b-a)^2$

高さを未知数とする①．

$\sqrt{529}=b-a=23$ ②，$a+(b-a)=a+23=b$，$ab=a^2+23a=2S$ ③ 寄左

$2S=420$ 寄左相消，$-420+23a+a^2=0$ ④

$(a-12)(a+35)=0$，$a=12$，$b=35$

如是等者雖術理不続皆取捷径幼学之所用也

2.4　約　三問

2.4.1　16-55

仮如有大円小方各一円従古法共積七十三寸只云方面不及円径三寸問方面円径
答曰円径八寸方面五寸
術曰立天元一為円径①　内減不及余為方面②　自之為方積③　寄左　列円径自之三因四而一為円積④　加入寄左為共積⑤　再寄　列共積與再寄相消得開方式⑥　平方飜法開之得円

径内減不及余即方面也
此術中用四約者本雖非実術之技省方積乗段数之功也
問題
大円と正方形（小方）各1個が有る．円周率は古法（3）に従う．両方を併せた面積は73寸である．只云う正方形の一辺（方面）は円の直径より3寸少ない．正方形の一辺と円の直径を問う．
答えて曰く円の直径8寸，正方形の一辺5寸
術曰く，大円の直径をa，正方形の一辺をb，併せた面積をSとする．大円の直径を未知数とする①.

只云う数より，$a-3=b$ ②，$b^2=9-6a+a^2$ ③，④ 寄左

$a^2\dfrac{3}{4}+$ 寄左 $=S$，$9-6a1.75a^2$ ⑤ 再寄 ，(注 $\dfrac{3}{4}$: 円積率)

$S=73$ 再寄相消，$-64-6a^2+1.75a^2=0$ ⑥

$(a-8)(1.75a+8)=0$ ，$a=8$，$b=5$

2.4.2　16-56

仮如有支銀七十五両不知人数最末支銀一十一両只云従初衰差各二両問人数
答曰人数五人
術曰立天元一為人数①　内減一余②　以人数相乗又以衰差二両相乗折半之得③　以減有銀七十五両余為因人数最末支銀④　寄左　列最末支銀一十一両　以人数相乗與寄左相消得開方式⑤　平方開之得人数也
此術中折半之数整故亦有去繁之用也
問題
銀75両を支給する．支給する人数は分からない．最後の人に支給する銀は11両である．只云う初めの人より各2両ずつ少なくなるとする．人数を問う．
答えて曰く人数5人
術曰く，人数をn，衰差をd，$d=2$，元の銀をa，$a=75$，最後の人に支給する銀をb，$b=11$ とする．人数を未知数とする①.

$n(n-1)d\dfrac{1}{2}=-n+n^2$　②，③

$a-(-n+n^2)=bn$，$75+n-n^2$ ④ 寄左

$bn=11n$ 寄差相消，$-75+10n+n^2=0$ ⑤

$(n-5)(n+15)=0$，$n=5$

注，初項をb，$b=11$，公差をd，$d=2$，とする等差数列の和を考える．

$a=\dfrac{n\{2b+(n-1)d}{2}$ ，$a=bn+n(n-1)$，$75-(-n+n^2)=11n$

2.4.3 16-57

仮如有弧隔矢容小円只云矢二寸弦八寸問小円径
答曰小円径一寸八分八厘八毛五四強
術曰立天元一為小円径① 列矢自之加入半弦冪以矢除之得大円径一尺内減倍矢余 為大円離径加入小円径得② 自之③ 寄位 列大円径内減小円径余為大小円径差④ 自之得内減寄位余為小円径冪⑤ 再寄 列小円径自之與再寄相消得開方式⑥ 平方開之得小円径也
此術中以真矢除之者雖非正技到得式諸級数位寡而有便于開出之易也
問題
弧が有る．矢を隔てて弧，矢、弦に接する小円を容れる．只云う，矢を 2 寸，弦を 8 寸とする．小円の直径を問う．
答えて曰く小円の直径 1 寸 88854 強
術曰く，小円の直径を R，大円の直径を D，弦を a，$a=8$，矢を c ,$c=2$，とする．小円の直径を未知数とする①.

$$\frac{c^2+(\frac{a}{2})^2}{c}=D\ ,\ \frac{2^2+4^2}{2}=10$$

$$大離径=D-2c\ ,\ 10-2\times 2=6$$

$$(6+R)^2=36+12R+R^2 \quad ②,③\ 寄位$$

$$(D-R)^2-寄位=(10-R)^2-(36+12R+R^2)=64-32R=R^2 \quad ④,⑤\ 再寄$$

$$R^2\ 再寄相消\ ,\ 64-32R-R^2=0\ ⑥$$

$$R=8(\sqrt{5}-2)=1.8885438$$

注

$$D^2=(D-2c)^2+a^2\ ,\ a^2-4Dc+4c^2=0\ ,\ D=\frac{4c^2+a^2}{4c}$$

$$\{(D-2c)+R\}^2+R^2=(D-R)^2 \quad ,\quad R^2+4(D-c)R-4c(D-c)=0\ \cdots ①$$

$$R=2\sqrt{D(D-c)}-2(D-c)=2\sqrt{10\times 8}-2\times 8=8(\sqrt{5}-2)=1.8885438$$

$$①より\ R^2+4\{\frac{c^2+(\frac{a}{2})^2}{c}-c\}R-4c\{\frac{c^2+(\frac{a}{2})^2}{c}-c\}=0$$

$$R^2+\frac{a^2}{c}R-a^2=0\ ,\ cR^2+a^2R-a^2c=0$$

$$R=\frac{a(\sqrt{a^2+4c^2}-a)}{2c}=2(\sqrt{80}-8)=8(\sqrt{5}-2)$$

如是等者或權設式而求答数或演虚術之技則用之有功也

2.5 踈 三問

2.5.1 16-58

仮如有平方自方八寸問斜
答曰斜一尺一寸三分一厘三毛七糸〇八強
術曰列自方八寸以斜率一箇四分一厘四毛二糸一三六弱相乗得斜也
此術先求属方一箇之斜為定率即相乗得答数故省開方之功也
問題
正方形（平方）が有る．一辺が 8 寸である．対角線（斜）を問う．
答えて曰く 1 尺 1313708 強
術曰く

$8 \times \sqrt{2} = 11.3137084$, 斜率 $= \sqrt{2}$

2.5.2 16-59

仮如有切篭毎面五寸問積
答曰積二百九十四寸六分二厘七毛八糸三弱
術曰列面五寸再自乗之得一百二十五寸以積率二箇三分五厘七毛〇二二六微強相乗得積也
此術以面一之積為乗率故直得其数也
問題
切篭が有る．一辺は 5 寸である．体積を問う．
答えて曰く体積 294 寸 62783 弱
術曰く

$5^3 \times 2.3570226$ 微強 $= 294.627825$

注，一辺を a とする．

$$(\sqrt{2}a)^3 - 8 \times (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^3 \frac{1}{6} = 2\sqrt{2}a^3 - 2\sqrt{2}a^3 \frac{1}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{3}a^3 \quad , \text{積率} = \frac{5\sqrt{2}}{3} = 2.357022603$$

2.5.3 16-60

仮如有三角積八十四寸問毎面
答曰毎面一尺四寸
術曰立天元一為毎面①　以中径率六　相乗為因面率中径②　以面相乗為因面率二段三角積③　寄左　列積以面率七相乗就分倍之與寄左相消得開方式④　平方開之得三角面也
此術先得面一之中径而後作率求之故又省二次之乗数也
問題
正三角形（三角）が有る．面積は 84 寸である．一辺を問う．第 4 巻 4-60
答えて曰く一辺 1 尺 4 寸

術日く，中径率 $=6$，面率 $=7$，面を a，中径を h，面積を S とする．一辺を未知数とする ①.

中径率 $\times a=$ 面率 $\times h$ ②, (中径率 $\times a)a=2S\times$ 面率，$6a^2$ ③ 寄左

$2s\times$ 面率 $=1176$ 寄差相消，$1176-6a^2=0$ ④，$a=\sqrt{196}=14$

注

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a\fallingdotseq\frac{6}{7}a=\frac{\text{中径率}}{\text{面率}}a$$

如是等者欲求答数于速則皆如此仮用定率而施之也

参考文献

[1] 「『大成算経』巻之十六　題術辯について」柏原信一郎　数学史の研究数理解析研究所講究録 1444　2005 年

[2] 「「大成算経」校訂本作成の現状報告」小松彦三郎　数学史の研究数理解析研究所講究録 1546　2007 年

[3] 「大成算経巻之十六後集　題術弁（読み下し文)」森本光生　2011 年

[4] 「大成算経巻之十六」藤井康生　2011 年