数理解析研究所講究録
第 1795 巻 2012 年 204-223

A generalization of the Mehta-Wang determinant and the Askey-Wilson polynomials*

琉球大学・教育学部　石川 雅雄 (Masao Ishikawa)†
Faculty of Education, University of the Ryukyus
和歌山大学・教育学部　田川 裕之 (Hiroyuki Tagawa)‡
Faculty of Education, Wakayama University

1 序

2000 年に, Mehta-Wang [6] は物理的な動機付けから, 成分に Gamma function を含む行列式を計算し, 2002 年に M. Nishizawa [7] は, その一つの q-analogue となる結果を得た. 本稿では, Mehta-Wang と Nishizawa の結果の拡張となる行列式を Askey-Wilson polynomial を用いて表示することを目的とする.

以下, $\mathbb{C}$ を複素数全体の集合, $\mathbb{Z}$ を整数全体の集合, $\mathbb{N}$ を自然数（正の整数）全体の集合とする. まず, Mehta-Wang と Nishizawa の結果の厳密な紹介から行おう. $n, k \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$ に対して

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{if } 0 \le k \le n, \\ 0 & \text{otherwize}, \end{cases} \qquad (a)_n = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1}(a+k) & \text{if } n > 0, \\ 1 & \text{if } n = 0, \\ \frac{1}{\prod_{k=0}^{|n|-1}(a-|n|+k)} & \text{if } n < 0 \end{cases}$$

とおく. 次が Mehta-Wang の結果である ([6]).

Theorem 1.1 (Mehta-Wang '00). $a, b \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(b) > 0)$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\det((a+j-i)\Gamma(b+i+j))_{0\le i,j\le n-1} = D_n \prod_{k=0}^{n-1} k!\Gamma(b+k) \tag{1.1}$$

である[1]. ただし, Γ は, Gamma function, i.e. $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ であり

$$D_n = \det(a\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} + j(b+j)\delta_{i,j-1})_{0\le i,j\le n-1}$$

とする[2]. D_n は

$$D_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\frac{b-a}{2})_k(\frac{a+b}{2})_{n-k} \tag{1.2}$$

*Joint work with Jiang Zeng (Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1).
†Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No.21540015, Japan Society for the Promotion of Science.
‡Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No.23540017, Japan Society for the Promotion of Science.

[1] $\mathrm{Re}(b)$ は b の実部とする.
[2] $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタ, i.e. $\delta_{i,j} = 1$ if $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ if $i \neq j$ とする.

とも記述でき[3], 次の漸化式を満たす.

$$D_0 = 1,\ D_1 = a,\ D_{n+1} = aD_n + n(b+n-1)D_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.3}$$

特に, $a = 0$ のときには次が成立する.

$$\det((j-i)\Gamma(b+i+j))_{0\le i,j\le 2n-1} = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)!\Gamma(b+2k+1)\right)^2. \tag{1.4}$$

一般に, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ により, $n \in \mathbb{Z}$ $(n \ge 0)$ に対して, $\Gamma(z+n) = (z)_n\Gamma(z)$ であるので, (1.1) を Gamma function を用いない形で記述すると

$$\det((a+j-i)(b)_{i+j})_{0\le i,j\le n-1} = D_n \prod_{k=0}^{n-1} k!(b)_k \tag{1.5}$$

となる. 尚, (1.4) の符号を決定した形として, Ciucu-Krattenthaler は, 2 次元の Dimer system に関連した動機付けから次を証明した (cf. [1]). .

Theorem 1.2 (Ciucu-Krattenthaler '11). $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{pf}((j-i)\Gamma(b+i+j))_{0\le i,j\le 2n-1} = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)!\Gamma(b+2k+1). \tag{1.6}$$

さらに, $a, q \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ $(m \ge 0)$ に対して

$$(a;q)_n = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k) & \text{if } n > 0, \\ 1 & \text{if } n = 0, \\ \frac{1}{\prod_{k=0}^{|n|-1}(1-aq^{-|n|+k})} & \text{if } n < 0, \end{cases} \quad [a] = \frac{1-q^a}{1-q}, \quad [m]! = \begin{cases} 1 & \text{if } m = 0, \\ [m][m-1]! & \text{if } m > 0 \end{cases}$$

とおくと次が成り立つ (cf. [7]).

Theorem 1.3 (Nishizawa '02). $n \in \mathbb{N}$, $a, b, q \in \mathbb{C}$ $(0 < |q| < 1)$ に対して

$$\det([a+j-i]\Gamma_q(b+i+j))_{0\le i,j\le n-1} = q^{na+\frac{n(n-1)b}{2}+\frac{n(n-1)(2n-7)}{6}} D_{n,q} \prod_{k=0}^{n-1}[k]!\Gamma_q(b+k) \tag{1.7}$$

である. ただし, $\Gamma_q(z) = (1-q)^{1-z}\frac{(q;q)_\infty}{(q^z;q)_\infty}$ (q-Gamma function), $(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)$ であり

$$D_{n,q} = \det(d_{i,j})_{0\le i,j\le n-1}, \quad d_{i,j} = \begin{cases} (1-q)^{i-j-1}(q^{-b-j+1} - q^{-b+1} - 1) & \text{if } i > j, \\ q^{-a+j}[a-j] + q^{-b-j+1}[j] & \text{if } i = j, \\ q^{-b-j+1}[b+j-1][j] & \text{if } i = j-1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする[4]. $D_{n,q}$ は次の漸化式を満たす.

$$D_{0,q} = 1, \quad D_{1,q} = q^{-a}[a], \quad D_{n+1,q} = q^{-a+n}[a]D_{n,q} + q^{-a-b}[b+n-1][n]D_{n-1,q} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.8}$$

[3] Mehta-Wang [6] では $\binom{n}{k}$ が抜け落ちてしまっている.
[4] Nishizawa [7] においても誤植があるので, 注意が必要である.

一般に, $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$ となるので, $\Gamma_q(z+n) = \frac{(q^z;q)_n}{(1-q)^n}\Gamma_q(z)$ である. 従って, (1.7) を $\Gamma_q(z)$ を用いない形で表すと

$$\det\left((1-q^{a+j-i})(q^b;q)_{i+j}\right)_{0\le i,j\le n-1} = q^{na+\frac{n(n-1)b}{2}+\frac{n(n-1)(2n-7)}{6}}(1-q)^n D_{n,q}\prod_{k=0}^{n-1}(q;q)_k(q^b;q)_k \tag{1.9}$$

となる. 特に, (1.3), (1.8) により

$$\lim_{q\to 1} D_{n,q} = D_n \tag{1.10}$$

であり, (1.9) の両辺に $\frac{1}{(1-q)^{n^2}}$ を掛けてから, $q \to 1$ とすると (1.5) が得られる.

次に, Mehta-Wang, Nishizawa の行列式の一つの拡張となる結果を述べるために, Askey-Wilson polynomial を定義しよう. $m, n \in \mathbb{Z}$ $(n \ge 0)$, $r \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}, b_1, b_2, \ldots, b_r, q \in \mathbb{C}$, $x, a, b, c, d \in \mathbb{C}$ に対して

$$(b_1, b_2, \ldots, b_r; q)_m = (b_1;q)_m(b_2;q)_m\ldots(b_r;q)_m,$$

$${}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}, \\ b_1, b_2, \ldots, b_r \end{matrix}; q, z\right] = \sum_{k\ge 0}\frac{(a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}; q)_k z^k}{(q;q)_k(b_1, b_2, \ldots, b_r; q)_k},$$

$$P_n(x;a,b,c,d;q) = \frac{(ab, ac, ad; q)_n}{a^n}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-n}, abcdq^{n-1}, ax, ax^{-1} \\ ab, ac, ad \end{matrix}; q, q\right]$$

とおく. $P_n(x;a,b,c,d;q)$ は Askey-Wilson polynomial と呼ばれている. このとき次が成立する.

Theorem 1.4. $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\det\left((1-cq^{j-i})\frac{(aq;q)_{i+j+r-2}}{(abq^2;q)_{i+j+r-2}}\right)_{1\le i,j\le n}$$

$$= (-1)^n a^{\frac{n(n-3)}{2}} q^{\frac{n(n^2-3n-1)}{3}+\frac{n(n-3)r}{2}}(abcq^{r+1};q^2)_n\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q)_k(aq;q)_{k+r+1}(bq;q)_{k-1}}{(abq^2;q)_{k+n+r-1}}$$

$$\times {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-n}, a^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac{r+1}{2}}, -a^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac{r+1}{2}}, abq^{n+r} \\ aq^{r+1}, a^{\frac12}b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac{r+1}{2}}, -a^{\frac12}b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac{r+1}{2}} \end{matrix}; q, q\right] \tag{1.11}$$

$$= (-\sqrt{-1})^n a^{\frac{n(n-2)}{2}} c^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n(2n^2-6n+1)}{6}+\frac{n(n-2)r}{2}}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q)_k(aq;q)_{k+r}(bq;q)_{k-1}}{(abq^2;q)_{k+n+r-1}}$$

$$\times P_n(\sqrt{-1}; a^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac{r+1}{2}}\sqrt{-1}, -a^{\frac12}c^{-\frac12}q^{\frac{r+1}{2}}\sqrt{-1}, b^{\frac12}\sqrt{-1}, -b^{\frac12}\sqrt{-1}; q). \tag{1.12}$$

尚, $\frac{(aq;q)_m}{(abq^2;q)_m}$ は, little q-Jacobi orthogonal polynomial の m-th moment となることが知られている (cf. [2], [5]).

Theorem 1.4 を示すためには, 次の等式の証明が鍵となる.

Lemma 1.5. $n \in \mathbb{N}$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\det\left((1-cq^{j-t_i})\frac{(aq;q)_{t_i+j-2}}{(abq^2;q)_{t_i+j-2}}\right)_{1\le i,j\le n}$$

$$= (-1)^n a^{\frac{n(n-3)}{2}} q^{\frac{n(n-1)(n-5)}{6}-\sum_{k=1}^n t_k}\prod_{k=1}^{n}\frac{(aq;q)_{t_k-1}(bq;q)_{k-2}}{(abq^2;q)_{t_k+n-2}}\prod_{1\le i<j\le n}(q^{t_i}-q^{t_j})$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(abcq^{2k+1};q^2)_{n-k}(acq;q^2)_k R_{n,k}(t;a,b;q). \tag{1.13}$$

ただし

$$R_{n,k}(t;a,b;q)=\sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{n-k}\le n\\ 1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n\\ \{i_1,i_2,\ldots,i_{n-k}\}\cup\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}=\{1,2,\ldots,n\}}} q^{\sum_{u=1}^{n-k} i_u-n+k}\prod_{u=1}^{n-k}(1-aq^{t_{i_u}+k-i_u+u})\prod_{u=1}^{k}(1-abq^{t_{j_u}+j_u+k-1-u})$$

とする.

特に, (1.9), (1.10), (1.11), (1.12) により

$$\begin{aligned} D_{n,q}&=\frac{(-1)^n q^{-n(a+b)}(q^b;q)_n}{(1-q)^n}{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}q^{-n},q^{\frac{a+b}{2}},-q^{\frac{a+b}{2}}\\ q^b,0\end{matrix};q,q\right]\\ &=\frac{(-\sqrt{-1})^n q^{-\frac{n(a+b)}{2}}}{(1-q)^n}P_n(\sqrt{-1};q^{\frac{a+b}{2}}\sqrt{-1},-q^{-\frac{a-b}{2}}\sqrt{-1},0,0;q),\\ D_n&=(-1)^n(b)_n\cdot{}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\frac{a+b}{2}\\ b\end{matrix};2\right] \end{aligned}\tag{1.14}$$

である[5]. ただし, $r\in\mathbb{N}$, $a_1,a_2,\ldots,a_{r+1},b_1,b_2,\ldots,b_r\in\mathbb{C}$ に対して

$${}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\ldots,a_{r+1}\\ b_1,b_2,\ldots,b_r\end{matrix};z\right]=\sum_{k\ge0}\frac{(a_1)_k(a_2)_k\ldots(a_{r+1})_k z^k}{k!(b_1)_k(b_2)_k\ldots(b_r)_k}$$

とする.

以下, 2 節で, Theorem 1.4 の証明を行い, 3 節で Askey-Wilson polynomial の関係式として得られた結果を解説し, 4 節では, 3 節で得られた結果を利用して, Theorem 1.4 の結果を n が偶数のときと奇数のときに分けて記述し, [3] で得られた結果, [4] での結果の系となる等式が導かれること, 及び Theorem 1.4, Lemma 1.5 の系として得られる様々な等式について述べる.

2 Theorem 1.4 の証明

$n\in\mathbb{N}$, $t=(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in\mathbb{N}^n$ に対して

$$T_t(a,b,c;q)=\left((1-cq^{j-t_i})(aq^{t_i-1};q)_{j-1}(abq^{t_i+j-2};q)_{n-j}\right)_{1\le i,j\le n}$$

とおくと

$$\det\left((1-cq^{j-t_i})\frac{(aq;q)_{t_i+j-2}}{(abq^2;q)_{t_i+j-2}}\right)_{1\le i,j\le n}=\det(T_t(aq,bq,c;q))\times\prod_{k=1}^{n}\frac{(aq;q)_{t_k-1}}{(abq^2;q)_{t_k+n-2}}\tag{2.1}$$

である. 従って, $0\le k\le n$ に対して

$$R_t^{(k)}(a,b;q)=R_{n,k}(t;aq^{-1},bq^{-1};q)\tag{2.2}$$

---

[5] (1.2) を ${}_2F_1$ を用いて書き直すと, (1.14) とは異なった D_n の表記が得られ, (1.14) と併せると, 結果的に [2] の Appendix III の (III-12) の系として得られる等式が導かれる.

とおくと, Lemma 1.5 を示すためには

$$\det(T_t(a,b,c;q)) = (-1)^n a^{\frac{n(n-3)}{2}} q^{\frac{n(n-2)(n-7)}{6} - \sum_{k=1}^n t_k} \prod_{k=-1}^{n-2} (b;q)_k \prod_{1\le i<j\le n} (q^{t_i} - q^{t_j})$$
$$\times \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (abcq^{2k-1};q^2)_{n-k} (ac;q^2)_k R_t^{(k)}(a,b;q) \tag{2.3}$$

を示せばよい. 本節では, (2.3) の証明を目指し, 最終的に Lemma 1.5 と Theorem 1.4 の証明を目的とする. (2.3) を証明するための鍵となるのが次である.

Proposition 2.1. $n \in \mathbb{N}$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して, $t' = (t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ とおくと

$$\det(T_t(a,b,c;q)) = a^{n-2} q^{-n-t_n+2} (b;q)_{n-2} \prod_{k=1}^{n-1} (q^{t_k} - q^{t_n})$$
$$\times \Big((1-ac)(1-abq^{t_n+n-3}) \det(T_{t'}(aq,b,cq;q))$$
$$- q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (1-abcq^{2n-3})(1-aq^{t_n-1}) \det(T_{t'}(a,b,c;q)) \Big). \tag{2.4}$$

ただし, $t = (t_1)$ のときには, $\det(T_{t'}(a,b,c;q)) = 1$ とする.

Proposition 2.1 の証明としては, $T_t(a,b,c;q)$ を n 行が $(n,1)$ 成分と (n,n) 成分以外が 0 となるように二種類の基本変形を行い, 行列式の展開を用いて整理するといった方針である.

まず, $T_t(a,b,c;q)$ の行列としての基本変形を行うために, 4 種類の行列 $X_t(a;q)$, $\tilde{X}_t(a,b;q)$, $Y_n(q)$, $\tilde{Y}_n(q)$ を

$$X_t(a;q) = \left(-\frac{\delta(i \ge j) q^{t_j}}{(1-aq^{t_j-1}) \prod_{\substack{1\le k\le i \\ k\ne j}} (1-q^{t_j-t_k})} \right)_{1\le i,j\le n},$$
$$\tilde{X}_t(a,b;q) = \left(-\frac{\delta(i \ge j) q^{t_j}}{(1-abq^{t_j+n-3}) \prod_{\substack{1\le k\le i \\ k\ne j}} (1-q^{t_j-t_k})} \right)_{1\le i,j\le n},$$
$$Y_n(q) = \left((-1)^{i+j} q^{-\frac{(i-j)(2n+1-i-j)}{2}} \begin{bmatrix} n-j \\ i-j \end{bmatrix}_q \right)_{1\le i,j\le n},$$
$$\tilde{Y}_n(q) = \left((-1)^{i+j} q^{\frac{(j-i)(j-i+1)}{2}} \begin{bmatrix} j-1 \\ j-i \end{bmatrix}_q \right)_{1\le i,j\le n}$$

と定義する. ただし,

$$\delta(P) = \begin{cases} 1 & \text{if } P \text{ is true,} \\ 0 & \text{if } P \text{ is false,} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \frac{(q;q)_m}{(q;q)_n (q;q)_{m-n}} & \text{if } 0 \le n \le m, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする. さらに

$$W_t(a,b,c;q) = X_t(a;q) T_t(a,b,c;q) Y_n(q), \tag{2.5}$$
$$\tilde{W}_t(a,b,c;q) = \tilde{X}_t(a,b;q) T_t(a,b,c;q) \tilde{Y}_n(q) \tag{2.6}$$

とおく. $n \in \mathbb{N}$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\det(W_t(a,b,c;q)) = \frac{(-1)^n q^{\sum_{k=1}^n t_k} \det(T_t(a,b,c;q))}{\prod_{k=1}^n (1-aq^{t_k-1}) \prod_{1 \le i < j \le n} (1-q^{t_j - t_i})}, \tag{2.7}$$

$$\det(\tilde{W}_t(a,b,c;q)) = \frac{(-1)^n q^{\sum_{k=1}^n t_k} \det(T_t(a,b,c;q))}{\prod_{k=1}^n (1-abq^{t_k+n-3}) \prod_{1 \le i < j \le n} (1-q^{t_j - t_i})} \tag{2.8}$$

となることは, $X_t(a;q)$, $\tilde{X}_t(a,b;q)$, $Y_n(q)$ が下半三角行列で, $\tilde{Y}_n(q)$ が上半三角行列であることにより容易に分かる. 特に, $W_t(a,b,c;q)$, $\tilde{W}_t(a,b,c;q)$ の第 n 行については, 次が成立する.

Lemma 2.2. $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 2$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ とする.

(i) $1 \le j \le n$ に対して

$$[W_t(a,b,c;q)]_{n,j} = \begin{cases} \frac{(-1)^n a^{n-1} q^{-n+1+\sum_{k=1}^n t_k} (b;q)_{n-1}(1-ac)}{\prod_{k=1}^n (1-aq^{t_k-1})} & \text{if } j=1, \\ 0 & \text{if } 1<j<n, \\ cq^n & \text{if } j=n. \end{cases}$$

ただし, 行列 $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ に対して, $[A]_{i,j} = a_{i,j}$ とする.

(ii) $1 \le j \le n$ に対して

$$[\tilde{W}_t(a,b,c;q)]_{n,j} = \begin{cases} cq & \text{if } j=1, \\ 0 & \text{if } 1<j<n, \\ -\frac{a^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-4)}{2} + \sum_{k=1}^n t_k} (b;q)_{n-1}(1-abcq^{2n-3})}{\prod_{k=1}^n (1-abq^{t_k+n-3})} & \text{if } j=n. \end{cases}$$

従って, $m, n \in \mathbb{N}$ $(1 \le m \le n)$ に対して

$$[m,n] = \{m, m+1, m+2, \ldots, n\}$$

とおき, $I, J \subseteq [1,n]$, $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_r)$, $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_s)$, $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ に対して

$$A_J^I = (a_{i_u, j_v})_{1 \le u \le r, 1 \le v \le s}$$

とおくと, Lemma 2.2 において行列式の展開を用いることにより, 次が即座に得られる.

Corollary 2.3. $n \in \mathbb{Z}$ $(n \ge 2)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して次が成立する.

$$\begin{aligned} \det(W_t(a,b,c;q)) &= cq^n \cdot \det\left(W_t(a,b,c;q)_{[1,n-1]}^{[1,n-1]}\right) \\ &\quad - \frac{a^{n-1} q^{-n+1+\sum_{k=1}^n t_k} (b;q)_{n-1}(1-ac)}{\prod_{k=1}^n (1-aq^{t_k-1})} \det\left(W_t(a,b,c;q)_{[2,n]}^{[1,n-1]}\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \det(\tilde{W}_t(a,b,c;q)) &= (-1)^{n+1} cq \cdot \det\left(\tilde{W}_t(a,b,c;q)_{[2,n]}^{[1,n-1]}\right) \\ &\quad - \frac{a^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-4)}{2} + \sum_{k=1}^n t_k} (b;q)_{n-1}(1-abcq^{2n-3})}{\prod_{k=1}^n (1-abq^{t_k+n-3})} \det\left(\tilde{W}_t(a,b,c;q)_{[1,n-1]}^{[1,n-1]}\right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Lemma 2.2 の証明の前に補題を一つ示そう.

Lemma 2.4. (i) $n, r \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, $0 \leq r \leq n-1$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^r}{(1-bx_k)\prod_{\substack{1\leq s\leq n\\ s\neq k}}(x_k - x_s)} = \frac{b^{n-1-r}}{\prod_{k=1}^{n}(1-bx_k)}. \tag{2.11}$$

(ii) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(aq^{t_k};q)_{n-1}}{(1-bq^{t_k})\prod_{\substack{1\leq s\leq n\\ s\neq k}}(q^{t_k} - q^{t_s})} = \frac{b^{n-1}(ab^{-1};q)_{n-1}}{\prod_{k=1}^{n}(1-bq^{t_k})}. \tag{2.12}$$

(iii) $n, r \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, $-1 \leq r \leq n-1$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^r}{\prod_{\substack{1\leq s\leq n\\ s\neq k}}(x_k - x_s)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n} x_k} & \text{if } r=-1, \\ 0 & \text{if } 0\leq r\leq n-2, \\ 1 & \text{if } r = n-1. \end{cases} \tag{2.13}$$

Proof. (i) (resp. (ii)) は, 両辺に $\prod_{k=1}^{n}(1-bx_k)$ (resp. $\prod_{k=1}^{n}(1-bq^{t_k})$) を掛けた等式を b についての $n-1$ 次式と考えて示すとよい. 詳細は略とする. (iii) は, 第 i 行が $(x_i^r, 1, x_i, \ldots, x_i^{n-2})$ の行列を 1 列に関して展開して, Vandermonde 行列式を用いて整理すると, 成立が容易に示せる. □

Proof of Lemma 2.2. (i) まず, 定義より

$$[W_t(a,b,c;q)]_{n,j} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{q^{t_k}U_k}{(1-aq^{t_k-1})\prod_{\substack{1\leq s\leq n\\ s\neq k}}(1-q^{t_k-t_s})} \tag{2.14}$$

と表せる. ただし

$$U_k = \sum_{l=0}^{n-j}(1-cq^{j-t_k+l})(aq^{t_k-1};q)_{j-1+l}(abq^{t_k+j-2+l};q)_{n-j-l}(-1)^l q^{-\frac{l(2n-2j+1-l)}{2}} \begin{bmatrix} n-j \\ l \end{bmatrix}_q$$

とする. ここで

$$(x;q)_{m+l} = (x;q)_m(xq^m;q)_l, \quad (xq^l;q)_{m-l} = \frac{(x;q)_m}{(x;q)_l}, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(-1)^k q^{\frac{k(2n-k+1)}{2}}(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} \tag{2.15}$$

を用いると

$$\begin{aligned} U_k &= (aq^{t_k-1};q)_{j-1}(abq^{t_k+j-2};q)_{n-j}\sum_{l=0}^{n-j}\frac{(1-q^l+q^l(1-cq^{j-t_k}))(aq^{t_k+j-2};q)_l(q^{-n+j};q)_l}{(q;q)_l(abq^{t_k+j-2};q)_l} \\ &= \sum_{l=0}^{n-j-1}\frac{(aq^{t_k-1};q)_{j+l}(q^{-n+j};q)_{l+1}(abq^{t_k+j-1+l};q)_{n-j-1-l}}{(q;q)_l} \\ &\quad + (1-cq^{j-t_k})(aq^{t_k-1};q)_{j-1}(abq^{t_k+j-2};q)_{n-j}\cdot {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} q^{-n+j}, aq^{t_k+j-2} \\ abq^{t_k+j-2} \end{matrix};q,q\right] \end{aligned}$$

となり, さらに, Vandermonde's formula の q-analogue に対応する等式 (cf. [2]-(1.5.3)):

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix} q^{-n}, b \\ c \end{matrix};q,q\right] = \frac{(c/b;q)_n b^n}{(c;q)_n} \tag{2.16}$$

を用いると

$$U_k = \sum_{l=0}^{n-j-1} \frac{(aq^{t_k-1};q)_{j+l}(q^{-n+j};q)_{l+1}(abq^{t_k+j-1+l};q)_{n-j-1-l}}{(q;q)_l} + (1-cq^{j-t_k})(aq^{t_k-1};q)_{j-1}(b;q)_{n-j}a^{n-j}q^{(t_k+j-2)(n-j)}. \tag{2.17}$$

従って, (2.14), (2.17) と

$$\prod_{\substack{1\le s\le n \\ s\ne k}} (1-q^{t_k-t_s}) = (-1)^{n-1}q^{t_k-\sum_{s=1}^n t_s} \prod_{\substack{1\le s\le n \\ s\ne k}} (q^{t_k}-q^{t_s})$$

を利用すると

$$[W_t(a,b,c;q)]_{n,j} = (-1)^n q^{\sum_{k=1}^n t_k} \sum_{l=0}^{n-j-1} \frac{(q^{-n+j};q)_{l+1}}{(q;q)_l} \sum_{k=1}^{n} \frac{(aq^{t_k};q)_{j+l-1}(abq^{t_k+j-1+l};q)_{n-j-1-l}}{\prod_{\substack{1\le s\le n \\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})} + (-1)^n a^{n-j} q^{(j-2)(n-j)+\sum_{k=1}^n t_k}(b;q)_{n-j} \sum_{k=1}^{n} \frac{q^{t_k(n-j)}(1-cq^{j-t_k})(aq^{t_k-1};q)_{j-1}}{(1-aq^{t_k-1})\prod_{\substack{1\le s\le n \\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})}.$$

従って, (2.13) により, 第 1 項は 0 となるので

$$[W_t(a,b,c;q)]_{n,j} = (-1)^n a^{n-j} q^{(j-2)(n-j)+\sum_{k=1}^n t_k}(b;q)_{n-j} \sum_{k=1}^{n} \frac{q^{t_k(n-j)}(1-cq^{j-t_k})(aq^{t_k-1};q)_{j-1}}{(1-aq^{t_k-1})\prod_{\substack{1\le s\le n \\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})}. \tag{2.18}$$

Case 1. $j=1$ のとき. (2.18) により

$$[W_t(a,b,c;q)]_{n,1} = (-1)^n a^{n-1} q^{-n+1+\sum_{k=1}^n t_k}(b;q)_{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{q^{t_k(n-1)}(1-cq^{1-t_k})}{(1-aq^{t_k-1})\prod_{\substack{1\le s\le n \\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})}.$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{q^{t_k(n-1)}(1-cq^{1-t_k})}{(1-aq^{t_k-1})\prod_{\substack{1\le s\le n \\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})} = -cq\sum_{k=1}^{n} \frac{q^{t_k(n-2)}}{\prod_{\substack{1\le s\le n \\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})} + (1-ac)\sum_{k=1}^{n} \frac{q^{t_k(n-1)}}{(1-aq^{t_k-1})\prod_{\substack{1\le s\le n \\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})} \tag{2.19}$$

であり, (2.13) により (2.19) の第一項は 0 となるので

$$[W_t(a,b,c;q)]_{n,1} = (-1)^n a^{n-1} q^{-n+1+\sum_{k=1}^n t_k}(b;q)_{n-1}(1-ac) \sum_{k=1}^{n} \frac{q^{t_k(n-1)}}{(1-aq^{t_k-1})\prod_{\substack{1\le s\le n \\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})}. \tag{2.20}$$

さらに, (2.11) の $r=n-1$ の場合に対応する等式を利用すると, (2.20) により

$$[W_t(a,b,c;q)]_{n,1} = \frac{(-1)^n a^{n-1} q^{-n+1+\sum_{k=1}^n t_k}(b;q)_{n-1}(1-ac)}{\prod_{k=1}^n (1-aq^{t_k-1})}. \tag{2.21}$$

Case 2. $1<j<n$ のとき. (2.18) と (2.13) により

$$[W_t(a,b,c;q)]_{n,j} = (-1)^n a^{n-j} q^{(j-2)(n-j)+\sum_{k=1}^n t_k}(b;q)_{n-j} \sum_{k=1}^{n} \frac{q^{t_k(n-j)}(1-cq^{j-t_k})(aq^{t_k};q)_{j-2}}{\prod_{\substack{1\le s\le n \\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})} = 0. \tag{2.22}$$

Case 3. $j=n$ のとき. (2.18) に (2.13) を適用すると

$$[W_t(a,b,c;q)]_{n,n} = (-1)^n q^{\sum_{k=1}^n t_k} \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-cq^{n-t_k})(aq^{t_k};q)_{n-2}}{\prod_{\substack{1\le s\le n\\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})} = cq^n. \tag{2.23}$$

従って, (2.21), (2.22), (2.23) により, (i) は成立する. (ii) 定義より

$$[\tilde{W}_t(a,b,c;q)]_{n,j} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{q^{t_k}V_k}{(1-abq^{t_k+n-3})\prod_{\substack{1\le s\le n\\ s\ne k}}(1-q^{t_k-t_s})} \tag{2.24}$$

と表せる. ただし

$$V_k = \sum_{l=0}^{j-1}(1-cq^{j-t_k-l})(aq^{t_k-1};q)_{j-1-l}(abq^{t_k+j-2-l};q)_{n-j+l}(-1)^l q^{\frac{l(l+1)}{2}} \begin{bmatrix} j-1 \\ l \end{bmatrix}_q$$

とする. ここで, (2.15) と

$$(x;q)_{m-l} = \frac{(-1)^l x^{-l} q^{\frac{l(l-2m+1)}{2}}(x;q)_m}{(x^{-1}q^{1-m};q)_l}, \tag{2.25}$$

$$(xq^{-l};q)_{m+l} = (-1)^l x^l q^{-\frac{l(l+1)}{2}}(x;q)_m(x^{-1}q;q)_l \tag{2.26}$$

を用いると

$$V_k = -cq^{j-t_k}(aq^{t_k-1};q)_{j-1}(abq^{t_k+j-2};q)_{n-j}X_k \tag{2.27}$$

と表せる. ただし

$$X_k = \sum_{l=0}^{j-1}(1-c^{-1}q^{-j+t_k+l})\frac{(bq^{j-1})^l(a^{-1}b^{-1}q^{3-t_k-j};q)_l(q^{-j+1};q)_l}{(a^{-1}q^{3-t_k-j};q)_l(q;q)_l}$$

とする. さらに, Vandermonde's formula の q-analogue に対応する等式 (cf. [2]-(1.5.2)):

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix} q^{-n}, b \\ c \end{matrix}; q, cq^n/b\right] = \frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n} \tag{2.28}$$

を用いると

$$\begin{aligned} X_k &= {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} q^{-j+1}, a^{-1}b^{-1}q^{3-t_k-j} \\ a^{-1}q^{3-t_k-j} \end{matrix}; q, bq^{j-1}\right] - c^{-1}q^{-j+t_k}\sum_{l=0}^{j-1}\frac{q^{jl}(abq^{t_k+j-l-2};q)_l(q^{-j+1};q)_l}{(aq^{t_k+j-l-2};q)_l(q;q)_l} \\ &= \frac{(-1)^{j-1}a^{j-1}q^{(j-1)(2t_k+j-4)/2}(b;q)_{j-1}}{(aq^{t_k-1};q)_{j-1}} - c^{-1}q^{-j+t_k}\sum_{l=0}^{j-1}\frac{q^{jl}(abq^{t_k+j-l-2};q)_l(q^{-j+1};q)_l}{(aq^{t_k+j-l-2};q)_l(q;q)_l} \end{aligned} \tag{2.29}$$

となる. 従って, (2.24), (2.27), (2.29) により

$$\begin{aligned} &[\tilde{W}_t(a,b,c;q)]_{n,j} \\ &= (-1)^n q^{\sum_{s=1}^n t_s}\Bigg((-1)^j a^{j-1}cq^{j+(j-1)(j-4)/2}(b;q)_{j-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{q^{(j-2)t_k}(abq^{t_k+j-2};q)_{n-j}}{(1-abq^{t_k+n-3})\prod_{\substack{1\le s\le n\\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})} \\ &\qquad + \sum_{l=0}^{j-1}\frac{q^{jl}(q^{-j+1};q)_l}{(q;q)_l}\sum_{k=1}^{n}\frac{(aq^{t_k-1};q)_{j-1-l}(abq^{t_k+j-l-2};q)_{n-j+l}}{(1-abq^{t_k+n-3})\prod_{\substack{1\le s\le n\\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})}\Bigg). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Case 1. $j=1$ のとき. (2.30) により

$$[\tilde{W}_t(a,b,c;q)]_{n,1}=(-1)^{n-1}q^{\sum_{s=1}^n t_s}\Bigl(cq\sum_{k=1}^n\frac{q^{-t_k}(abq^{t_k-1};q)_{n-2}}{\prod_{\substack{1\le s\le n\\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})}-\sum_{k=1}^n\frac{(abq^{t_k-1};q)_{n-2}}{\prod_{\substack{1\le s\le n\\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})}\Bigr).$$

となるので, (2.13) により

$$[\tilde{W}_t(a,b,c;q)]_{n,1}=cq. \tag{2.31}$$

Case 2. $1<j<n$ のとき. (2.30) と (2.13) により

$$[\tilde{W}_t(a,b,c;q)]_{n,1}=0. \tag{2.32}$$

Case 3. $j=n$ のとき. (2.30) により

$$\begin{aligned}[\tilde{W}_t(a,b,c;q)]_{n,1}=q^{\sum_{s=1}^n t_s}\Biggl(&a^{n-1}cq^{\frac{n^2-3n+4}{2}}(b;q)_{n-1}\sum_{k=1}^n\frac{q^{(n-2)t_k}}{(1-abq^{t_k+n-3})\prod_{\substack{1\le s\le n\\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})}\\ &+(-1)^n\sum_{l=1}^{n-1}\frac{q^{ln}(q^{-n+1};q)_l}{(q;q)_l}\sum_{k=1}^n\frac{(aq^{t_k-1};q)_{n-1-l}(abq^{t_k+n-l-2};q)_{l-1}}{\prod_{\substack{1\le s\le n\\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})}\\ &+(-1)^n\sum_{k=1}^n\frac{(aq^{t_k-1};q)_{n-1}}{(1-abq^{t_k+n-3})\prod_{\substack{1\le s\le n\\ s\ne k}}(q^{t_k}-q^{t_s})}\Biggr)\end{aligned}$$

となるので, (2.13), (2.11), (2.12) と

$$(b^{-1}q^{2-n};q)_{n-1}=(-1)^{n-1}b^{-n+1}q^{-(n-1)(n-2)/2}(b;q)_{n-1}$$

により

$$\begin{aligned}[\tilde{W}_t(a,b,c;q)]_{n,1}&=(-1)^nq^{\sum_{s=1}^n t_s}\Bigl(\frac{(-1)^na^nbcq^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}}(b;q)_{n-1}}{\prod_{k=1}^n(1-abq^{t_k+n-3})}+\frac{(abq^{n-3})^{n-1}(b^{-1}q^{2-n};q)_{n-1}}{\prod_{k=1}^n(1-abq^{t_k+n-3})}\Bigr)\\ &=\frac{-a^{n-1}q^{\frac{(n-1)(n-4)}{2}+\sum_{s=1}^n t_s}(b;q)_{n-1}(1-abcq^{2n-3})}{\prod_{k=1}^n(1-abq^{t_k+n-3})}.\end{aligned} \tag{2.33}$$

従って, (2.31), (2.32), (2.33) により成立する. □

さらに, Proposition 2.1 の証明の鍵となる補題を示そう.

Lemma 2.5. $n\in\mathbb{Z}$ $(n\ge 2)$, $t=(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\mathbb{N}^n$ に対して, $t'=(t_1,t_2,\dots,t_{n-1})$ とすると次が成立する.

$$\det\Bigl(W_t(a,b,c;q)_{[2,n]}^{[1,n-1]}\Bigr)=\frac{(-1)^{n+1}q^{\sum_{k=1}^{n-1}t_k}}{\prod_{1\le i<j\le n-1}(1-q^{t_j-t_i})}\det(T_{t'}(aq,b,cq;q)), \tag{2.34}$$

$$\det\Bigl(\tilde{W}_t(a,b,c;q)_{[1,n-1]}^{[1,n-1]}\Bigr)=\frac{(-1)^{n+1}q^{\sum_{k=1}^{n-1}t_k}}{\prod_{1\le i<j\le n-1}(1-q^{t_j-t_i})}\det(T_{t'}(a,b,c;q)). \tag{2.35}$$

Lemma 2.5 を示すために, $n\in\mathbb{N}$, $t=(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\mathbb{N}^n$ に対して

$$P_t(q)=\Biggl(-\frac{\delta(i\ge j)q^{t_j}}{\prod_{\substack{1\le k\le i\\ k\ne j}}(1-q^{t_j-t_k})}\Biggr)_{1\le i,j\le n},$$

$$Z_t(a;q)=\Bigl(\frac{\delta_{i,j}}{1-aq^{t_j-1}}\Bigr)_{1\le i,j\le n},\quad \tilde{Z}_t(a,b;q)=\Bigl(\frac{\delta_{i,j}}{1-abq^{t_j+n-3}}\Bigr)_{1\le i,j\le n}$$

とおく. 定義より次が容易に分かる.

$$X_n(a;q) = P_t(q)Z_t(a;q), \quad \tilde{X}_n(a,b;q) = P_t(q)\tilde{Z}_t(a,b;q). \tag{2.36}$$

Proof of Lemma 2.5. (i) を示すためには, $n \geq 2$ に対して

$$P_{t'}(q)T_{t'}(aq,b,cq;q)Y_{n-1}(q) = W_t(a,b,c;q)_{[2,n]}^{[1,n-1]}$$

を示せばよい. まず

$$(P_t(q))_{[1,n-1]}^{[1,n-1]} = P_{t'}(q),\ (Z_t(a;q)T_t(a,b,c;q))_{[2,n]}^{[1,n-1]} = T_{t'}(aq,b,cq;q),\ (Y_n(q))_{[2,n]}^{[2,n]} = Y_{n-1}(q)$$

であり, $P_t(q)$, $Y_n(q)$ は下半三角行列であることが容易に分かる. 従って

$$W_t(a,b,c;q) = P_t(q)Z_t(a;q)T_t(a,b,c;q)Y_n(q)$$

であることから, 行列のブロック積を考えると

$$W_t(a,b,c;q)_{[2,n]}^{[1,n-1]} = [P_t(q)Z_t(a;q)T_t(a,b,c;q)Y_n(q)]_{[2,n]}^{[1,n-1]} = P_{t'}(q)T_{t'}(aq,b,cq;q)Y_{n-1}(q)$$

となり成立する. (ii) を示すためには, $n \geq 2$ に対して

$$P_{t'}(q)T_{t'}(a,b,c;q)\tilde{Y}_{n-1}(q) = \tilde{W}_t(a,b,c;q)_{[1,n-1]}^{[1,n-1]}$$

を示せばよい. まず

$$(P_t(q))_{[1,n-1]}^{[1,n-1]} = P_{t'}(q),\ (\tilde{Z}_t(a,b;q)T_t(a,b,c;q))_{[1,n-1]}^{[1,n-1]} = T_{t'}(a,b,c;q),\ (\tilde{Y}_n(q))_{[1,n-1]}^{[1,n-1]} = \tilde{Y}_{n-1}(q)$$

であり, $P_t(q)$ は下半三角行列, $\tilde{Y}_n(q)$ は上半三角行列であることが容易に分かる. 従って

$$\tilde{W}_t(a,b,c;q) = P_t(q)\tilde{Z}_t(a,b;q)T_t(a,b,c;q)\tilde{Y}_n(q)$$

であることから, 行列のブロック積を考えると

$$[\tilde{W}_t(a,b,c;q)]_{[1,n-1]}^{[1,n-1]} = [P_t(q)\tilde{Z}_t(a,b;q)T_t(a,b,c;q)\tilde{Y}_n(q)]_{[1,n-1]}^{[1,n-1]} = P_{t'}(q)T_{t'}(a,b,c;q)\tilde{Y}_{n-1}(q)$$

となり成立する. □

さらに, 次が成立する.

Lemma 2.6. $n \in \mathbb{Z}$ $(n \geq 2)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\begin{aligned} &q^{n-1} \det\left(W_t(a,b,c;q)_{[1,n-1]}^{[1,n-1]}\right) \prod_{k=1}^{n-1}(1-aq^{t_k-1}) \\ &= (-1)^{n+1} \det\left(\tilde{W}_t(a,b,c;q)_{[2,n]}^{[1,n-1]}\right) \prod_{k=1}^{n-1}(1-abq^{t_k+n-3}). \end{aligned} \tag{2.37}$$

(2.37) を示すために, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$R_n(q) = \left(q^{(j-i)(n+2-i)+1} \begin{bmatrix} n-j \\ i-j \end{bmatrix}_q\right)_{1\leq i,j\leq n}, \quad \tilde{R}_n(q) = \left(q^{2(j-i)} \begin{bmatrix} j-1 \\ j-i \end{bmatrix}_q\right)_{1\leq i,j\leq n},$$

$$V_n(q) = \left(\delta(i<n, j<n)q^{(j-i)(n+1-i)+1} \begin{bmatrix} n-1-j \\ i-j \end{bmatrix}_q\right)_{1\leq i,j\leq n},$$

$$\tilde{V}_n(q) = \left(\delta(i>1, j<n)q^{2(j-i+1)} \begin{bmatrix} j-1 \\ j-i+1 \end{bmatrix}_q\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

とおく. このとき, 定義より

$$[V_n(q)]_{[1,n-1]}^{[1,n-1]} = R_{n-1}(q), \quad [\tilde{V}_n(q)]_{[1,n-1]}^{[2,n-1]} = \tilde{R}_{n-1}(q) \tag{2.38}$$

であることが容易に分かり, 次の関係式が Lemma 2.6 を示すための鍵となっている.

Lemma 2.7. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$Y_n(q)V_n(q) = -\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q). \tag{2.39}$$

Proof. $1 \leq i, j \leq n$ に対して

$$[Y_n(q)V_n(q)]_{i,j} = [-\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{i,j} \tag{2.40}$$

を示そう. まず, $V_n(q)$, $\tilde{V}_n(q)$ の定義から, $V_n(q)$, $\tilde{V}_n(q)$ はいずれも n 列が 0 の行列であるので

$$[Y_n(q)V_n(q)]_{i,n} = 0 = [-\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{i,n} \tag{2.41}$$

である. 以下, $1 \leq j < n$ とする. $Y_n(q)V_n(q)$ の (i,j) 成分を実際に計算してみよう. 定義に従って忠実に計算すると

$$\begin{aligned}&[Y_n(q)V_n(q)]_{i,j}\\ &= \delta(i \geq j) \sum_{k=j}^{\min\{i,n-1\}} (-1)^{i+k} q^{-\frac{(i-k)(2n+1-i-k)}{2} + (j-k)(n+1-k)+1} \begin{bmatrix} n-k \\ i-k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-1-j \\ k-j \end{bmatrix}_q.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Case 1. $i = n$ のとき. (2.42) と (2.15) を利用すると

$$[Y_n(q)V_n(q)]_{n,j} = (-1)^{n+j} q^{-\frac{(n-j-1)(n-j+2)}{2}} {}_1\phi_0(q^{-n+j+1}; -; q, q^{n-j-1}) \tag{2.43}$$

となるので, q-binomial theorem (cf. [2]-(1.3.14)):

$${}_1\phi_0(q^{-n}; -; q, z) = (zq^{-n}; q)_n \tag{2.44}$$

により

$$[Y_n(q)V_n(q)]_{n,j} = (-1)^{n+j} q^{-\frac{(n-j-1)(n-j+2)}{2}} (1;q)_{n-j-1} = \begin{cases} -1 & \text{if } j = n-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.45}$$

Case 2. $i < n$ とする. (2.42) により

$$[Y_n(q)V_n(q)]_{i,j} = \frac{\delta(i \geq j)(-1)^{i+j} q^{1-\frac{(i-j)(2n-i-j+1)}{2}} (q;q)_{n-j-1}}{(q;q)_{n-i}} \sum_{k=0}^{i-j} \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} (q;q)_{n-j-k}}{(q;q)_k (q;q)_{i-j-k} (q;q)_{n-j-1-k}}. \tag{2.46}$$

ここで , (2.25) と (2.28) を利用すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{i-j} \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} (q;q)_{n-j-k}}{(q;q)_k (q;q)_{i-j-k} (q;q)_{n-j-1-k}} &= \frac{(q;q)_{n-j}}{(q;q)_{i-j}(q;q)_{n-j-1}} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} q^{-i+j}, q^{-n+j+1} \\ q^{-n+j} \end{matrix} ; q, q^{i-j-1} \right] \\ &= \frac{(q;q)_{n-j}(q^{-1};q)_{i-j}}{(q;q)_{i-j}(q;q)_{n-j-1}(q^{-n+j};q)_{i-j}}.\end{aligned} \tag{2.47}$$

従って, (2.46), (2.47) と

$$(xq^{-m};q)_k = (-1)^k x^k q^{-mk+\frac{k(k-1)}{2}} (x^{-1}q^{m-k+1};q)_k$$

を利用すると

$$[Y_n(q)V_n(q)]_{i,j} = \frac{\delta(i \geq j) q (q^{-1};q)_{i-j}}{(q;q)_{i-j}} = \begin{cases} q & \text{if } i=j, \\ -1 & \text{if } i=j+1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.48}$$

次に, $\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)$ の (i,j) 成分を計算しよう. まず, 定義に従って計算すると

$$[\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{i,j} = \sum_{k=\max\{i,2\}}^{j+1} (-1)^{i+k} q^{\frac{(k-i)(k-i+1)}{2}+2(j+1-k)} \begin{bmatrix} k-1 \\ k-i \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} j-1 \\ j+1-k \end{bmatrix}_q . \tag{2.49}$$

Case 1. $i=1$ のとき. (2.49) により

$$[\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{1,j} = -q^{2j-1} {}_1\phi_0(q^{-j+1};-;q,q^{j-1})$$

となるので, (2.44) により

$$[\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{1,j} = -q^{2j-1}(1;q)_{j-1} = \begin{cases} -q & \text{if } j=1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.50}$$

Case 2. $i>1$ のとき. (2.49) により,

$$[\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{i,j} = \frac{(q;q)_{j-1}}{(q;q)_{i-1}} \sum_{k=0}^{j-i+1} \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k+1)}{2}+2(j-i+1-k)}(q;q)_{i-1+k}}{(q;q)_k (q;q)_{j-i+1-k} (q;q)_{i-2+k}}$$

となるので, (2.25), (2.28) と $(q;q)_{m+k} = (q;q)_m (q^{m+1};q)_k$ により

$$[\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{i,j} = \begin{cases} -q & \text{if } i=j, \\ 1 & \text{if } i=j+1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.51}$$

従って, (2.41), (2.45), (2.48), (2.50), (2.51) により (2.40) が成立する. □

(2.40) を用いて Lemma 2.6 を示そう.

Proof of Lemma 2.6. $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} &(Z_{t'}(a;q))^{-1} P_{t'}(q)^{-1} (W_t(a,b,c;q))_{[1,n-1]}^{[1,n-1]} R_{n-1}(q) \\ &= -(\tilde{Z}_{t'}(aq,b;q))^{-1} P_{t'}(q)^{-1} (\tilde{W}_t(a,b,c;q))_{[2,n]}^{[1,n-1]} \tilde{R}_{n-1}(q) \end{aligned} \tag{2.52}$$

を示せばよい. まず, $Z_t(a;q)$, $\tilde{Z}_t(a,b;q)$ は対角行列, $P_t(q)$ は下半三角行列であることから, 次が容易に分かる.

$$Z_{t'}(a;q)^{-1} = (Z_t(a;q)^{-1})_{[1,n-1]}^{[1,n-1]},\ \tilde{Z}_{t'}(aq,b;q)^{-1} = (Z_t(a,b;q)^{-1})_{[1,n-1]}^{[1,n-1]},\ P_{t'}(q)^{-1} = [P_t(q)^{-1}]_{[1,n-1]}^{[1,n-1]}.$$

従って, $Z_t(a;q)^{-1}$, $\tilde{Z}_t(a,b;q)^{-1}$, $P_t(q)^{-1}$ は下半三角行列, $V_n(q)$ の n 行は全て 0, $\tilde{V}_n(q)$ の 1 行は全て 0 であることと (2.38) 利用して, 行列のブロック積を考えると

$$\begin{aligned}&(Z_{t'}(a;q))^{-1}P_{t'}(q)^{-1}(W_t(a,b,c;q))_{[1,n-1]}^{[1,n-1]}R_{n-1}(q)\\&=[Z_t(a;q)^{-1}P_t(q)^{-1}W_t(a,b,c;q)V_n(q)]_{[1,n-1]}^{[1,n-1]}\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}&(\tilde{Z}_{t'}(aq,b;q))^{-1}P_{t'}(q)^{-1}(\tilde{W}_t(a,b,c;q))_{[2,n]}^{[1,n-1]}\tilde{R}_{n-1}(q)\\&=[\tilde{Z}_t(a,b;q)^{-1}P_t(q)^{-1}\tilde{W}_t(a,b,c;q)\tilde{V}_n(q)]_{[1,n-1]}^{[1,n-1]}\end{aligned} \tag{2.54}$$

が得られる. さらに, (2.5), (2.6), (2.36), (2.39) により

$$Z_t(a;q)^{-1}P_t(q)^{-1}W_t(a,b,c;q)V_n(q)=-\tilde{Z}_t(a,b;q)^{-1}P_t(q)^{-1}\tilde{W}_t(a,b,c;q)\tilde{V}_n(q)$$

となるので, (2.53), (2.54) により (2.52) が成立する. □

Proof of Proposition 2.1. $n=1$ のときには直接の計算により成立が示せる. $n\geq 2$ とする. (2.7), (2.9), (2.34) により

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^n q^{\sum_{k=1}^n t_k}\det(T_t(a,b,c;q))}{(1-aq^{t_n-1})\prod_{1\leq i<j\leq n}(1-q^{t_j-t_i})}\\&=cq^n\cdot\det\left(W_t(a,b,c;q)_{[1,n-1]}^{[1,n-1]}\right)\prod_{k=1}^{n-1}(1-aq^{t_k-1})\\&\quad+\frac{(-1)^n a^{n-1}q^{-n+1+t_n+2\sum_{k=1}^{n-1}t_k}(b;q)_{n-1}(1-ac)}{(1-aq^{t_n-1})\prod_{1\leq i<j\leq n-1}(1-q^{t_j-t_i})}\det(T_{t'}(aq,b,cq;q)).\end{aligned} \tag{2.55}$$

(2.8), (2.10), (2.35) により

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^n q^{\sum_{k=1}^n t_k}\det(T_t(a,b,c;q))}{(1-abq^{t_n+n-3})\prod_{1\leq i<j\leq n}(1-q^{t_j-t_i})}\\&=(-1)^{n+1}cq\cdot\det\left(\tilde{W}_t(a,b,c;q)_{[2,n]}^{[1,n-1]}\right)\prod_{k=1}^{n-1}(1-abq^{t_k+n-3})\\&\quad+\frac{(-1)^n a^{n-1}q^{\frac{(n-1)(n-4)}{2}+t_n+2\sum_{k=1}^{n-1}t_k}(b;q)_{n-1}(1-abcq^{2n-3})}{(1-abq^{t_n+n-3})\prod_{1\leq i<j\leq n-1}(1-q^{t_j-t_i})}\det(T_{t'}(a,b,c;q)).\end{aligned} \tag{2.56}$$

従って, (2.37), (2.55), (2.56) により, (2.4) が成り立つ. □

Proof of Lemma 1.5. $1\leq k\leq n-1$ に対して

$$(1-abq^{t_n+n-3})R_{t'}^{(k-1)}(aq,b;q)+q^{n-1}(1-aq^{t_n-1})R_{t'}^{(k)}(a,b;q)=R_t^{(k)}(a,b;q) \tag{2.57}$$

となることに注意すれば, Proposition 2.1 の (2.4) を用いて, n についての帰納法で (2.3) が得られる. 従って, (2.1) と (2.2) を用いて, (2.3) を書き換えると Lemma 1.5 が得られる. □

Theorem 1.4 の証明の前に補題をさらに一つ示そう.

Lemma 2.8. (i) $1\leq k\leq n$ に対して

$$\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n}q^{-\sum_{u=1}^k j_u+k}\prod_{u=1}^k(1-abq^{2j_u+k-1-u})=q^{-\frac{k(2n-k-1)}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q(abq^n;q)_k. \tag{2.58}$$

(ii) $n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ に対して

$$R_{n,k}((1,2,\ldots,n);a,b;q) = q^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (aq^{k+1};q)_{n-k}(abq^n;q)_k. \tag{2.59}$$

Proof. (i) $k \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} &\{(j_1,j_2,\ldots,j_k) \in \mathbb{Z}^k; 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n\} \\ &= \{(j_1,j_2,\ldots,j_{k-1},n) \in \mathbb{Z}^k; 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{k-1} \leq n-1\} \\ &\quad \cup \{(j_1,j_2,\ldots,j_k) \in \mathbb{Z}^k; 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n-1\} \qquad \text{(disjoint union)} \end{aligned}$$

に注意すれば, n についての帰納法で容易に示せる. (ii) (2.58) により

$$\begin{aligned} &R_{n,k}((1,2,\ldots,n);a,b;q) \\ &= (aq^{k+1};q)_{n-k} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} q^{\frac{n(n+1)}{2} - \sum_{u=1}^k j_u - n + k} \prod_{u=1}^k (1 - abq^{2j_u+k-1-u}) \\ &= \begin{cases} q^{\frac{n(n-1)}{2}} (aq^{k+1};q)_{n-k} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} q^{-\sum_{u=1}^k j_u + k} \prod_{u=1}^k (1 - abq^{2j_u+k-1-u}) & \text{if } 1 \leq k \leq n, \\ q^{\frac{n(n-1)}{2}} (aq;q)_n & \text{if } k = 0 \end{cases} \\ &= q^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (aq^{k+1};q)_{n-k}(abq^n;q)_k \end{aligned}$$

となり成立する. □

Proof of Theorem 1.4. (i) Lemma 1.5 において $t_i = i$ $(1 \leq i \leq n)$ とし, (2.59) と

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^i - q^j) = q^{\frac{n(n-1)(n+1)}{6}} \prod_{k=1}^{n-1} (q;q)_k, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(-1)^k q^{\frac{k(2n-k+1)}{2}} (q^{-n};q)_k}{(q;q)_k},$$

$$(xq^k;q)_{m-k} = \frac{(x;q)_m}{(x;q)_k}, \quad (x;q^2)_m = (x^{\frac{1}{2}};q)_m(-x^{\frac{1}{2}};q)_m$$

であることを利用すると

$$\begin{aligned} &\det\left((1 - cq^{j-i}) \frac{(aq;q)_{i+j-2}}{(abq^2;q)_{i+j-2}}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \\ &= (-1)^n a^{\frac{n(n-3)}{2}} q^{\frac{n(n^2-3n-1)}{3}} (abcq;q^2)_n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(q;q)_k (aq;q)_{k+1} (bq;q)_{k-1}}{(abq^2;q)_{k+n-1}} \\ &\quad \times {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} q^{-n}, a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}, -a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}, abq^n \\ aq, a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}, -a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} \end{matrix} ; q, q \right]. \end{aligned} \tag{2.60}$$

(2.60) の a を aq^r と置き換えたあとで, 両辺に $\frac{(aq;q)_r^n}{(abq^2;q)_r^n}$ を掛けて整理すれば (1.11) が得られる. (1.12) は (1.11) を Askey-Wilson polynomial の定義を用いて書き直せば得られる. □

3 Askey-Wilson polynomials

本節では, Theorem 1.4 から得られる諸種の等式を導くために必要な Askey-Wilson polynomial $P_n(x;a,b,c,d;q)$, i.e.

$$P_n(x;a,b,c,d;q) = \frac{(ab,ac,ad;q)_n}{a^n} {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} q^{-n}, abcdq^{n-1}, ax, ax^{-1} \\ ab, ac, ad \end{matrix} ; q, q \right],$$

に関する等式について述べることを目的とする. まず, 次が知られている.

Theorem 3.1 (well-known). $n \in \mathbb{Z}$ $(n \geq 0)$, $\sigma \in S_4$ (4 次対称群) に対して

$$P_n(x;a,b,c,d;q) = P_n(x^{-1};a,b,c,d;q), \tag{3.1}$$

$$P_n(x;a_1,a_2,a_3,a_4:q) = P_n(x;a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},a_{\sigma(3)},a_{\sigma(4)};q). \tag{3.2}$$

特に, $x=\sqrt{-1}$ のときには, 次が成立する.

Proposition 3.2. $n \in \mathbb{Z}$ $(n \geq 0)$ に対して

$$P_n(\sqrt{-1};a,b,c,-c;q) = \begin{cases} (-1)^m a^m b^m c^{2m} q^{m(3m-1)}(-c^2;q^2)_m & \\ \times P_m(-ab^{-1};1,q,ab,-a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{2-4m};q^2) & \text{if } n=2m, \\ (-1)^{m+1} a^m b^{m+1} c^{2m}(1+ab^{-1})q^{m(3m+1)}(-c^2;q^2)_{m+1} & \\ \times P_m(-ab^{-1};q,q^2,ab,-a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m};q^2) & \text{if } n=2m+1. \end{cases}$$

Proposition 3.2 の証明の前に補題を一つ示そう.

Lemma 3.3. (i) $n \in \mathbb{Z}$ $(n \geq 0)$ に対して

$$\begin{aligned}(1-cxq^{-1})&(1-adq^n)P_n(x;a,b,c,d;q)\\ &= (1-acq^{n-1})(1-dx)P_n(x;a,b,cq^{-1},dq;q)\\ &\quad + q^{\frac{n}{2}-1}(a-x)(c-dq)P_n(xq^{-\frac{1}{2}};aq^{\frac{1}{2}},bq^{-\frac{1}{2}},cq^{-\frac{1}{2}},dq^{\frac{1}{2}};q).\end{aligned} \tag{3.3}$$

(ii) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}P_n(x;a,b,c,d;q) =& a^{-1}(1-abq^{n-1})(1-acq^{n-1})(1-adq^{n-1})P_{n-1}(x;a,b,c,d;q)\\ &- a^{-1}(1-abcdq^{2n-2})(1-ax)(1-ax^{-1})P_{n-1}(x;aq,b,c,d;q),\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}P_n(x;a,b,c,d;q) =& q^{\frac{n-1}{2}}x^{-1}(1-ax)(1-bd)(1-cx)P_{n-1}(xq^{\frac{1}{2}};aq^{\frac{1}{2}},bq^{\frac{1}{2}},cq^{\frac{1}{2}},dq^{\frac{1}{2}};q)\\ &+ x(1-dx^{-1})(1-acq^{n-1})(1-bx^{-1})P_{n-1}(x;a,bq,c,dq;q).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Proof. まず

$$p_{n,k}(x;a,b,c,d;q) = \frac{(ab,ac,ad;q)_n(q^{-n},abcdq^{n-1},ax,ax^{-1};q)_k q^k}{a^n(q,ab,ac,ad;q)_k}$$

とおくと, $p_{n,n+1}(x;a,b,c,d;q) = p_{n,-1}(x;a,b,c,d;q) = 0$ であり

$$P_n(x;a,b,c,d;q) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x;a,b,c,d;q) \tag{3.6}$$

となることに注意する. (i)

$$\begin{aligned}&(1-cxq^{-1})(1-adq^n)p_{n,k}(x;a,b,c,d;q) - (1-acq^{n-1})(1-dx)p_{n,k}(x;a,b,cq^{-1},dq;q)\\ &- q^{\frac{n}{2}-1}(a-x)(c-dq)p_{n,k}(xq^{-\frac{1}{2}};aq^{\frac{1}{2}},bq^{-\frac{1}{2}},cq^{-\frac{1}{2}},dq^{\frac{1}{2}};q) = 0\end{aligned}$$

となるので, (3.6) により成立する. (ii) $0\le k\le n$ に対して

$$\begin{aligned}&p_{n,k}(x;a,b,c,d;q)-a^{-1}(1-abq^{n-1})(1-acq^{n-1})(1-adq^{n-1})p_{n-1,k}(x;a,b,c,d;q)\\&+a^{-1}(1-abcdq^{2n-2})(1-ax)(1-ax^{-1})p_{n-1,k-1}(x;aq,b,c,d;q)=0\end{aligned}$$

となるので, (3.6) により (3.4) は成立する. (3.4) により

$$\begin{aligned}&P_{n-1}(xq^{\frac12};aq^{\frac12},bq^{\frac12},cq^{\frac12},dq^{\frac12};q)\\&=a^{-1}q^{-\frac12}(1-abq^{n-1})(1-acq^{n-1})(1-adq^{n-1})P_{n-2}(xq^{\frac12};aq^{\frac12},bq^{\frac12},cq^{\frac12},dq^{\frac12};q)\\&\quad-a^{-1}q^{-\frac12}(1-abcdq^{2n-2})(1-axq)(1-ax^{-1})P_{n-2}(xq^{\frac12};aq^{\frac32},bq^{\frac12},cq^{\frac12},dq^{\frac12};q),\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}P_{n-1}(x;a,bq,c,dq;q)=&a^{-1}(1-abq^{n-1})(1-acq^{n-2})(1-adq^{n-1})P_{n-2}(x;a,bq,c,dq;q)\\&-a^{-1}(1-abcdq^{2n-2})(1-ax)(1-ax^{-1})P_{n-2}(x;aq,bq,c,dq;q)\end{aligned}\tag{3.8}$$

であることに注意し, (3.5) を n についての帰納法で証明しよう. $n=1$ のときには, (3.5) の両辺の一致が直接の計算により示すことができる. $n\ge 2$ とし, $n-1$ まで (3.5) が成立したと仮定すると, n のときには, (3.4) と帰納法の仮定, さらに (3.7), (3.8) により成立が示せる. □

Proof of Proposition 3.2. まず, (3.5) の q を q^2 に置き換え, 得られた等式の (x,a,b,c,d,n) を $(-ab^{-1},q,1,ab,-a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m+2},m)$ にさらに置き換えて整理すると

$$\begin{aligned}&a^2c^2q^{4m-2}P_m(-ab^{-1};q,1,ab,-a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m+2};q^2)\\&=(1-a^2c^2q^{4m-2})(1-abq^{2m-1})(1+ab^{-1})P_{m-1}(-ab^{-1};q,q^2,ab,-a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m+4};q^2)\\&\quad-q^{m-1}(1+ab^{-1}q)(1+abc^2q^{4m-2})(1+a^2)P_{m-1}(-ab^{-1}q;q^2,q,abq,-a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m+3};q^2).\end{aligned}\tag{3.9}$$

また, (3.3) の q を q^2 に置き換え, (3.1) を用いて変形すると

$$\begin{aligned}(1-cxq^{-2})(1-adq^{2n})P_n(x^{-1};a,b,c,d;q^2)=&(1-acq^{2n-2})(1-dx)P_n(x^{-1};a,b,cq^{-2},dq^2;q^2)\\&+q^{n-2}(a-x)(c-dq^2)P_n(x^{-1}q;aq,bq^{-1},cq^{-1},dq;q^2)\end{aligned}$$

となり, (x,a,b,c,d,m) を $(-a^{-1}b,ab,q,q^2,-a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m},m)$ と置き換えて整理すると

$$\begin{aligned}&-abq^{2m}(1+ab^{-1})(1+c^2q^{2m})P_m(-ab^{-1};ab,q,q^2,-a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m};q^2)\\&=(1-abq^{2m})(1-a^2c^2q^{4m})P_m(-ab^{-1};ab,q,1,-a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m+2};q^2)\\&\quad-q^m(1+a^2)(1+abc^2q^{4m})P_m(-ab^{-1}q;abq,1,q,-a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m+1};q^2).\end{aligned}\tag{3.10}$$

(3.9), (3.10) を利用して, n の帰納法で示そう. $n=0$ のときには両辺ともに 1 となり成立している. $n-1$ まで成立したと仮定し, n のときの成立を示そう $(n\ge 1)$. $n=2m$ (resp. $n=2m+1$) のときには, (3.4) と帰納法の仮定を用いて得られた等式に, (3.9) (resp (3.10)) を適用すれば成立が示せる. □

Proposition 3.2 の系として次が容易に得られる.

Corollary 3.4. $n\in\mathbb{Z}$ $(n\ge 0)$ に対して

$$P_n(\sqrt{-1};a,-a,b,-b;q)=\begin{cases}(-1)^m(-a^2;q^2)_m(-b^2;q^2)_m(a^2b^2q^{2m};q^2)_m(q;q^2)_m & \text{if } n=2m,\\ 0 & \text{if } n=2m+1.\end{cases}\tag{3.11}$$

4 諸種の行列式

ここでは, Lemma 1.5, Theorem 1.4 と前節で得られた結果から得られる等式の紹介を目的とする. まず, Proposition 3.2 を用いて, Theorem 1.4 を n が偶数のときと奇数のときに分けて記述すると次が得られる.

Corollary 4.1. $m \in \mathbb{Z}$ $(m \geq 0)$ に対して

$$\det\left((1-cq^{j-i})\frac{(aq;q)_{i+j+r-2}}{(abq^2;q)_{i+j+r-2}}\right)_{1\leq i,j\leq 2m}$$
$$=(-1)^m a^{m(2m-1)} b^m c^m q^{\frac{m(8m^2-3m+1)}{3}+m(2m-1)r}(b;q^2)_m \prod_{k=0}^{2m-1}\frac{(q;q)_k(aq;q)_{k+r}(bq;q)_{k-1}}{(abq^2;q)_{k+2m+r-1}}$$
$$\times P_m(c;1,q,aq^{r+1},a^{-1}b^{-1}q^{-4m-r+1};q^2), \tag{4.1}$$

$$\det\left((1-cq^{j-i})\frac{(aq;q)_{i+j+r-2}}{(abq^2;q)_{i+j+r-2}}\right)_{1\leq i,j\leq 2m+1}$$
$$=(-1)^m a^{m(2m+1)} b^m c^m (1-c) q^{\frac{m(m+1)(8m+1)}{3}+m(2m+1)r}(b;q^2)_{m+1} \prod_{k=0}^{2m}\frac{(q;q)_k(aq;q)_{k+r}(bq;q)_{k-1}}{(abq^2;q)_{k+2m+r}}$$
$$\times P_m(c;q,q^2,aq^{r+1},a^{-1}b^{-1}q^{-4m-r-1};q^2). \tag{4.2}$$

(4.1) の c を 1 にして, $P_n(1;1,b,c,d;q)=(b,c,d;q)_n$ であることに注意すれば次が得られる.

Corollary 4.2. $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\det\left((q^{i-1}-q^{j-1})\frac{(aq;q)_{i+j+r-2}}{(abq^2;q)_{i+j+r-2}}\right)_{1\leq i,j\leq 2m}$$
$$=\left(a^{m(m-1)} q^{\frac{m(m-1)(4m+1)}{3}+m(m-1)r}\prod_{k=1}^{m}\frac{(q;q)_{2k-1}(aq;q)_{2k+r-1}(bq;q)_{2k-2}}{(abq^2;q)_{2(k+m)+r-3}}\right)^2. \tag{4.3}$$

尚, (4.3) は, Ishikawa-Tagawa-Zeng [4] での同じ行列に対する pfaffian の結果からも得られる.

(1.13) の c に 0 を代入すると次が得られる (cf. [3]).

Corollary 4.3 (I.-T.-Zeng '09). $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\det\left(\frac{(aq;q)_{t_i+j-2}}{(abq^2;q)_{t_i+j-2}}\right)_{1\leq i,j\leq n} = a^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \prod_{k=1}^{n}\frac{(aq;q)_{t_k-1}(bq;q)_{k-1}}{(abq^2;q)_{t_k+n-2}} \prod_{1\leq i<j\leq n}(q^{t_i}-q^{t_j}).$$

Corollary 4.3 を示す前に補題を一つ示そう.

Lemma 4.4. $n \in \mathbb{N}$, $t=(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in\mathbb{N}^n$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k R_t^{(k)}(a,b;q) = (-1)^n a^n q^{\frac{n(n-3)}{2}+\sum_{k=1}^{n} t_k}(bq^{-1};q)_n. \tag{4.4}$$

Proof. $R_t^{(k)}(a,b;q)$ の定義式より, $t=(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ に対して

$$R_t^{(0)}(a,b;q) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}(1-aq^{t_k-1}), \quad R_t^{(n)}(a,b;q)=\prod_{k=1}^{n}(1-abq^{t_k+n-3})$$

である. 従って, (2.57) を利用すれば, n についての帰納法で示せる. □

Proof of Corollary 4.3. (1.13) の c を 0 とし, (4.4) を用いて整理すれば成立が示せる. □

Lemma 1.5 において, c を a^{-1}, $a^{-1}b^{-1}q^{-2n+3}$ と置き換えると次が得られる.

Corollary 4.5. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\det\left((1-a^{-1}q^{j-t_i-1})\frac{(aq;q)_{t_i+j-2}}{(abq^2;q)_{t_i+j-2}}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$= (-1)^n a^{\frac{n(n-3)}{2}} q^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\sum_{k=1}^n t_k}(b;q^2)_n \prod_{1\le i<j\le n}(q^{t_i}-q^{t_j})\prod_{k=1}^n \frac{(aq;q)_{t_k}(bq;q)_{k-2}}{(abq^2;q)_{t_k+n-2}}. \tag{4.5}$$

$$\det\left((1-a^{-1}b^{-1}q^{j-t_i-2n+1})\frac{(aq;q)_{t_i+j-2}}{(abq^2;q)_{t_i+j-2}}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$= (-1)^n a^{\frac{n(n-3)}{2}} b^{-n} q^{\frac{n(n-1)(n-11)}{6}-\sum_{k=1}^n t_k}(b;q^2)_n \prod_{1\le i<j\le n}(q^{t_i}-q^{t_j})\prod_{k=1}^n \frac{(aq;q)_{t_k-1}(bq;q)_{k-2}}{(abq^2;q)_{t_k+n-3}}. \tag{4.6}$$

Proof. Lemma 1.5 において, c を a^{-1}, $a^{-1}b^{-1}q^{-2n+3}$ と置き換え

$$R_{n,0}(t;a,b;q) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{u=1}^n(1-aq^{t_u}), \quad R_{n,n}(t;a,b;q) = \prod_{k=1}^n(1-abq^{t_k+n-1})$$

となることに注意すれば容易に得られる. □

(1.11) の (a,b,c) を (q^a,q^b,q^c) と置き換え, 両辺に $\frac{1}{(1-q)^n}$ を掛けて[6], $q\to 1$ とすると次が得られる.

Corollary 4.6. $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\det\left((c+j-i)\frac{(a+1)_{i+j+r-2}}{(a+b+2)_{i+j+r-2}}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$= (-2)^n\left(\frac{a+b+c+r+1}{2}\right)_n \cdot {}_3F_2\left[\begin{matrix}-n, \frac{a+c+r+1}{2}, a+b+n+r \\ \frac{a+b+c+r+1}{2}, a+r+1\end{matrix};1\right]\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k!(a+1)_{k+r+1}(b+1)_{k-1}}{(a+b+2)_{k+n+r-1}}. \tag{4.7}$$

さらに, $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (Catalan number) とおくと, $\left.\frac{(a+1)_n}{(a+b+2)_n}\right|_{a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}} = \frac{C_n}{4^n}$ となるので, (4.7) から次が得られる.

Corollary 4.7. $n,r\in\mathbb{N}$, $r\ge 0$ に対して

$$\det\left((c+j-i)C_{i+j+r-2}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$= (-2)^n\left(\frac{c+r+1}{2}\right)_n \cdot {}_3F_2\left[\begin{matrix}-n, \frac{2c+2r+1}{4}, n+r \\ \frac{c+r+1}{2}, r+\frac{1}{2}\end{matrix};1\right]\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2k+2r+1)!(2k)!}{(k+r)!(k+n+r)!}. \tag{4.8}$$

---

[6] $3\sum_{k=0}^{n-1}k=\sum_{k=0}^{n-1}(k+n-1)$ に注意.

尚, $A_n = \binom{2n}{n}$, $B_n = \binom{2n+1}{n}$ とおくと, $\left.\frac{(a+1)_n}{(a+b+2)_n}\right|_{a=-\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}} = \frac{A_n}{4^n}$, $\left.\frac{(a+1)_n}{(a+b+2)_n}\right|_{a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}} = \frac{B_n}{4^n}$ となるので, $\det\left((c+j-i)A_{i+j+r-2}\right)_{1\le i,j\le n}$, $\det\left((c+j-i)B_{i+j+r-2}\right)_{1\le i,j\le n}$ についても, (4.8) と同様の等式が得られる.

最後に, (4.1) と (4.2) において, $q \to 1$ として得られる結果について述べておこう. そのために, $n \in \mathbb{Z}$ $(n \ge 0)$ に対して, Wilson polynomial $W_n(x;a,b,c,d)$ を

$$W_n(x;a,b,c,d) = (a+b,a+c,a+d)_n \cdot {}_4F_3\left[\begin{matrix} a+x, a-x, a+b+c+d+n-1, -n \\ a+b, a+c, a+d \end{matrix}; 1\right]$$

で定義する. このとき,

$$\left.\frac{P_n(q^x;q^a,q^b,q^c,q^d;q^2)}{(1-q)^{3n}}\right|_{q=1} = 2^{3n}W_n(x/2;a/2,b/2,c/2,d/2).$$

が成立しているので, (4.1) (resp. (4.2)) の (a,b,c) を (q^a,q^b,q^c) と置き換え, 両辺に $\frac{1}{(1-q)^{2m}}$ (resp. $\frac{1}{(1-q)^{2m+1}}$) を掛けて, $q \to 1$ として整理すると次が得られる.

Corollary 4.8. $m \in \mathbb{Z}$ $(m \ge 0)$ に対して

$$\det\left((c+j-i)\frac{(a+1)_{i+j+r-2}}{(a+b+2)_{i+j+r-2}}\right)_{1\le i,j\le 2m}$$
$$= \begin{cases} (-1)^m 2^{4m} (\frac{b}{2})_m W_m(\frac{c}{2}; 0, \frac{1}{2}, \frac{a+r+1}{2}, -\frac{a+b+4m+r-1}{2}) \prod_{k=0}^{2m-1} \frac{k!(a+1)_{k+r}(b+1)_{k-1}}{(a+b+2)_{k+2m+r-1}} & \text{if } n=2m, \\ (-1)^m 2^{4m+1} c(\frac{b}{2})_{m+1} W_m(\frac{c}{2}; \frac{1}{2}, 1, \frac{a+r+1}{2}, -\frac{a+b+4m+r+1}{2}) \prod_{k=0}^{2m} \frac{k!(a+1)_{k+r}(b+1)_{k-1}}{(a+b+2)_{k+2m+r}} & \text{if } n=2m+1. \end{cases}$$

参考文献

[1] M. Ciucu and C. Krattenthaler, "The Interaction of a gap with a free boundary in a two dimensional dimer system", *Comm. Math. Phys.*, **302** (2011) 253 – 289.

[2] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series (2nd ed)*, Cambridge Univ. Press, (1990, 2004).

[3] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "A q-analogue of Catalan Hanken determinants", RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B11 (2009), 19-42.

[4] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q-Catalan Hankel determinants", `arXiv:1011.5941v1`.

[5] R. Koekoek, P. Leskey and R. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues*, Springer-Verlag, (2000).

[6] M. Mehta and R. Wang, "Calculation of a Certain Determinant", *Commun. Math. Phys.* **214** (2000), 227 – 232.

[7] M. Nishizawa, "Evaluation of a certain q-determinant", *Linear Algebra and its Applications* **342** (2002), 107-115.