数理解析研究所講究録
第 1811 巻 2012 年 42-49

Pseudo-trace functions for vertex operator algebras and Zhu's algebras

筑波大学数理物質系数学域 有家雄介*

1 Introduction

頂点作用素代数 V に付随するトーラス上の一点関数の空間は Y. Zhu ([16]) により V が C_2 有限かつ有理的な場合に, 単純加群の trace function を基底に持つことが示されている. さらに, 一点関数の空間に定まる $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用を用いて, 頂点作用素代数の加群の指標のモジュラー不変性を証明した.

このZhuの結果の有理的でない場合への拡張は宮本雅彦氏 ([14]) により与えられた. [14] においては, 高次 Zhu 代数上の対称線形関数を用いて基底 (pseudo-trace function とよばれる) を構成し, さらに次元の公式を与えている. しかし, 実際に高次 Zhu 代数上の対称線形関数を決定することは非常に難しい問題である.

最近筆者と永友清和氏は [7] において, pseudo-trace function を高次 Zhu 代数を用いることなく定義し, その手法を用いて, 安部利之氏により構成された symplectic fermion に付随する頂点作用素代数 ([1]) の pseudo-trace function を構成した.

講演においては, pseudo-trace function の定義について述べたのち, symplectic fermion に付随してえられる頂点作用素代数の直既約表現の直和の上に実際に pseudo-trace function を構成した. 本稿では講演では詳しく述べられなかった一点関数の空間と Zhu 代数の関係について解説し, symplectic fermion からえられる頂点作用素代数とよく似た[1] 頂点作用素代数の一点関数の空間の次元を与える.

2 Vertex operator algebras and Zhu's algebras

この節では頂点作用素代数およびその加群の定義を復習したのち, Zhu 代数について述べる. 頂点作用素代数の公理に関しては, [12, 13] などを参照せよ.

頂点作用素代数とは $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数つきの $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $V=\bigoplus_{k=0}^{\infty} V_k$, 線形写像

$$Y: V \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)[[z,z^{-1}]] \quad (a \mapsto Y(a,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)}z^{-n-1}), \tag{2.1}$$

*e-mail: arike@math.tsukuba.ac.jp

[1]実際一番簡単な場合は二つは同型になる.

真空ベクトル $|0\rangle \in V_0$, ヴィラソロ元 $\omega \in V_2$ の四つ組 $(V, Y, |0\rangle, \omega)$ であって以下をみたすものである.

(1) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\dim V_k < \infty$.

(2) 任意の $a, b \in V$ に対して, $Y(a,z)b \in \mathbb{C}((z))$ (ここで, $\mathbb{C}((z))$ はローラン級数の空間).

(3) 任意の $a \in V$ に対して, $Y(a,z)|0\rangle \in a + Vz[[z]]$.

(4) $Y(|0\rangle, z) = \mathrm{id}_V$.

(5) 任意の $a, b \in V$ および整数 p, q に対して,

$$[a_{(p)}, b_{(q)}] = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{p}{j} (a_{(j)}b)_{(p+q-j)} \tag{2.2}$$

および,

$$(a_{(p)}b)_{(q)} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{p}{j} \left\{ a_{(p-j)}b_{(q+j)} - (-1)^p b_{(p+q-j)}a_{(j)} \right\} \tag{2.3}$$

が成り立つ.

(6) $L_n = \omega_{(n+1)}$ とおくと, 次をみたす中心電荷 $c_V \in \mathbb{C}$ が存在する.

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m+n,0}c_V. \tag{2.4}$$

(7) $a \in V_k$ に対して, $L_0 a = ka$.

(8) $a \in V$ に対して,

$$\frac{d}{dz}Y(a,z) = Y(L_{-1}a, z). \tag{2.5}$$

$a \in V_k$ のとき, $|a| = k$ とかく. さらに, $J_n(a) = a_{(|a|-1+n)}$ とおき, V 全体に線形に拡張する. このとき

$$J_n(a)V_m \subset V_{m-n} \tag{2.6}$$

が成り立つ.

定義 2.1. 頂点作用素代数 V の部分空間 $C_2(V) = \{a_{(-2)}b \mid a, b \in V\}$ が V での余次元が有限であるとき, V を C_2 有限であるという.

頂点作用素代数 V の加群 M とは, 線形写像

$$Y : V \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)[[z, z^{-1}]] \quad (a \to Y(a,z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)}z^{-n-1}) \tag{2.7}$$

であって, (2), (4), (5) を適当に修正した条件をみたすものである[2]. このとき, (6) および (8) が成立する (cf. [13]). この定義には V のように, 次数付けは仮定されていない

[2]通常, 弱加群 (weak module) とよばれるものである.

が, [14] において V が C_2 有限ならば, 任意の 0 でない有限生成 V-加群 M は

$$M=\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_{(r+k)},\ M_{(r+k)}=\{u\in M\,|\,(L_0-r-k)^{d+1}u=0\,(\exists d\in\mathbb{Z}_{\geq 0})\},\\ \dim M_{(r+k)}<\infty,\ M_{(r)}\neq 0 \tag{2.8}$$

の形の加群の直和となることが示されている. V-加群 M が (2.8) の形に分解されるとき, r を M の最低ウエイトという.

頂点作用素代数の場合と同様に, 斉次な $a\in V$ の M への作用 $a_{(|a|-1+n)}$ を V の時と同様に $J_n(a)$ とかくと, やはり $J_n(a)M_{(r+k)}\subset M_{(r+k-n)}$ が成り立つ.

次に Zhu 代数について述べよう. 頂点作用素代数 V の部分空間 $O(V)$ を次のベクトルで張られるものとする:

$$a\circ b=\mathrm{Res}_{z=0}Y(a,z)b\frac{(1+z)^{|a|}}{z^2}dz. \tag{2.9}$$

ここで $a\in V$ は斉次な元である. そこで, $A(V)=V/O(V)$ とおき, $a\in V$ の $A(V)$ における像を $[a]$ とかく. このとき, $*:V\times V\to V$ を

$$a*b=\mathrm{Res}_{z=0}Y(a,z)b\frac{(1+z)^{|a|}}{z}dz \tag{2.10}$$

とすると, 次が成り立つ.

定理 2.2 ([16]). $A(V)=V/O(V)$ は $[|0\rangle]$ を単位元とする結合代数となる. また, $[\omega]$ は $A(V)$ の中心に属する.

この結合代数 $A(V)$ を Zhu 代数という.

条件 (2.8) をみたす V-加群を $M=\bigoplus_{k=0}^{\infty}M_{(r+k)}$ とする. このとき $M_{(r)}$ は $A(V)\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_{(r)})$ $([a]\mapsto J_0(a))$ により左 $A(V)$-加群となる. このとき次が成り立つ.

定理 2.3 ([16]). 単純 V-加群 M に対してその最低ウエイトの空間を対応させる写像は, 単純 V-加群と単純左 $A(V)$-加群の間の一対一対応を与える.

特に, V が C_2 有限の場合は, $A(V)$ は有限次元代数となる (証明はたとえば [1] を参照). したがって単純 V-加群は有限個である.

3 Trace functions

以下ではとくに断らない限り, V-加群 M はある複素数と非負整数 d が存在して, $M=\bigoplus_{k=0}^{\infty}M_{(r+k)}$, $M_{(r+k)}=\{u\in M\,|\,(L_0-r-n)^{d+1}u=0\}$ かつ, $\dim M_{(r+n)}<\infty$ をみたすものとする.

V-加群 M 上の作用素 q^{L_0} を各 $M_{(r+k)}$ 上で,

$$q^{L_0} = \sum_{j=0}^{d} \frac{1}{j!}(L_0 - r - k)^j q^{r+k}(\log q)^j \tag{3.1}$$

として定め M 全体に線形に拡張する. このとき,

$$Z_M(a, q) := \mathrm{tr}_M\, J_0(a) q^{L_0 - c_V/24}\ (a \in V) \tag{3.2}$$

を M の trace function という. (2.2) より $J_0(a)$ と L_0 が可換であることから, $j > 0$ のとき, $J_0(a)(L_0 - r - n)$ はべき零である. したがって, $Z(a, q)$ の $q^{L_0 - c_V/24}$ を (3.1) を用いて展開すると, $Z(a, q)$ は $\log q$ の項を持たないことがわかる. また, $J_0(|\,0\,\rangle) = \mathrm{id}_M$ より, trace function において $a = |\,0\,\rangle$ としたものは M の指標

$$Z_M(|\,0\,\rangle, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim M_{(r+k)} q^{r+k-c_V/24} \tag{3.3}$$

となる.

頂点作用素代数 V に付随するトーラス上の一点関数とは, V から上半平面 $\mathcal{H}$ 上の正則関数全体の集合への写像であって, いくつかの条件をみたすものである (cf. [9, 16]). この一点関数 S 全体の作るベクトル空間を $\mathcal{C}(V)$ とかく. Zhu により, V が C_2 有限ならば (3.2) において $q = e^{2\pi i\tau}$ $(\tau \in \mathcal{H})$ とすると $Z_M \in \mathcal{C}(V)$ となることが示されている. さらに次のことが示されている.

定理 3.1 ([16]). *V が C_2 有限かつ有理的である時, $\mathcal{C}(V)$ は V の単純加群の上の trace function を基底に持つ.*

ここに現れる, V が有理的であるという条件は, 任意の V-加群が半単純であることである[3].

ベクトル空間 $\mathcal{C}(V)$ には自然に $SL_2(\mathbb{Z})$ が作用している. $\mathrm{Ch}(V) := \{S(|\,0\,\rangle, q) \mid S \in \mathcal{C}(V)\}$ とおくと, $\mathcal{C}(V)$ への $SL_2(\mathbb{Z})$ を用いることにより, $\mathrm{Ch}(V)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用で閉じている. 特に, 定理 3.1 より V が C_2 有限かつ有理的な場合には指標のモジュラー不変性が成り立つ.

4 Pseudo-trace functions

[14] において, 定理 3.1 を非有理的な頂点作用素代数に対して拡張するために, pseudo-trace function の概念が導入された. ここでは [7] における定義を解説する.

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元代数を A とする. A 上の対称線形関数とは線形写像 $\phi : A \to \mathbb{C}$ であって, 任意の $a, b \in A$ に対して $\phi(ab) = \phi(ba)$ をみたすものである. 対称線形関数のなすベクトル空間を $\mathrm{S}(A)$ とおく.

[3] これは有理性の正確な定義ではないが, C_2 有限性のもとではこのように考えておけば十分である.

有限生成左 A-加群 W が射影的であることと $u_i \in W$, $\alpha_i \in \mathrm{Hom}_A(W, A)\ (1 \le i \le n)$ であって, 任意の $w \in W$ に対して $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i(w)u_i$ をみたすものが存在することは同値であることが知られている. この $\{u_i, \alpha_i\}_{1\le i\le n}$ という組と $\phi \in \mathrm{S}(A)$ に対して, 線形写像 $\phi_W : \mathrm{End}_A(W) \to \mathbb{C}$ を $\phi_W(\alpha) = \sum_{i=1}^n \phi(\alpha_i \circ \alpha(u_i))$ で定義する. 組 $\{u_i, \alpha_i\}_{1\le i\le n}$ のとり方は W に対して一意的ではないが, ϕ_W は $\{u_i, \alpha_i\}_{1\le i\le n}$ のとり方によらないことが簡単に証明できる. さらにトレースと同様の性質が成り立つ.

命題 4.1. W_1, W_2 を有限生成左射影 A-加群, $\phi \in \mathrm{S}(A)$ とする. このとき,

$$\phi_{W_1}(\alpha \circ \beta) = \phi_{W_2}(\beta \circ \alpha) \quad (\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_A(W_2, W_1),\ \beta \in \mathrm{Hom}_A(W_1, W_2)) \tag{4.1}$$

が成り立つ.

このようにして得られる線形写像 ϕ_W によりトレースを置き換えることによって pseudo-trace function を定義する.

まず V-加群 M の自己準同型環 $\mathrm{End}_V(M)$ の部分代数 P で M が射影 P-加群となるようなものをとる[4]. 頂点作用素代数の加群の準同型は L_0 と可換なので, 任意の $\alpha \in P$ に対して, $\alpha(M_{(r+k)}) \subset M_{(r+k)}$ が成り立つ. したがって, M の各斉次空間は P-加群として M の直和因子なので射影的である. 以上より, $\phi \in \mathrm{S}(P)$ に対して, 線形写像 $\phi_{M_{(r+n)}} : \mathrm{End}_P(M_{(r+n)}) \to \mathbb{C}$ が定まる. また, P は M の自己準同型環の部分代数なので, V の M への作用 $J_n(a)$ は任意の P の元の作用と可換となっている. また, V の作用 $J_n(a)$ は固有値を n 下げる作用であることを考えると, $J_n(a) \in \mathrm{Hom}_P(M_{(r+k)}, M_{(r+k-n)})$ となる. とくに, $J_0(\omega) = L_0$ なので, $L_0 \in \mathrm{End}_P(M_{(r+k)})$ となる.

定理 4.2 ([14, 7]). $S_M^{P,\phi}$ を

$$S_M^{P,\phi}(a, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{M_{(r+k)}}(J_0(a) q^{L_0 - c_V/24}) \quad (a \in V) \tag{4.2}$$

と定めると, $S_M^{P,\phi} \in \mathfrak{C}(V)$ となる.

証明は, Zhu による trace function が $\mathfrak{C}(V)$ の元となることの証明とまったく同様である.

ここで定義した, $S_M^{P,\phi}$ を (M 上の) pseudo-trace function とよぶ. (4.2) の右辺を (3.1) を用いて展開すると,

$$S_M^{P,\phi}(a, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{d} \frac{1}{j!} \phi_{M_{(r+k)}}(J_0(a)(L_0 - r - k)^j) q^{r+k-c_V/24} (\log q)^j \tag{4.3}$$

を得る.

[14] においては, [8] において導入された n 次 Zhu 代数[5]を用いて定義されている. ここで n は十分大きい整数である. [14] における pseudo-trace function の定義を我々

[4] このような部分代数で自明なものとして, M 上の恒等写像で生成される一次元代数がとれる.

[5] 通常の Zhu 代数は $A_0(V)$ となる.

の手法を用いて復元する方法の概略を述べる．$A_n(V)$ 上の対称線形関数 ϕ の radical $\mathrm{rad}(\phi)=\{a\in A_n(V)\mid \phi(A_n(V)a)=0\}$ による $A_n(V)$ の商を A_ϕ とすると A_ϕ は対称代数[6]となる．この代数の基本代数を $P_\phi := eA_\phi e$ とする．このとき，$A_\phi e$ は射影右 P_ϕ-加群かつ左 $A_n(V)$-加群となる．この加群 $A_\phi e$ を [8] の方法で V-加群に誘導したもの $L_n(A_\phi e)$ を考えると，代数の単射 $P_\phi \to \mathrm{End}_V(L_n(A_\phi e))$ が存在して，$L_n(A_\phi e)$ は射影 P_ϕ-加群[7]となる．また，自然に $\phi\in \mathrm{S}(P_\phi)$ と考えられるので，この組 $(L_n(A_\phi e), P_\phi, \phi)$ に定理 4.2 を適用することにより [14] における pseudo-trace function をえる．

このようにしてえられた pseudo-trace function は，$\mathfrak{C}(V)$ の基底となる．さらに，基底であることを示す [14] の証明の中の議論を用いると，次のことが成り立つ．

定理 4.3 ([14]). V を C_2 有限で，すべての単純 V-加群は無限次元であるとし，Λ を単純 V-加群の最低ウエイトの集合とする．このとき，$\mathfrak{C}(V)$ は基底 $\{S^{r,i_r}\mid r\in\Lambda,\ 1\le i_r\le k_r\}$ をもつ．ここで，S^{r,i_r} は

$$S^{r,i_r}(a,q)=\sum_{j=0}^{d_{i_r}}\sum_{k=0}^{\infty}S^{r,i_r}_{jk}(a)q^{r+k-c_V/24}(\log q)^j \quad (\forall a\in V) \tag{4.4}$$

かつ $S^{r,i_r}_{00}\neq 0$ である．さらに，$S\in\mathfrak{C}(V)$ で (4.4) の形の展開を持つものは，$S^{r',i_{r'}}$ $(\mathrm{Re}(r')\ge \mathrm{Re}(r))$ の一次結合となる．また，$\dim\mathfrak{C}(V)=\dim\mathrm{S}(A_n(V))-\dim\mathrm{S}(A_{n-1}(V))$ が十分大きい n に対して成り立つ．

注意 4.4. [14] における pseudo-trace function の定義には，十分大きい自然数 n に対して $A_n(V)$ を考えることが必要であった．この自然数は，どの単純 V-加群 $M=\bigoplus_{k=0}^{\infty}M_{(r+k)}$ においても $M_{(r+k)}\neq 0\ (\forall k\ge N)$ となるような自然数 N よりも大きくとる必要がある．したがって，すべての単純 V-加群は無限次元でなければならない．c_V が 0 でなければ単純 V-加群は常に無限次元であるが，$c_V=0$ のときには単純加群が有限次元となる頂点作用素代数が知られている (たとえば，[5] における $\mathcal{W}_{p,q}$)．

定理 4.3 によって，原理的には $\mathfrak{C}(V)$ の次元が計算できることになるが，高次の Zhu 代数上の対称線形関数の空間の次元を計算することは一般に非常に困難である．

そこで，(4.4) において，S^{r,i_r}_{00} は Zhu 代数 $A(V)$ 上の対称線形関数となること ([14]) および定理 4.3 を用いると，不等式 $\dim\mathfrak{C}(V)\le\dim\mathrm{S}(A(V))$ が証明できる．また，$\mathrm{Ch}(V)$ の定義より，全射 $\mathfrak{C}(V)\to\mathrm{Ch}(V)$ が存在する．以上より，次の結果を得る．

定理 4.5 ([7]). 定理 *4.3* と同じ仮定をおく．このとき

$$\dim\mathrm{Ch}(V)\le\dim\mathfrak{C}(V)\le\dim\mathrm{S}(A(V)) \tag{4.5}$$

が成り立つ．

不等式 (4.5) において，初めの不等号に関しては等号が成立しない例が (たとえ V が有理的であっても) 存在する．一方，二番目の不等号に関しては，V が有理的であれば，

[6] 対称線形関数で代数上の非退化な双線形形式を誘導するものが存在する代数．
[7] この部分の証明に，n が十分大きいことが用いられる．

$\dim \mathcal{C}(V)$ と $\dim \mathrm{S}(A(V))$ はともに単純 V-加群の数と等しくなって[8], 等号が成立することが知られているが, 次で述べるように, 有理的でない V に対しても等号が成立する例が存在する. 等号成立条件がどのようなものかは知られておらず, 今後の研究課題である.

この定理を用いて, 具体例の $\mathcal{C}(V)$ の次元を求めてみよう. C_2 有限であるが, 有理的でない頂点作用素代数として triplet 代数 $\mathcal{W}_p$ がよく知られている (構成法は, たとえば [15, 3] を参照). ここで, p は 2 以上の整数である. symplectic fermion に付随して現れる頂点作用素代数でもとのベクトル空間が 2 次元のものと, $\mathcal{W}_2$ は同型であることが知られている.

$\mathcal{W}_p$ はもっともよく調べられている C_2 有限であるが有理的でない頂点作用素代数である. たとえば, 単純加群の分類や対数的加群の構成 ([2, 4, 15]), 加群の圏と制限量子群 $\overline{U}_q(sl_2)$ $(q = e^{\pi i/p})$ の有限次元加群の圏がアーベル圏として同値であること ([10, 15]), Zhu 代数の構造の決定 ([6, 15]), 指標のモジュラー変換および $\mathrm{Ch}(\mathcal{W}_p)$ の決定 ([3, 11]) などの結果が知られている.

ここでは, 定理 4.5 を用いて $\mathcal{C}(\mathcal{W}_p)$ の次元を決定する. [6, 15] において, $A(\mathcal{W}_p)$ は

$$A(\mathcal{W}_p) \cong \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus (I \oplus M_2(\mathbb{C}))^{\oplus(p-1)}, \quad I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C} \right\} \tag{4.6}$$

であることが示されている. ここで, $M_2(\mathbb{C})$ は 2 次の行列代数である. このとき, $\mathrm{S}(A(\mathcal{W}_p))$ の基底は, 各行列代数のトレースと, I の双対空間の基底 (I は可換代数である) によりえられ, $\dim \mathrm{S}(A(\mathcal{W}_p)) = 3p - 1$ である. また, [3] により, $\dim \mathrm{Ch}(\mathcal{W}_p) = 3p - 1$ となることが示されている (さらにこの空間は $SL_2(\mathbb{Z})$ の表現として, 単純加群の指標により生成される). 以上の二つの事実と定理 4.5 を用いれば, $\dim \mathcal{C}(\mathcal{W}_p) = 3p - 1$ となることがわかる.

References

[1] A. Abe, A $\mathbb{Z}_2$-orbifold model of the symplectic fermionic vertex operator superalgebra, *Math. Z.* **255** (2007), 755–792.

[2] D. Adamovič and A. Milas, On the triplet vertex algebra W(p), *Adv. Math.* **217** (2008), 2664–2699.

[3] D. Adamovič and A. Milas, An analogue of modular BPZ-equation in logarithmic (super)conformal field theory, In *Vertex operator algebras and related areas, Contemp. Math.* **497**, eds. M. Bergvelt, G. Yamskulna and W. Zhao, American Mathematical Society, 2009, pp. 1–17.

[8] Zhu 代数 $A(V)$ は V が有理的であれば半単純代数となる. このとき, $A(V)$ はその単純加群の個数分の行列代数の直和となっており, その上の対称線形関数の空間の基底はそれぞれの行列代数上のトレースで与えられる.

[4] D. Adamoviĉ and A. Milas, Lattice construction of logarithmic modules for certain vertex algebras, *Selecta Math. (N.S.)* **15** (2009), 535–561.

[5] D. Adamoviĉ and A. Milas, On $\mathcal{W}$-algebras associated to $(2, p)$ minimal models and their representations, *Int. Math. Res. Not.* **20** (2010), 3896–3934.

[6] D. Adamoviĉ and A. Milas, The structure of Zhu's algebras for certain $\mathcal{W}$-algebras, *Adv. Math.* **227** (2011), 2425–2456.

[7] Y. Arike and K. Nagatomo, Some remarks on pseudo-trace functions for orbifold models associated with symplectic fermions, preprint, arXiv:1104.0068.

[8] C. Dong, H. Li and G. Mason, Vertex operator algebras and associative algebras, *J. Algebra* **206** (1998), 67–96.

[9] C. Dong, H. Li and G. Mason, Modular-invariance of trace functions in orbifold theory and generalized moonshine, *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 1–56

[10] A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, B. L. Feigin, The Kazhdan-Lusztig correspondence for the representation category of the triplet W-algebra in logorithmic conformal field theories, (Russian) *Teoret. Mat. Fiz.* **148** (2006), 398–427; translation in *Theoret. and Math. Phys.* **148** (2006), 1210–1235

[11] J. Fuchs, S. Hwang, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, Nonsemisimple fusion algebras and the Verlinde formula, *Commun. Math. Phys.* **247** (2004), 713–742.

[12] V. G. Kac, *Vertex algebras for beginners, 2nd ed.*, University Lecture Note Series **10**, American Mathematical Society, 1998.

[13] A. Matsuo and K. Nagatomo, *Axioms for a vertex algebra and the locality of quantum fields*, MSJ Memoirs **4**, Mathematical Society of Japan, 1999.

[14] M. Miyamoto, Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2-cofiniteness, *Duke Math. J.* **122** (2004), 51–91.

[15] K. Nagatomo and A. Tsuchiya, The triplet vertex operator algebra $W(p)$ and the restricted quantum group $\bar{U}_q(sl_2)$ at $q = e^{\frac{\pi i}{p}}$, In *Exploring New Strctures and Natural Constructions in Mathematical Physics, Adv. Stud. Pure Math.* **61**, eds. K. Hasegawa, T. Hayashi, S. Hosono and Y. Yamada, Mathematical Society of Japan, 2011, pp. 1–49.

[16] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.